

## S50-MECANIQUE

### Objectifs

Cette première partie de cours (7 semaines) doit permettre de faire le point sur vos connaissances en dynamique du solide afin d'aborder le projet de la deuxième partie du semestre.

### Mode d'emploi de ce cours

Il vous est demandé de lire le cours en autonomie et de refaire les exercices corrigés seul ou en groupe (4 maximum). Il vous est possible de poser toutes vos questions à l'enseignant. Des contrôles continus programmés vous permettront de contrôler vos compétences avant le projet de P2.

### Plan du cours :

Chapitre 1 : calcul vectoriel

Chapitre 2 : torseurs-torseur cinématique

*Contrôle continu n°1 semaine 3*

Chapitre 3 : géométrie des masses

*Contrôle continu n°2 semaine 5*

Chapitre 4 : Principe Fondamental de la Dynamique

*DS en P2*

### Annexes

Moments d'inertie et produits d'inertie

Aide-mémoire

## Chapitre 1 : calcul vectoriel

### A : produit scalaire :

On définit un repère  $R_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  orthonormé direct.

Par définition :  $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = \|\vec{u}_1\| \cdot \|\vec{u}_2\| \cdot \cos(\widehat{\vec{u}_1, \vec{u}_2})$

$$\vec{u}_1 \begin{vmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{vmatrix}_{R_0} ; \vec{u}_2 \begin{vmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{vmatrix}_{R_0} ; \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2$$

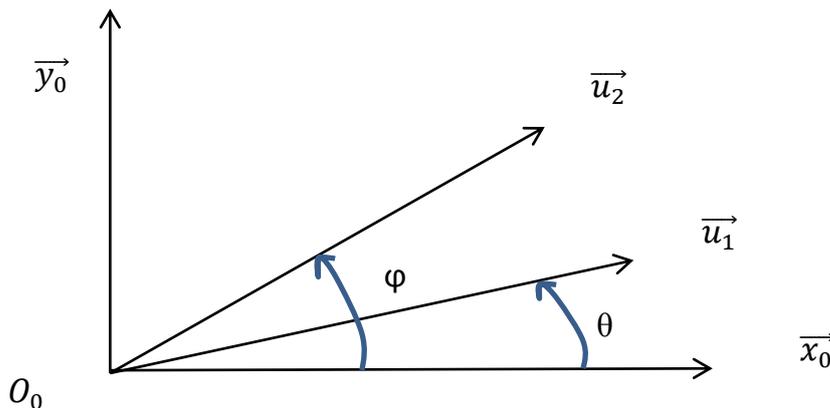
*Propriétés :*

Le produit scalaire est commutatif :  $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_1$

Le résultat est un scalaire

**Exemple :**

$$\|\vec{u}_1\| = \|\vec{u}_2\| = 1, \vec{u}_1 \begin{vmatrix} a_1 \\ b_1 \\ 0 \end{vmatrix}_{R_0} ; \vec{u}_2 \begin{vmatrix} a_2 \\ b_2 \\ 0 \end{vmatrix}_{R_0}$$



Calculer  $\vec{u}_1 \cdot \vec{x}_0$ . En déduire la valeur de  $a_1$ .

Calculer  $\vec{u}_1 \cdot \vec{y}_0$ . En déduire la valeur de  $b_1$ .

Calculer  $\vec{u}_2 \cdot \vec{x}_0$ . En déduire la valeur de  $a_2$ .

Calculer  $\vec{u}_2 \cdot \vec{y}_0$ . En déduire la valeur de  $b_2$ .

Calculer  $\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_1$

Réponses :

$$a_1 = \cos\theta, b_1 = \sin\theta, a_2 = \cos\phi, b_2 = \sin\phi, \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_1 = \cos(\theta - \phi)$$

**B : produit vectoriel :**

On définit un repère  $R_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  orthonormé direct.

Soit  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{k}$  tel que  $\vec{k}$  perpendiculaire à  $\vec{u}_1$  et  $\vec{u}_2$

Par définition :  $\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 = \|\vec{u}_1\| \cdot \|\vec{u}_2\| \cdot \sin(\widehat{\vec{u}_1, \vec{u}_2}) \cdot \vec{k}$

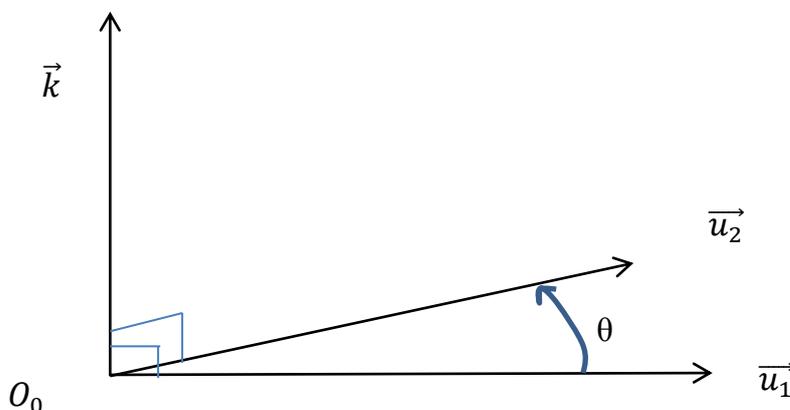
NB :  $(\widehat{\vec{u}_1, \vec{u}_2})$  angle orienté entre  $\vec{u}_1$  et  $\vec{u}_2$ ,  $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{k})$  trièdre direct

$$\vec{u}_1 \begin{vmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_{1R_0} \end{vmatrix} ; \vec{u}_2 \begin{vmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_{2R_0} \end{vmatrix} ; \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 = \begin{vmatrix} b_1 \cdot c_2 - b_2 \cdot c_1 \\ c_1 \cdot a_2 - a_1 \cdot c_2 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_{1R_0} \end{vmatrix}$$

Propriétés :

Le produit vectoriel n'est pas commutatif :  $\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 = -\vec{u}_2 \wedge \vec{u}_1$

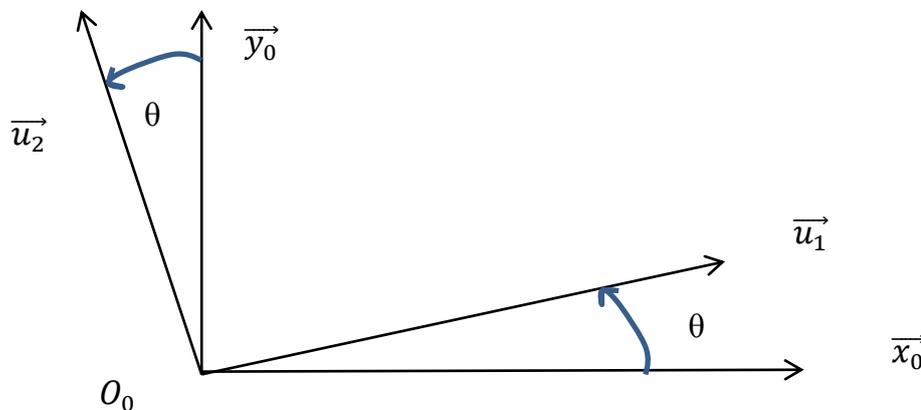
Le résultat est un vecteur



**Exemple :**

On définit un repère  $R_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  orthonormé direct.

$$\|\vec{u}_1\| = \|\vec{u}_2\| = 1, \vec{u}_1 \begin{vmatrix} a_1 \\ b_1 \\ 0_{R_0} \end{vmatrix} ; \vec{u}_2 \begin{vmatrix} a_2 \\ b_2 \\ 0_{R_0} \end{vmatrix}$$



Donner les valeurs de  $a_1, b_1, a_2, b_2$  en fonction de  $\theta$ .

