

Univers Virtuels

Transformations

Alexis NEDELEC

Centre Européen de Réalité Virtuelle
Ecole Nationale d'Ingénieurs de Brest

enib ©2018



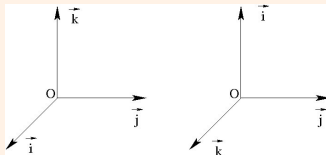
Introduction

Transformations

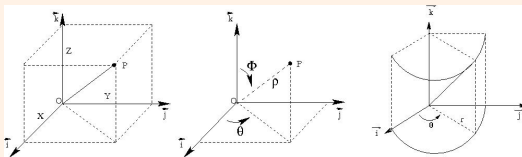
- systèmes de coordonnées
- matrices homogènes (transformations affines)
- repères de caméra
- projections
- déformations

Systèmes de coordonnées

Trièdres directs/indirects



Coordonnées cartésiennes, sphériques, cylindriques



Matrices homogènes

Coordonnées homogènes

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$$

Transposés de vecteurs et produit matriciel

- $[P]$: point de l'espace, $[P]^T$ transposée de $[P]$
- $[M]$: matrice homogène, $[M]^T$: transposée de $[M]$

$[P']$: résultat des transformations successives i ($1 \leq i \leq n$),

- $[P'] = [M_n] \dots [M_i] \dots [M_1][P]$
- $[P'] = [P]^T [M_1]^T \dots [M_i]^T \dots [M_n]^T$

Transformation de repères

Repères Usuels

- **WCS** : World Coordinate System
- **OCS** : Object Coordinate System
- **CCS** : Camera Coordinate System

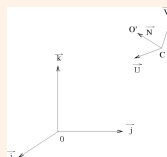
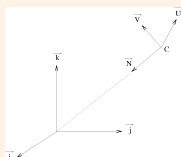
Transformation de repères

$$\begin{aligned}\vec{U} &= c_{11} \vec{i} + c_{12} \vec{j} + c_{13} \vec{k} \\ \vec{V} &= c_{21} \vec{i} + c_{22} \vec{j} + c_{23} \vec{k} \\ \vec{N} &= c_{31} \vec{i} + c_{32} \vec{j} + c_{33} \vec{k}\end{aligned}$$

Transformations de repère de caméra

Repère de Caméra

- une position de caméra (C)
- une direction de visée (point de focalisation : $\vec{N}$)
- un plan de caméra ($\vec{U}, \vec{V}$)



Calcul du plan de caméra ($\vec{U}, \vec{V}$)

- position de caméra ($\vec{OC}$), direction de visée par défaut ($\vec{CO}$)
- position de caméra ($\vec{OC}$), on choisit la direction de visée ($\vec{N}$)

Matrice de caméra : direction de visée par défaut

Définition du repère de caméra

$$\begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \\ w_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \\ w_w \end{bmatrix}$$

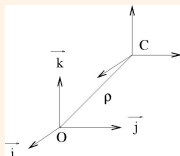
Direction de visée par défaut ($\vec{N} = \vec{CO}$)

$$[C] = [M_u][R_x][R_z][T]$$

- $[T]$: Translation au point d'observation
- $[R_z]$: Rotation autour de l'axe $\vec{k}$ de WCS
- $[R_u]$: Rotation autour de l'axe $\vec{U}$ de CCS
- $[M_u]$: passage à un trièdre indirect pour visualisation

Translation au point d'observation

$[T]$: Translation de Repère



$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x_0 \\ 0 & 1 & 0 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 & z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

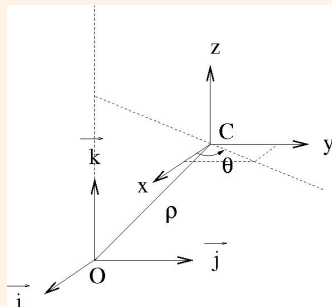
Transformation inverse

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -x_0 \\ 0 & 1 & 0 & -y_0 \\ 0 & 0 & 1 & -z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{Au final :} \quad \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & \rho \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotation autour de l'axe $\vec{k}$ de WCS