Calculer  $\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_1$ , conclure.

Donner (sans calcul)  $\vec{x}_0 \wedge \vec{y}_0, \vec{u}_1 \wedge \vec{z}_0, \vec{x}_0 \wedge \vec{u}_1, \vec{y}_0 \wedge \vec{u}_1, \vec{x}_0 \wedge \vec{u}_2, \vec{u}_2 \wedge \vec{u}_1$ .

**Réponses :**

$$a_1 = \cos\theta, b_1 = \sin\theta, a_2 = -\sin\theta, b_2 = \cos\theta,$$

$\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_1 = a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 = 0$  : les deux vecteurs sont orthogonaux (on le savait déjà).

$$\vec{x}_0 \wedge \vec{y}_0 = \vec{z}_0, \vec{u}_1 \wedge \vec{z}_0 = -\vec{u}_2, \vec{x}_0 \wedge \vec{u}_1 = \sin\theta \cdot \vec{z}_0, \vec{y}_0 \wedge \vec{u}_1 = -\cos\theta \cdot \vec{z}_0, \vec{x}_0 \wedge \vec{u}_2 = \cos\theta \cdot \vec{z}_0, \vec{u}_2 \wedge \vec{u}_1 = -\vec{z}_0$$

**Chapitre 2 : torseurs-torseur cinématique**

**1 : définition d'un torseur**

Un torseur est un champ vectoriel équiprojectif :

$$\vec{M}_A \cdot \vec{AB} = \vec{M}_B \cdot \vec{AB}$$

Relation très utilisée en particulier en cinématique du solide... Voir un peu plus loin.

Il est défini par sa résultante  $\vec{R}$  et son moment en un point A :  $\vec{M}_A$

Notation :

$$[T]_A = \left[ \vec{R} \mid \vec{M}_A \right]_A \quad \text{ou} \quad \left\{ \vec{R} \mid \vec{M}_A \right\}_A \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{c} \vec{R} \\ \vec{M}_A \end{array} \right\}_A \dots$$

Propriété : transport du torseur "BABAR"

$$\vec{M}_B = \vec{M}_A + \vec{BA} \wedge \vec{R}$$

*Définitions :*

- Glisseur : un torseur est un glisseur si et seulement si il existe un point K tel que

$$\vec{M}_K = \vec{0}$$

L'ensemble des points K est une droite appelée « axe du glisseur ».

- Couple : un torseur est un couple si sa résultante est nulle. Un couple est donc un champ vectoriel constant.

Propriété :

On démontre que tout torseur peut s'écrire comme la somme d'un couple et d'un glisseur (la somme de deux torseurs ne peut se faire que s'ils sont exprimés en un même point).

Exemple :

Vous portez une poutre homogène de section constante tout seul.

Au départ vous la prenez en son milieu : vous n'avez à exercer qu'une résultante (force vers le haut d'intensité égale au poids de la poutre).

Ensuite vous la portez à l'horizontal par une de ses extrémités : vous avez à exercer la même résultante plus un moment égal au produit de la demi longueur de la poutre multiplié par son poids.

La réunion de la résultante et du moment en un point s'appelle le torseur des efforts !

**2 : cinématique du solide**

Le champ cinématique des vitesses est un torseur : le torseur cinématique.

$$\vec{v}(A)_{S/0} \cdot \vec{AB} = \vec{v}(B)_{S/0} \cdot \vec{AB}$$

Il est défini par sa résultante cinématique  $\overrightarrow{\Omega}_{S/0}$  –vecteur vitesse de rotation du solide dans son mouvement par rapport au repère  $R_0$

et par son moment cinématique en un point A  $\overrightarrow{v(A)}_{S/0}$  –vecteur vitesse du point A du solide dans son mouvement par rapport au repère  $R_0$  :

$$[V_{S/0}]_A = \left[ \overrightarrow{\Omega}_{S/0} \mid \overrightarrow{v(A)}_{S/0} \right]_A$$

Pour définir complètement le vecteur vitesse d'un point, il faut :

... un point P

... qui appartient à un solide S, ou qui est fixe dans un repère  $R_S$

... solide ou repère mobile dans un repère  $R_0$  dans lequel  $O_0$  est un point fixe (pas forcément l'origine)

$$\overrightarrow{v(P)}_{S/0} = \frac{d^{(0)} \overrightarrow{O_0 P}}{dt} \quad \text{ou} \quad \left. \frac{d \overrightarrow{O_0 P}}{dt} \right|_{R_0}$$

Il est essentiel de faire apparaître le repère de dérivation !

**Remarque :** le champ des accélérations d'un solide n'est en général pas un torseur.

**Formule du changement de repère de dérivation (ou formule de dérivation composée)**

$$\frac{d^{(0)} \overrightarrow{U}}{dt} = \frac{d^{(1)} \overrightarrow{U}}{dt} + \overrightarrow{\Omega}_{1/0} \wedge \overrightarrow{U}$$

NB : ne pas confondre ...

- **repère d'observation** (l'observateur est lié à ce repère, et il décrit le mouvement)
- **repère de dérivation** (notion utile pour le traitement mathématique des calculs)
- **repère d'écriture** (dans lequel on exprime les résultats). Il est rarement nécessaire d'écrire ces résultats dans un repère particulier ! Et encore moins souvent utile de les écrire dans  $R_0$ , même lorsqu'il s'agit de calculer la vitesse d'un point, dans son mouvement par rapport à  $R_0$ .

Exemple : l'écriture suivante est tout à fait possible

$$\overrightarrow{v(P)}_{2/1} = \frac{d^{(1)} \overrightarrow{O_1 P}}{dt} = \dot{x} \vec{i}_1 + r \dot{\theta} \vec{j}_1 + L\omega_{2/1} \vec{j}_2$$

Le repère d'observation est  $R_1$ ,

le premier\* repère de dérivation qui apparaît est  $R_1$ ,

il n'y a pas vraiment de repère d'écriture :  $R_1$  et  $R_2$  sont utilisés !