$[R_z]$: Rotation d'angle θ autour de l'axe $\vec{k}$

- amener l'axe Oy de la caméra
- parallèlement à la projection de $\vec{OC}$
- sur le plan (Oxy) du repère de scène



Rotation autour de l'axe $\vec{k}$ de WCS

$[R_z]$: Rotation d'angle θ autour de l'axe $\vec{k}$

$$[R_z] = \begin{bmatrix} \cos(\theta - \frac{\pi}{2}) & -\sin(\theta - \frac{\pi}{2}) & 0 & 0 \\ \sin(\theta - \frac{\pi}{2}) & \cos(\theta - \frac{\pi}{2}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

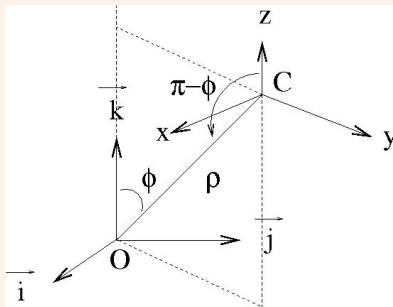
Transformation inverse

$$[R_z] = \begin{bmatrix} \sin \theta & -\cos \theta & 0 & 0 \\ \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotation autour de l'axe $\vec{U}$ de CCS

$[R_u]$: Rotation d'angle ϕ autour de l'axe $\vec{U}$

- amener l'axe Oz de la caméra
- dans la direction de $\vec{CO}$



Rotation autour de l'axe $\vec{U}$ de CCS

$[R_u]$: Rotation d'angle ϕ autour de l'axe $\vec{U}$

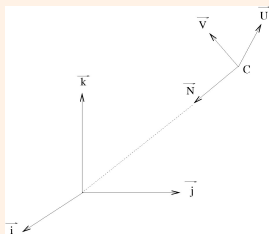
$$[R_u] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\pi - \varphi) & -\sin(\pi - \varphi) & 0 \\ 0 & \sin(\pi - \varphi) & \cos(\pi - \varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformation inverse

$$[R_x] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ 0 & -\sin \varphi & -\cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Inversion de l'axe $\vec{U}$ de CCS

$[M_u]$: Plan de projection

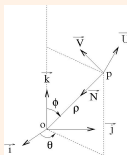


$$[M_u] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrice de Caméra

Transformation de repère : WCS $\rightarrow$ CCS

$$[C] = [M_u][R_u][R_z][T]$$



Transformation inverse résultante

$$[C] = \begin{bmatrix} -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ -\cos \varphi \cos \theta & -\cos \varphi \sin \theta & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi \cos \theta & -\sin \varphi \sin \theta & -\cos \varphi & \rho \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrice de Caméra

Repère de Transformation $(\vec{U}, \vec{V}, \vec{N})$

$$[C] = \begin{bmatrix} U_x & U_y & U_z & 0 \\ V_x & V_y & V_z & 0 \\ N_x & N_y & N_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrice de Transformation (ρ, θ, φ)

$$[C] = \begin{bmatrix} -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ -\cos \varphi \cos \theta & -\cos \varphi \sin \theta & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi \cos \theta & -\sin \varphi \sin \theta & -\cos \varphi & \rho \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrice de Caméra

Repère de Transformation $(\vec{U}, \vec{V}, \vec{N})$

- $\vec{N}(N_x, N_y, N_z)$: direction d'observation (axe 0_z)
- $\vec{V}(V_x, V_y, V_z)$: vecteur vertical du plan caméra (axe 0_y)
- $\vec{U}(U_x, U_y, U_z)$: second vecteur du plan caméra (axe 0_x)

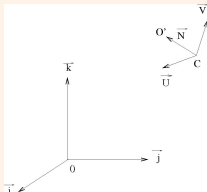
Repère de Orthonormé $(\vec{U}, \vec{V}, \vec{N})$

$$\begin{aligned} \|\vec{U}\| &= \|\vec{V}\| = \|\vec{N}\| = 1 \\ \vec{U} \cdot \vec{V} &= \vec{U} \cdot \vec{N} = \vec{V} \cdot \vec{N} = 0 \end{aligned}$$

Choix de direction de visée

Définition du repère de caméra

- $\vec{N} = \frac{\vec{O'C}}{\|\vec{O'C}\|}$: connu
- si $\vec{U} \perp \vec{k}$ alors $\Rightarrow \vec{U} = \frac{\vec{N} \wedge \vec{k}}{\|\vec{N} \wedge \vec{k}\|}$ connu
- et donc $\vec{V} = \frac{\vec{N} \wedge \vec{U}}{\|\vec{N} \wedge \vec{U}\|}$ connu

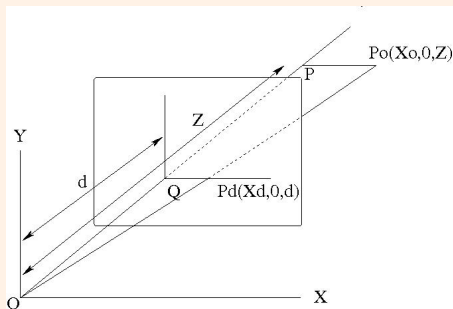


Projections

Types de projections

- projections parallèles : centre de projection à l'infini
- projections perspectives : centre de projection à distance finie

Calcul de projections sur un axe



Triangles semblables (Thalès) : $\frac{P_dQ}{OQ} = \frac{P_oP}{OP}$

Projection sur un axe

Calcul de projection sur un axe

$$\frac{x_d}{d} = \frac{x_0}{z}, \quad x_d = d \frac{x_0}{z}$$

$$\frac{y_d}{d} = \frac{y_0}{z}, \quad y_d = d \frac{y_0}{z}$$

Matrice de projection

$$[M_P] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{d} & 0 \end{bmatrix}$$

Matrice de Projection

Projections sur trois axes

$$[M_P] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{d_x} & \frac{1}{d_y} & \frac{1}{d_z} & 0 \end{bmatrix}$$

Matrice Homogène et transformations affines

$$[M] = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & T_{14} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & T_{24} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & T_{34} \\ P_{41} & P_{42} & P_{43} & E_{44} \end{bmatrix}$$

Quaternions

Définition

Quatre valeurs scalaires : $\mathbf{q} = [q_0, q_1, q_2, q_3]$

Autre représentation :

$$\mathbf{q} = [q_0, \vec{q}] , \quad \vec{q} = q_1 \vec{i} + q_2 \vec{j} + q_3 \vec{k}$$

Hamilton : extension des nombres complexes

$\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ tels que :

- $\mathbf{ii} = \mathbf{jj} = \mathbf{kk} = -1$
- $\mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k}$
- $\mathbf{jk} = -\mathbf{kj} = \mathbf{i}$
- $\mathbf{ki} = -\mathbf{ik} = \mathbf{j}$

Quaternions

Groupe algébrique

- Quaternion : $\mathbf{q} = [q_0, \vec{q}]$
- Conjugué : $\bar{\mathbf{q}} = [q_0, -\vec{q}]$
- Module : $\|\bar{\mathbf{q}}\| = \sqrt{\mathbf{q}\bar{\mathbf{q}}} = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$
- Inverse : $\mathbf{q}^{-1} = \frac{\bar{\mathbf{q}}}{\|\mathbf{q}\|^2}$
- Quaternions unitaires : $\mathbf{q}^{-1} = \bar{\mathbf{q}} (\|\mathbf{q}\| = 1)$
- Élément neutre : $\mathbf{q} = [1, (0, 0, 0)]$

Lois de compositions

- $\mathbf{p} + \mathbf{q} = [p_0 + q_0, \vec{p} + \vec{q}]$
- $\mathbf{pq} = [p_0q_0 - (\vec{p} \cdot \vec{q}), (q_0\vec{p} + p_0\vec{q} + \vec{p} \wedge \vec{q})]$