\* Dans les calculs, on a sûrement utilisé la relation

$$\frac{d^{(1)} \overrightarrow{O_1 P}}{dt} = \frac{d^{(2)} \overrightarrow{O_1 P}}{dt} + \overrightarrow{\Omega}_{2/1} \wedge \overrightarrow{O_1 P}$$

Et là apparaissent 2 repères de dérivation !

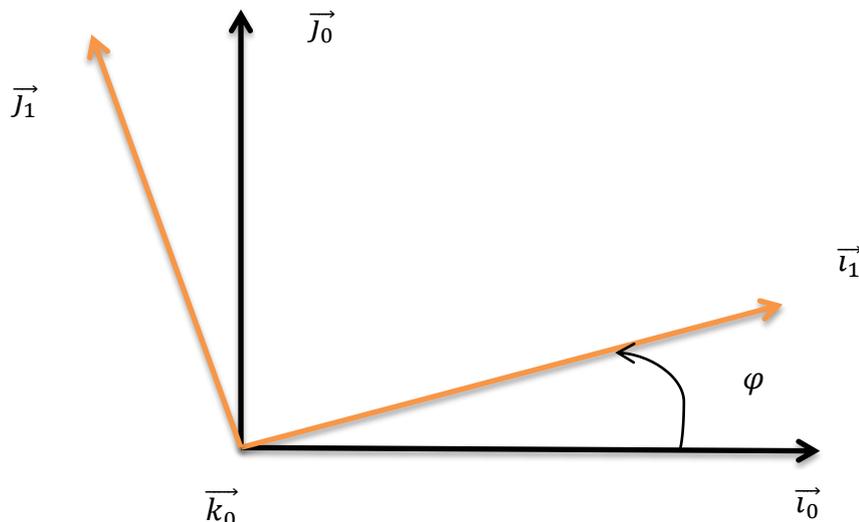
**Exercice 1**

Soient  $R_0 = (O_0, \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$  et  $R_1 = (O_1, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1 = \vec{k}_0)$  mobile dans  $R_0$

$$\vec{\Omega}_{1/0} = \frac{d\varphi}{dt} \vec{k}_0 \text{ ou } \dot{\varphi} \vec{k}_0$$

Calculer  $\frac{d^{(0)}\vec{l}_1}{dt}$  et  $\frac{d^{(0)}\vec{j}_1}{dt}$

On trouve :



Représentation plane des repères directs avec l'axe de rotation commun aux deux repères  $\vec{k}_0$  perpendiculaire au plan, l'angle  $\varphi$  algébrique est représenté positif compris entre 0 et  $\frac{\pi}{2}$  pour éviter les erreurs de signe.

$$\frac{d^{(0)}\vec{l}_1}{dt} = \dot{\varphi} \cdot \vec{j}_1 \text{ et } \frac{d^{(0)}\vec{j}_1}{dt} = -\dot{\varphi} \cdot \vec{l}_1$$

*Remarquer que « dériver par rapport au temps » consiste à faire pivoter le vecteur de  $+\pi/2$  autour de l'axe portant le vecteur vitesse de rotation  $\vec{k}_0$  et de multiplier par la valeur algébrique de la vitesse de rotation  $\dot{\varphi}$ .*

**Exercice 2**

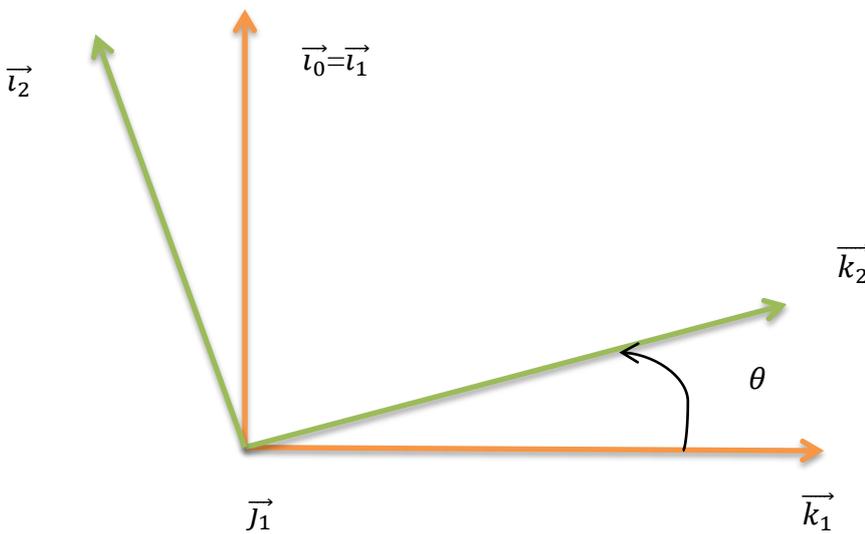
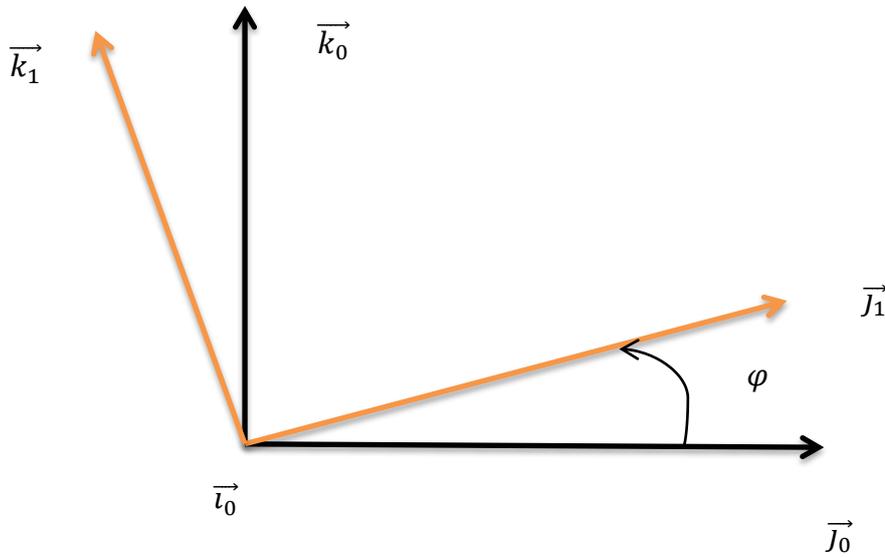
Soient  $R_0 = (O_0, \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$  et

$R_1 = (O_1, \vec{i}_1 = \vec{i}_0, \vec{j}_1, \vec{k}_1), R_2 = (O_2, \vec{i}_2, \vec{j}_2 = \vec{j}_1, \vec{k}_2)$ , mobiles dans  $R_0$

$$\vec{\Omega}_{1/0} = \dot{\varphi} \vec{i}_0 \quad \vec{\Omega}_{2/1} = \dot{\theta} \vec{j}_1$$