On pourra vérifier : $\mathbf{qq}^{-1} = [1, (0, 0, 0)]$

Quaternions et rotations

Rotation autour d'un Vecteur

- un point de l'espace $\vec{p} = (x, y, z)$
- peut-être mis en rotation d'un angle θ
- autour d'un vecteur $\vec{q}$

par utilisation des quaternions

- $\mathbf{p} = [0, \vec{p}]$
- $\mathbf{q} = \left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \vec{q} \right]$

Résultat de la rotation

Quaternion ($\mathbf{p}' = [0, \vec{p}']$) et vecteur résultant ($\vec{p}'$) :

$$\mathbf{p}' = \mathbf{q}\mathbf{p}\mathbf{q}^{-1}$$

Quaternions et rotations

Enchaînement de rotations

Loi d'associativité de quaternions :

$$\mathbf{q}_2 (\mathbf{q}_1 \mathbf{p} \mathbf{q}_1^{-1}) \mathbf{q}_2^{-1}$$

$$(\mathbf{q}_2 \mathbf{q}_1) \mathbf{p} (\mathbf{q}_1^{-1} \mathbf{q}_2^{-1})$$

$$(\mathbf{q}_2 \mathbf{q}_1) \mathbf{p} (\mathbf{q}_2 \mathbf{q}_1)^{-1}$$

Rotations successives autour des axes *Pitch*, *Yaw*, *Roll* :

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_{\text{pitch}} \mathbf{q}_{\text{yaw}} \mathbf{q}_{\text{roll}}$$

Quaternions et rotations

Conversion Quaternion/Matrice de rotation

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & 0 \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & 0 \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_{44} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} M_{11} &= q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2, & M_{12} &= 2q_1q_2 - 2q_0q_3, & M_{13} &= 2q_1q_3 + 2q_0q_2 \\ M_{21} &= 2q_1q_2 + 2q_0q_3, & M_{22} &= q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2, & M_{23} &= 2q_2q_3 - 2q_0q_1 \\ M_{31} &= 2q_1q_3 - 2q_0q_2, & M_{32} &= 2q_2q_3 + 2q_0q_1, & M_{33} &= q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \\ M_{44} &= q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 \end{aligned}$$

Quaternions et rotations

Conversion Quaternion/Matrice de rotation

Représentation matricielle avec $\|\mathbf{q}\| = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$

$$M_{11} = \|\mathbf{q}\|^2 - 2(q_2^2 + q_3^2)$$

$$M_{22} = \|\mathbf{q}\|^2 - 2(q_1^2 + q_3^2)$$

$$M_{33} = \|\mathbf{q}\|^2 - 2(q_1^2 + q_2^2)$$

$$M_{44} = \|\mathbf{q}\|^2$$

Quaternions unitaires, ($\|\mathbf{q}\| = 1$)

$$\begin{bmatrix} 1 - 2(q_2^2 + q_3^2) & 2(q_1q_2 - q_0q_3) & 2(q_1q_3 + q_0q_2) & 0 \\ 2(q_1q_2 + q_0q_3) & 1 - 2(q_1^2 + q_3^2) & 2(q_2q_3 - q_0q_1) & 0 \\ 2(q_1q_3 - q_0q_2) & 2(q_2q_3 + q_0q_1) & 1 - 2(q_1^2 + q_2^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Quaternions et rotations

Conversion Matrice de rotation/Quaternion

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & 0 \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & 0 \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- $Trace(M) = M_{11} + M_{22} + M_{33}$
- 4 cas possibles : $max(Trace(M), M_{11}, M_{22}, M_{33})$

Quaternions et rotations

$$Trace(M) = \max(Trace(M), M_{11}, M_{22}, M_{33})$$

- $q_0 = \frac{1}{2}\sqrt{Trace(M) + 1}$
- $q_1 = \frac{M_{32} - M_{23}}{4q_0}, q_2 = \frac{M_{13} - M_{31}}{4q_0}, q_3 = \frac{M_{21} - M_{12}}{4q_0}$

$$M_{11} = \max(Trace(M), M_{11}, M_{22}, M_{33})$$

- $q_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2M_{11} - Trace(M) + 1}$
- $q_0 = \frac{M_{32} - M_{23}}{4q_1}, q_2 = \frac{M_{21} + M_{12}}{4q_1}, q_3 = \frac{M_{13} + M_{31}}{4q_1}$

Quaternions et rotations

$$M_{22} = \max(\text{Trace}(M), M_{11}, M_{22}, M_{33})$$

- $q_2 = \frac{1}{2} \sqrt{2M_{22} - \text{Trace}(M) + 1}$
- $q_0 = \frac{M_{13} - M_{31}}{4q_2}, q_1 = \frac{M_{21} + M_{12}}{4q_2}, q_3 = \frac{M_{32} + M_{23}}{4q_2}$

$$M_{33} = \max(\text{Trace}(M), M_{11}, M_{22}, M_{33})$$

- $q_3 = \frac{1}{2} \sqrt{2M_{33} - \text{Trace}(M) + 1}$
- $q_0 = \frac{M_{21} - M_{12}}{4q_3}, q_1 = \frac{M_{13} + M_{31}}{4q_3}, q_2 = \frac{M_{32} + M_{23}}{4q_3}$

Déformations

Transformations affines

- homothéties, translations, rotations

Déformations

- déformations globales linéaires ou non (modèles de Barr)
- déformations souples, élastiques (modèles de Sedeberg)

Modèles de Barr et Sedeberg

Avantages :

- modélisation d'objets complexes
- technique d'animation par interpolation sur la déformation

Inconvénients :

- contrôle de la déformation

Déformations

Modèles de Barr

Appliquer une perturbation sur la transformation

- $\vec{P}(x, y, z)$: point de l'objet avant déformation
- $\vec{P}_{def}(X, Y, Z)$: point correspondant après déformation

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x, y, z) \\ g(x, y, z) \\ h(x, y, z) \end{bmatrix}$$

Modèles de Barr

Transformation d'échelle

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_x & 0 & 0 \\ 0 & e_y & 0 \\ 0 & 0 & e_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_x x \\ e_y y \\ e_z z \end{bmatrix}$$

Déformation d'échelle (tapering) sur un axe

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} rx \\ ry \\ z \end{bmatrix}$$

avec : $r = f(z)$

Modèles de Barr

Rotation autour d'un axe

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \cos \theta - y \sin \theta \\ x \sin \theta + y \cos \theta \\ z \end{bmatrix}$$

Déformation, torsion autour d'un axe

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \cos \theta - y \sin \theta \\ x \sin \theta + y \cos \theta \\ z \end{bmatrix}$$

avec : $\theta = f(z)$

Modèles de Barr

Problème : calcul de normales après déformation

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x, y, z) \\ g(x, y, z) \\ h(x, y, z) \end{bmatrix}$$

Solution : Jacobien de la déformation

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} & \frac{\partial h}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Modèles de Barr

Calcul de la normale au point déformé

- $\vec{n}$: normale au point $\vec{P}(x, y, z)$ avant déformation
- $\vec{N}$: normale au point $\vec{P}_{def}(X, Y, Z)$ après déformation

$$\vec{N} = \det(J) {}^t[J^{-1}] \vec{n}$$

Remarques sur le calcul de déformation

- $\det(J) = 1$: conservation du volume après déformation
- Calcul de $\det(J)$: inutile pour connaître uniquement la direction

Modèles de Barr

Calcul de normales après torsion autour de l'axe O_z

$$X = x \cos \theta - y \sin \theta$$

$$Y = x \sin \theta + y \cos \theta$$

$$Z = z$$

Jacobien de la transformation

$$[J] = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & -\theta'(x \sin \theta + y \cos \theta) \\ \sin \theta & \cos \theta & \theta'(x \cos \theta - y \sin \theta) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

On en déduit

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & -\theta'Y \\ \sin \theta & \cos \theta & \theta'X \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Modèles de Barr

Matrice des cofacteurs

$$[\tilde{J}] = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ \theta' y & -\theta' x & 1 \end{bmatrix}$$

avec :