Calculer  $\frac{d^{(0)}\vec{j}_1}{dt}, \frac{d^{(0)}\vec{k}_1}{dt}, \frac{d^{(0)}\vec{k}_2}{dt}, \frac{d^{(0)}\vec{l}_2}{dt}$

On trouve :



$$\frac{d^{(0)}\vec{j}_1}{dt} = \dot{\varphi} \cdot \vec{k}_1, \quad \frac{d^{(0)}\vec{k}_1}{dt} = -\dot{\varphi} \cdot \vec{j}_1$$

Pour calculer  $\frac{d^{(0)}\vec{k}_2}{dt}$ , deux possibilités :

$$\frac{d^{(0)}\vec{k}_2}{dt} = \frac{d^{(2)}\vec{k}_2}{dt} + \vec{\Omega}_{2/0} \wedge \vec{k}_2; \quad \frac{d^{(2)}\vec{k}_2}{dt} = \vec{0}; \quad \vec{\Omega}_{2/0} = \vec{\Omega}_{2/1} + \vec{\Omega}_{1/0}$$

$$\text{Ou mieux } \frac{d^{(0)}\vec{k}_2}{dt} = \frac{d^{(1)}\vec{k}_2}{dt} + \vec{\Omega}_{1/0} \wedge \vec{k}_2; \quad \frac{d^{(1)}\vec{k}_2}{dt} = \dot{\theta} \cdot \vec{i}_2; \quad \dot{\varphi} \cdot \vec{i}_0 \wedge \vec{k}_2 = -\dot{\varphi} \cdot \cos\theta \cdot \vec{j}_1$$

$$\text{De même } \frac{d^{(0)}\vec{i}_2}{dt} = -\dot{\theta} \cdot \vec{k}_2 + \dot{\varphi} \cdot \sin\theta \cdot \vec{j}_1$$

**Pour s'entraîner :**

Soit le repère fixe  $R_0 (O, \vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Z}_0)$  et les repères mobiles

$$R_1 (O, \vec{X}_1, \vec{Y}_1 = \vec{Y}_0, \vec{Z}_1) \quad R_2 (O, \vec{X}_2, \vec{Y}_2, \vec{Z}_2 = \vec{Z}_1)$$

Avec  $\vec{\Omega}_{R_1/R_0} = \dot{\theta} \cdot \vec{Y}_0$  et  $\vec{\Omega}_{R_2/R_1} = \dot{\phi} \cdot \vec{Z}_1$

Calculer :

$$\frac{d^{(0)}\vec{X}_1}{dt}; \frac{d^{(0)}\vec{Z}_1}{dt}; \frac{d^{(0)}\vec{X}_2}{dt}; \frac{d^{(0)}\vec{Y}_2}{dt}$$

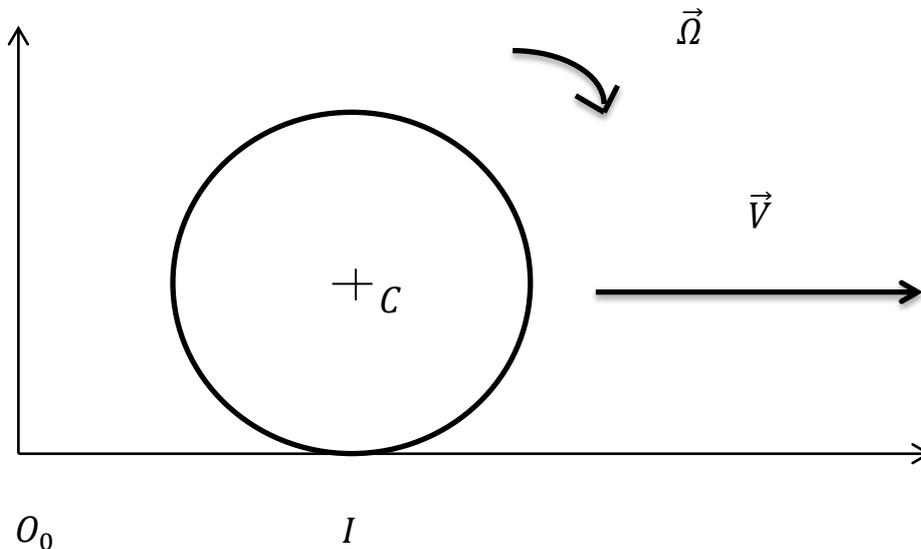
**Roulement sans glissement**

Soit I le point de contact entre S1 et S2. On définit la vitesse de glissement de S1 par rapport à S2 : ( $R_0$  est un repère quelconque)

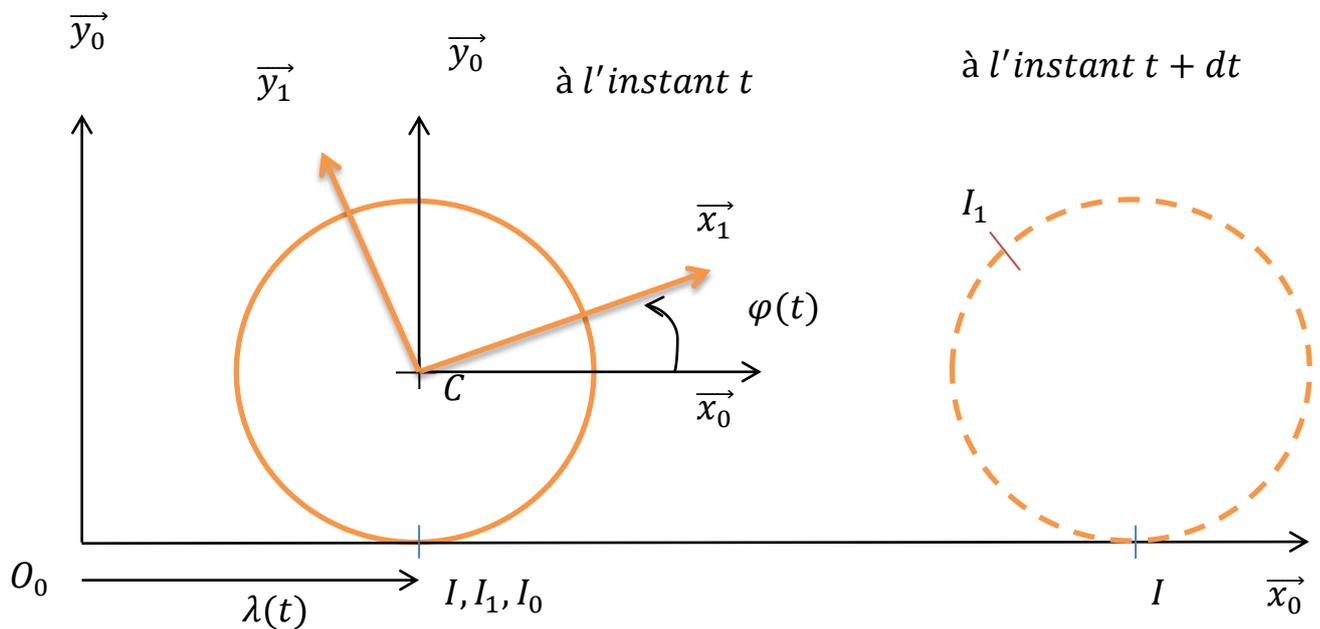
$$\vec{v}(I)_{gl} = \underbrace{\vec{v}(I)_{1/0} - \vec{v}(I)_{2/0}}_{\vec{v}(I)_{1/2}}$$

Il y a roulement sans glissement si  $\vec{v}(I)_{gl} = \vec{0}$

Exemple : une roue (1) de rayon R roule sans glisser sur le sol (0). Quelle est la relation entre la vitesse d'avance et la vitesse de rotation de la roue ?



**Réponse** : on met en place un repère par sous ensemble cinématique, puis le paramétrage permettant de passer d'un repère à un autre.



$R_0(O_0; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{k}_0)$  fixe,  $R'_0(C; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{k}_0)$  lié à l'axe de la roue,  $R_1(C; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{k}_0)$  lié à la roue

Avec  $\lambda(t)$  algébrique et dessiné positif,  $\phi(t)$  algébrique représenté positif compris entre 0 et  $\frac{\pi}{2}$ .

Les points I : I est le point géométrique de contact entre la roue et le sol,  $I_1$  est le point de la roue (1) en I à l'instant t,  $I_0$  est le point de la roue en I à l'instant t. Les points  $I, I_1, I_0$  coïncident à l'instant t

À l'instant  $t+dt$ , I est toujours le point de contact entre la roue et le sol,  $I_1$  s'est déplacé sur la roue et  $I_0$  n'a pas bougé.

La vitesse de glissement est  $\vec{v}_{I_1/0}$

$$\vec{v}_{I_1/0} = \vec{v}_{C \in 1/0} + \vec{I_1 C} \wedge \vec{\Omega}_{1/0} = \dot{\lambda} \vec{x}_0 + R \dot{\phi} \vec{x}_0$$

La relation de roulement sans glissement est :  $\dot{\lambda} + R \dot{\phi} = 0$

### Mouvement plan sur plan

Un solide S est animé d'un mouvement plan sur plan si un plan P1 lié à S glisse sur un plan fixe P. A tout instant, P et P1 restent donc parallèles.

On appelle CIR (centre instantané de rotation) le point géométrique I appartenant à S qui, à l'instant t, possède une vitesse nulle par rapport à  $R_0$  :

$$\vec{v}(I)_{S/0} \Big|_t = \vec{0}$$

Suite de l'exemple précédent : une roue (1) de rayon R roule en glissant sur le sol (0) :  $2\dot{\lambda} + R\dot{\phi} = 0$

Où se trouve le CIR de ce mouvement plan sur plan ?

**Solution** : on appelle K le CIR. On pose  $\vec{O_0 K} = a\vec{x}_0 + b\vec{y}_0$

$$\vec{v}_{K \in 1/0} = \vec{v}_{C \in 1/0} + \vec{K C} \wedge \vec{\Omega}_{1/0} = \dot{\lambda} \vec{x}_0 + ((\lambda - a)\vec{x}_0 + (R - b)\vec{y}_0) \wedge \dot{\phi} \vec{k}_0;$$

$$\vec{v}_{K \in 1/0} = (\dot{\lambda} + (R - b)\dot{\phi})\vec{x}_0 - (\lambda - a)\dot{\phi}\vec{y}_0 = \vec{0}$$

$$\vec{v}_{K \in 1/0} = \left(\frac{R}{2} - b\right)\dot{\phi}\vec{x}_0 - (\lambda - a)\dot{\phi}\vec{y}_0 = \vec{0}$$

Donc  $a = \lambda$  et  $b = \frac{R}{2}$

**Exercice d'application : robot ABB IRB 140**

**Mouvement du robot**

Type de mouvement	Portée du mouvement	
Axe 1 Mouvement de rotation	+180°	- -180°
Axe 2 Mouvement de bras	+110°	- -90°
Axe 3 Mouvement de bras	+50°	- -230°
Axe 4 Mouvement de poignet	+200°	- -200°
Axe 5 Mouvement de flexion	+120°	- -120°
Axe 6 Mouvement de pivot	+400°	- -400°