- $x = X \cos \theta + Y \sin \theta$
- $y = -X \sin \theta + Y \cos \theta$

Modèles de Barr

Calcul de normale après déformation

- $\vec{N} = {}^t [J^{-1}] \vec{n} = [\tilde{J}] \vec{n}$

avec :

- $\det(J) = 1$
- $[J^{-1}] = {}^t [\tilde{J}]$

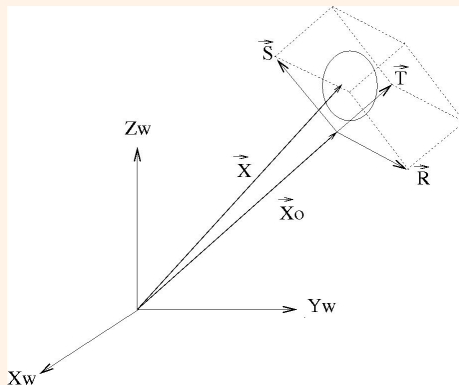
On trouve donc :

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ \theta' y & -\theta' x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Modèles de Sedberg/Parry

FFD : Free Form Deformation

- déformation d'objets dans une région de l'espace



$$\vec{X} = \vec{X}_0 + r\vec{R} + s\vec{S} + t\vec{T}$$

Modèles de Sedberg/Parry

FFD : Free Form Deformation

- $\vec{X}_0$: vecteur définissant l'origine du repère de déformation.
- $\vec{R}, \vec{S}, \vec{T}$: vecteurs du repère de déformation.

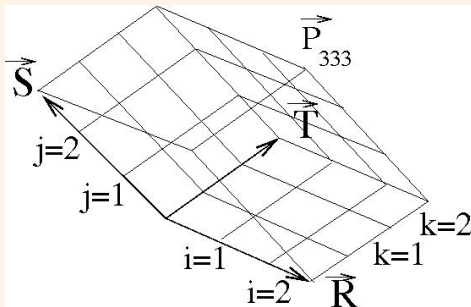
Calcul des paramètres $0 \leq (r, s, t) \leq 1$

$$r = \frac{(\vec{S} \wedge \vec{T}) \cdot (\vec{X} - \vec{X}_0)}{\vec{R} \cdot (\vec{S} \wedge \vec{T})}$$
$$s = \frac{(\vec{R} \wedge \vec{T}) \cdot (\vec{X} - \vec{X}_0)}{\vec{S} \cdot (\vec{R} \wedge \vec{T})}$$
$$t = \frac{(\vec{R} \wedge \vec{S}) \cdot (\vec{X} - \vec{X}_0)}{\vec{T} \cdot (\vec{R} \wedge \vec{S})}$$

Modèles de Sedeberg/Parry

Grille de points de contrôles

- $(l + 1)$ plans suivant $\vec{R}$ (paramètre i)
- $(m + 1)$ plans suivant $\vec{S}$ (paramètre j)
- $(n + 1)$ plans suivant $\vec{T}$ (paramètre k)



Modèles de Sedeberg/Parry

Calcul de déformation

- $\vec{P}_{ijk}$: points de contrôle du cube de déformation
- Polynômes de Bernstein : $B_{n,i}(u) = \frac{n!}{i!(n-i)!} u^i (1-u)^{n-i}$

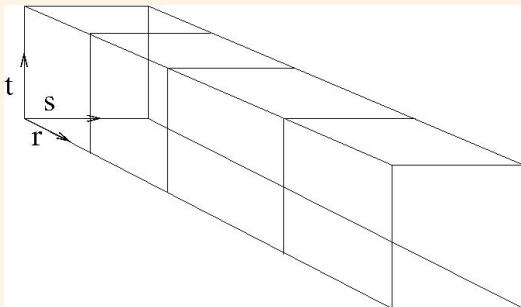
Point déformé $\vec{X}_{def}(r, s, t)$

$$\vec{X}_{def} = \sum_{i=0}^l B_{l,i}(r) \left[\sum_{j=0}^m B_{m,j}(s) \left(\sum_{k=0}^n B_{n,k}(t) \vec{P}_{ijk} \right) \right]$$