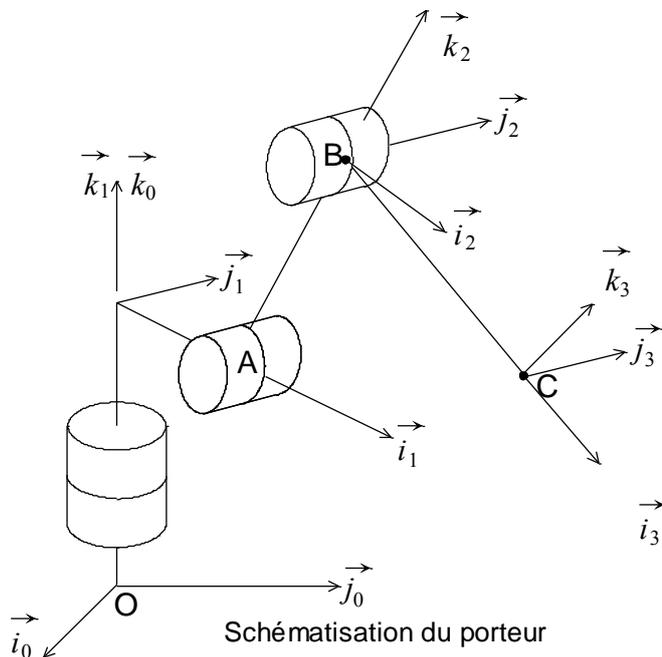
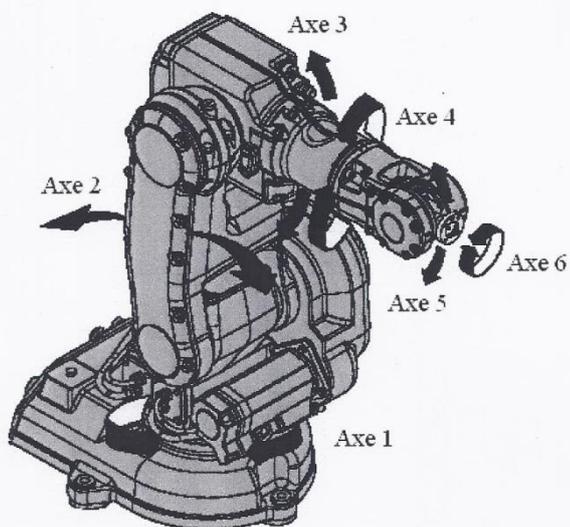
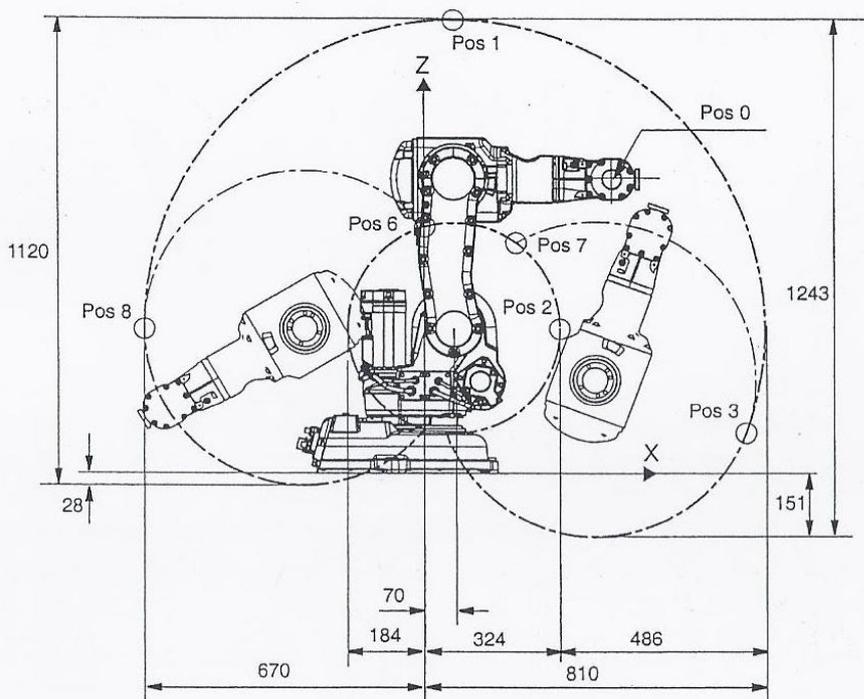
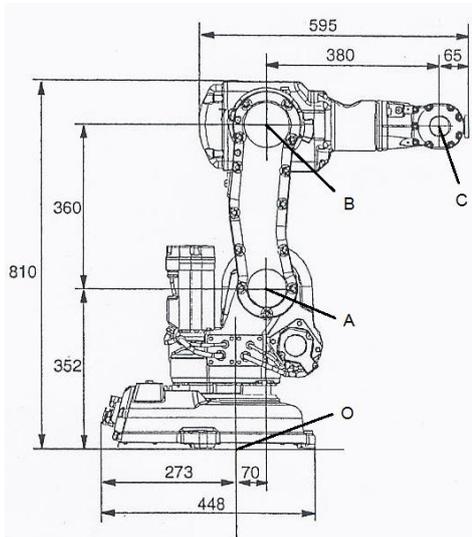
Positions au centre du poignet (mm)

pos.	X	Z
0	450	712
1	70	1092
2	314	421
3	765	99
6	1	596
7	218	558
8	-670	352

Angle (degrés)

pos.	axe 2	axe 3
0	0	0
1	0	-90
2	0	+50
3	110	-90
6	-90	+50
7	110	-230
8	-90	-90

Les positions extrêmes du bras du robot.



Schématisation du porteur



La schématisation du « porteur » (les 3 premiers axes) de ce robot fait apparaître les repères liés à ses « segments » (ou « bras », ou « solides ») de ce robot. Les 3 rotations successives seront notées  $\alpha, \beta, \gamma$  avec évidemment  $\alpha = \alpha(t), \beta = \beta(t), \gamma = \gamma(t)$ .

1 : Déterminer les vecteurs vitesses de rotation

$$\begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega}_{1/0} \\ \overrightarrow{\Omega}_{2/1} \quad \overrightarrow{\Omega}_{2/0} \\ \overrightarrow{\Omega}_{3/2} \quad \overrightarrow{\Omega}_{3/1} \quad \overrightarrow{\Omega}_{3/0} \end{array}$$

2 : Déterminer les vecteurs vitesses

$$\begin{array}{c} \overrightarrow{v(A)}_{1/0} \\ \overrightarrow{v(A)}_{2/1} \quad \overrightarrow{v(A)}_{2/0} \quad \overrightarrow{v(B)}_{2/1} \quad \overrightarrow{v(B)}_{2/0} \\ \overrightarrow{v(C)}_{3/2} \quad \overrightarrow{v(C)}_{3/1} \quad \overrightarrow{v(C)}_{3/0} \end{array}$$

3 : Enfin, en supposant que, dans la phase de mouvement qui nous intéresse (et qui sera de durée limitée), les vitesses de rotations aient des mesures algébriques constantes

$$\dot{\alpha} = \frac{d\alpha}{dt} = \omega_{1/0} \text{ (cste)} \quad \dot{\beta} = \frac{d\beta}{dt} = \omega_{2/1} \text{ (cste)} \quad \dot{\gamma} = \frac{d\gamma}{dt} = \omega_{3/2} \text{ (cste)}$$

Déterminer

$$\begin{array}{c} \overrightarrow{a(A)}_{1/0} \\ \overrightarrow{a(A)}_{2/1} \quad \overrightarrow{a(A)}_{2/0} \quad \overrightarrow{a(B)}_{2/1} \quad \overrightarrow{a(B)}_{2/0} \\ \overrightarrow{a(C)}_{3/2} \quad \overrightarrow{a(C)}_{3/1} \quad \overrightarrow{a(C)}_{3/0} \end{array}$$

**Réponse :**

En notant  $\overrightarrow{OA} = a \vec{i}_1 + d \vec{k}_0, \overrightarrow{AB} = b \vec{k}_2, \overrightarrow{BC} = c \vec{i}_3$

$$\overrightarrow{v(A)}_{1/0} = a \dot{\alpha} \vec{j}_1, \overrightarrow{v(B)}_{2/0} = a \dot{\alpha} \vec{j}_1 + b(\dot{\beta} \vec{i}_2 + \dot{\alpha} \sin(\beta) \vec{j}_1)$$

$$\overrightarrow{v(C)}_{3/0} = a \dot{\alpha} \vec{j}_1 + b(\dot{\beta} \vec{i}_2 + \dot{\alpha} \sin(\beta) \vec{j}_1) + c(-(\dot{\gamma} + \dot{\beta}) \vec{k}_3 + \dot{\alpha} \cos(\beta + \gamma) \vec{j}_1),$$

$$\overrightarrow{a(A)}_{1/0} = -a \dot{\alpha}^2 \vec{i}_1,$$

$$\overrightarrow{a(B)}_{2/0} = -a \dot{\alpha}^2 \vec{i}_1 + b(-\dot{\beta}^2 \vec{k}_2 + 2 \dot{\alpha} \dot{\beta} \cos(\beta) \vec{j}_1 - \dot{\alpha}^2 \sin(\beta) \vec{i}_1),$$

$$\overrightarrow{a(C)}_{3/0} = -a \dot{\alpha}^2 \vec{i}_1 + b(-\dot{\beta}^2 \vec{k}_2 + 2 \dot{\alpha} \dot{\beta} \cos(\beta) \vec{j}_1 - \dot{\alpha}^2 \sin(\beta) \vec{i}_1) + c(-(\dot{\gamma} + \dot{\beta})^2 \vec{i}_3 - 2 \dot{\alpha}(\dot{\gamma} + \dot{\beta}) \sin(\beta + \gamma) \vec{j}_1 - \dot{\alpha}^2 \cos(\beta + \gamma) \vec{i}_1)$$

## Chapitre 3 : géométrie des masses

On s'intéresse ici aux systèmes à masse conservative :  $\frac{dm}{dt} = 0$  donc  $m = cste$

### 1 : schématisation des systèmes matériels

#### 1.1 : système matériel discret

Le système est composé d'un nombre fini  $n$  de particules  $P_j$  de masse  $m_j$ .

La masse du système est :

$$m_S = \sum_{j=1}^n m_j$$

#### 1.2 : système continu à densité de masse

On note alors l'expression de la masse élémentaire :

$$\rho_1 \cdot dV = dm ; \rho_1 \text{ masse volumique (kg/m}^3\text{)}$$

$$\rho_2 \cdot dS = dm ; \rho_2 \text{ masse surfacique (kg/m}^2\text{)}$$

$$\rho_3 \cdot dL = dm ; \rho_3 \text{ masse linéique (kg/m)}$$

### 2 : centre de masse (cdm), noté très souvent G

#### 2.1 : système discret

$$\forall C, \quad m_S \overrightarrow{CG} = \sum_{j=1}^n \left[ m_j \overrightarrow{CP_j} \right]$$

#### 2.2 : système continu

$$\forall C, \quad m_S \overrightarrow{CG} = \int_{(S)} \overrightarrow{CP} dm$$

#### Remarques :

Nous pouvons projeter cette relation :

$$m_S x_G = \int_{(S)} x_P dm$$

Et 2 autres du même genre...

Nous pouvons dériver par rapport au temps :

$$m_S \overrightarrow{v(G)} = \sum_{j=1}^n \left[ m_j \overrightarrow{v(P_j)} \right] \qquad m_S \overrightarrow{v(G)} = \int_{(S)} \overrightarrow{v(P)} dm$$

encore une fois...

$$m_S \overrightarrow{a(G)} = \sum_{j=1}^n \left[ m_j \overrightarrow{a(P_j)} \right] \qquad m_S \overrightarrow{a(G)} = \int_{(S)} \overrightarrow{a(P)} dm$$

Et :

$$m_S \dot{\overrightarrow{x}}_G = \sum_{j=1}^n \left[ m_j \dot{\overrightarrow{x}}_{P_j} \right] \qquad m_S \ddot{\overrightarrow{z}}_G = \int_{(S)} \ddot{\overrightarrow{z}}_P dm$$

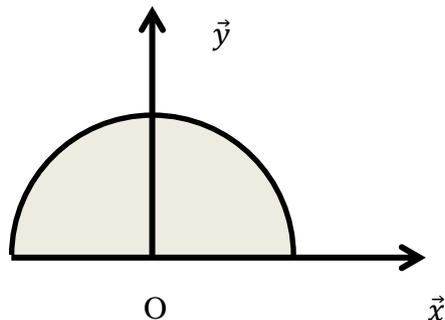
#### Exemples :

1 : calculer la position du cdm d'un demi disque homogène de rayon  $R$  et de masse  $m$

2 : calculer la position du cdm d'un cône homogène de rayon de base  $R$ , de hauteur  $H$  et de masse  $m$

Réponses :

1 :



Par symétrie, on peut dire que :  $\overrightarrow{OG} \Big|_{y_G}^0$ . Soit M un point quelconque du solide :  $\overrightarrow{OM} \Big|_{y_M}^0$

$$m \cdot y_G = \int y_M \cdot dm, \text{ avec } dm = \rho \cdot dS, \rho = \frac{2m}{\pi \cdot R^2}, dS = r dr d\theta \text{ (coordonnées cylindriques)},$$

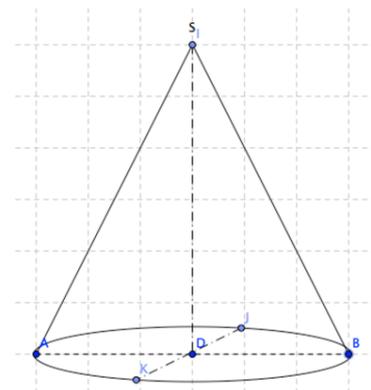
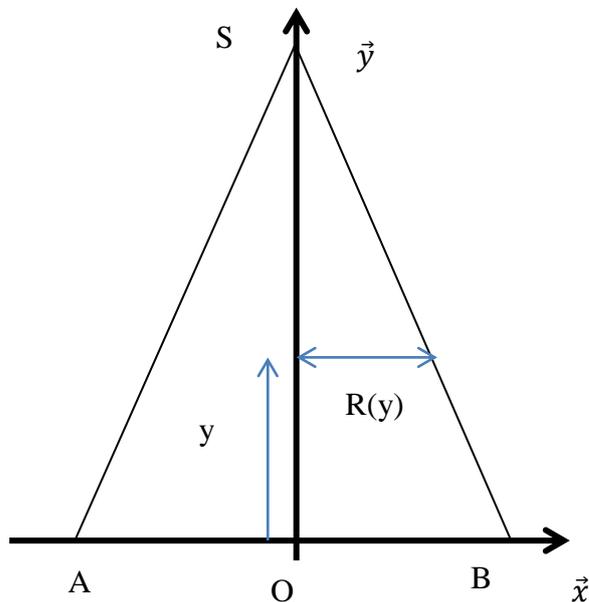
En coordonnées cylindriques :  $\overrightarrow{OM} = r \cdot \vec{e}_r$ , donc  $y_M = r \cdot \sin\theta$

$m \cdot y_G = \frac{2m}{\pi \cdot R^2} \iint r \cdot \sin\theta \cdot r dr d\theta$ , r et  $\theta$  sont indépendants car les bornes d'intégration de r (de 0 à R) ne dépendent pas de  $\theta$ , et les bornes d'intégration de  $\theta$  (de 0 à  $\pi$ ) ne dépendent pas de r. L'intégrale double se transforme donc en la multiplication de deux intégrales simples :

$$m \cdot y_G = \frac{2m}{\pi \cdot R^2} \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta \cdot d\theta$$

$$y_G = \frac{2}{\pi \cdot R^2} \frac{R^3}{3} * 2 = \frac{4}{3\pi} R$$

2 :