- A chaque valeur (r, s, t) correspond un point $\vec{X}$
- $\vec{X}_{def}(r, s, t) = f(\vec{P}_{ijk})$

Modèles de Sedeberg/Parry

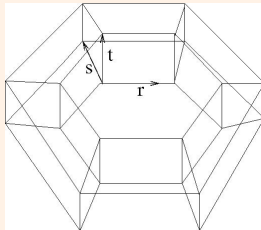
Extended Free Form Deformation



- limitations sur la déformation : box parallélépipédique
- solutions : utiliser des box non-cubiques de déformation

EFFD : Extended Free Form Deformation

Extended Free Form Deformation



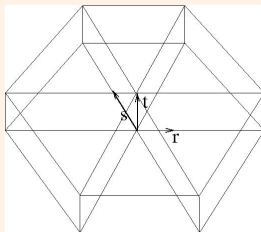
$$\overrightarrow{X_{def}} = \sum_{i=0}^l B_{l,i}(r) \left[\sum_{j=0}^m B_{m,j}(s) \left(\sum_{k=0}^n B_{n,k}(t) \overrightarrow{P_{ijk}} \right) \right]$$

On fait coïncider les points de contrôle

- $r = 0 : \overrightarrow{P_{0jk}}$
- $r = 1 : \overrightarrow{P_{ljk}} = \overrightarrow{P_{0jk}}$

EFFD : Extended Free Form Deformation

Extended Free Form Deformation



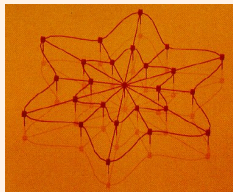
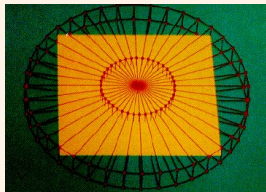
$$\overrightarrow{X_{def}} = \sum_{i=0}^l B_{l,i}(r) \left[\sum_{j=0}^m B_{m,j}(s) \left(\sum_{k=0}^n B_{n,k}(t) \overrightarrow{P_{ijk}} \right) \right]$$

On fait coïncider les points de contrôle

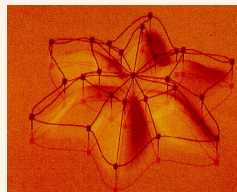
- $s = 0$ et $t = 0$: $\overrightarrow{P_{i00}} = \overrightarrow{P_{i'00}}$
- $s = 0$ et $t = 1$: $\overrightarrow{P_{i0n}} = \overrightarrow{P_{i'0n}}$

EFFD : Extended Free Form Deformation

Extended Free Form Deformation



Extended Free Form Deformation



Conclusion

Calculs matriciel

- coordonnées homogènes
- matrice de rotations (angles d'Euler)
- transformations de repères (caméra)

Quaternions

- calculs de rotations autour d'un axe
- expression matricielle de quaternions
- conversion quaternions / rotations

Déformations

- Rigides (Barr), souples (Sedberg)
- calculs de normales après déformation

Bibliographie

Livres, articles

- **B. Péroche, D. Bechmann :**
“Informatique graphique et rendu”
Collection Hermès, Lavoisier (2007)
- **R. Malgouires :**
“Algorithmes pour la synthèse d’images et l’animation 3D”
Éditions Dunod (2002)
- **Samuel R. Buss :**
“3D Computer Graphics :
A mathematical introduction with OpenGL”
Collection Cambridge University Press (2003)

Bibliographie

Articles

- **T. Sederberg and S.R. Parry** : “Free-form deformation of solid geometric models” SIGGRAPH '86
- **S. Coquillart** : “Extended Free-Form Deformation : A Sculpturing Tool for 3D Geometric Modeling” SIGGRAPH'90

Adresses “au Net”

- <http://paulbourke.net> :
la 3D en long et en large (et en hauteur)
- <http://malgouyres.org>
- <http://culturemath.ens.fr/maths/pdf/logique/quaternions.pdf>
- www.developpez.com : entre autre de la 2D/3D