Par symétrie, on peut dire que :  $\overrightarrow{OG} \Big|_{y_G}^0$ . Soit M un point quelconque du solide :  $\overrightarrow{OM} \Big|_{y}^x$

$$m \cdot y_G = \int y \cdot dm, \text{ avec } dm = \rho \cdot dV, \rho = \frac{m}{V}, dV = r dr d\theta dy \text{ (coordonnées cylindriques)},$$

$$V = \int dV = \iiint r dr d\theta dy$$

Les variables r et z sont liées donc les intégrales sont imbriquées :  $R(y) = R(1 - \frac{y}{H})$



$$V = \int_0^H \left[ \int_0^{R(y)} r dr \right] dy \cdot \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi \int_0^H \frac{R(y)^2}{2} dy = \pi R^2 \int_0^H \left(1 - \frac{y}{H}\right)^2 dy = \pi R^2 \left[ -\frac{H}{3} \left(1 - \frac{y}{H}\right)^3 \right]_0^H$$

$$V = \frac{\pi R^2 H}{3}$$

Donc :

$$m \cdot y_G = \frac{3m}{\pi R^2 H} \int y \cdot dV = \frac{3m}{\pi R^2 H} \iiint y \cdot r \cdot dr \cdot d\theta \cdot dy$$

$$y_G = \frac{3}{\pi R^2 H} \int_0^H \left[ \int_0^{R(y)} r dr \right] y dy \cdot \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{3}{\pi R^2 H} 2\pi \int_0^H \frac{R(y)^2}{2} y dy = \frac{3 \cdot R^2}{R^2 H} \int_0^H \left(1 - \frac{y}{H}\right)^2 y dy$$

$$y_G = \frac{3}{H} \int_0^H \left( y - 2 \frac{y^2}{H} + \frac{y^3}{H^2} \right) dy$$

$$y_G = \frac{3}{H} \left[ \frac{y^2}{2} - 2 \frac{y^3}{3H} + \frac{y^4}{4H^2} \right]_0^H = \frac{H}{4}$$

**GEOMETRIE DES MASSES**  
**MOMENTS D'INERTIE, PRODUITS D'INERTIE**

La masse « *m* » seule ne permet pas de caractériser la difficulté à mettre un solide en mouvement. Dans le cas particulier où ce mouvement est une translation, la masse suffit, mais pour des mouvements plus complexes, la répartition de cette masse dans l'espace géométrique du solide est à retenir.

Deux quantités scalaires: le **moment d'inertie** (quantité positive ou négligeable) et le **produit d'inertie** (positif, négatif ou nul) caractérisent cette répartition. Ces deux quantités s'expriment en **Kg.m<sup>2</sup>** et nous allons détailler leurs propriétés.

**3 : Matrice d'inertie**

$$[I_S]_{O,R} = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ & B & -D \\ Sym & & C \end{bmatrix}_{O,R}$$

avec :

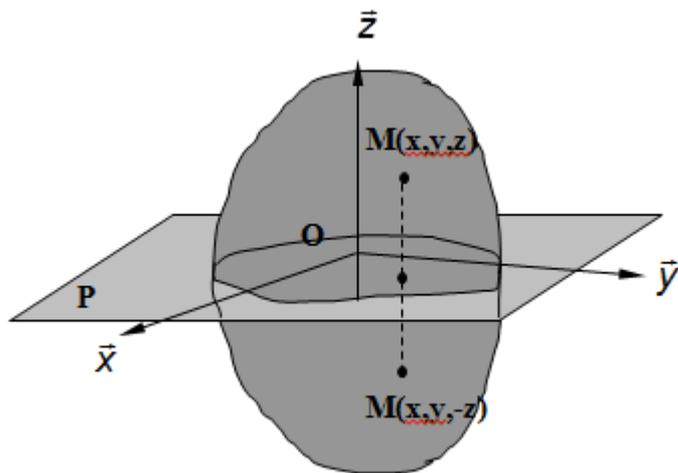
<p><b>A : moment d'inertie</b> du solide par rapport à <math>(O, \bar{x})</math> <math>A = \int (y^2 + z^2) dm</math></p> <p><b>B : moment d'inertie</b> du solide par rapport à <math>(O, \bar{y})</math> <math>B = \int (x^2 + z^2) dm</math></p> <p><b>C : moment d'inertie</b> du solide par rapport à <math>(O, \bar{z})</math> <math>C = \int (x^2 + y^2) dm</math></p>	<p><b>moment d'inertie</b> <math>\geq 0</math></p>
<p><b>D : produit d'inertie</b> par rapport au plan <math>(O, \bar{y}, \bar{z})</math> <math>D = \int yz dm</math></p> <p><b>E : produit d'inertie</b> par rapport au plan <math>(O, \bar{x}, \bar{z})</math> <math>E = \int xz dm</math></p> <p><b>F : produit d'inertie</b> par rapport au plan <math>(O, \bar{x}, \bar{y})</math> <math>F = \int xy dm</math></p>	<p><b>produit d'inertie</b>  <math>&lt; 0, = 0</math> ou <math>&gt; 0</math></p>

**Important : ces termes dépendent du repère de calcul (généralement lié au solide) !**

**Cas où le repère lié au solide admet un plan de symétrie matérielle**

*P est plan de symétrie matérielle de normale  $\vec{z}$  pour le solide.*

*On peut alors séparer l'intégrale sur (S), en une somme d'intégrales sur (S<sub>1</sub>) et (S<sub>2</sub>).*



On a :

$$E = \int_{S_1} x.z.dm + \int_{S_2} x.(-z).dm = 0$$

$$D = \int_{S_1} y.z.dm + \int_{S_2} y.(-z).dm = 0$$

$$[I_S]_{O,R} = \begin{bmatrix} A & -F & 0 \\ & B & 0 \\ Sym & & C \end{bmatrix}_{O,R}$$

**Cas où le repère lié au solide admet deux plans de symétrie matérielle**

Compte tenu du résultat précédent, si (S) admet deux plans de symétrie orthogonaux de normales, par exemple,  $\vec{x}$  et  $\vec{z}$ , alors :

$$[I_S]_{O,R} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ & B & 0 \\ Sym & & C \end{bmatrix}_{O,R}$$

**Tous les produits d'inertie sont nuls**

**Cas où le solide présente une symétrie de révolution**

Un solide de révolution d'axe  $\vec{z}$ , par exemple, admet au moins deux plans de symétrie perpendiculaires, donc les produits d'inertie sont nuls.

*Les axes  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$  jouent le même rôle du point de vue géométrique et du point de vue de la répartition des masses ! Par conséquent, les moments d'inertie A et B sont égaux*

$$[I_S]_{O,(-,-,\vec{z})} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ & A & 0 \\ Sym & & C \end{bmatrix}_{O,(-,-,\vec{z})}$$

**ce qui est vrai pour toute base contenant  $\vec{z}$ .**

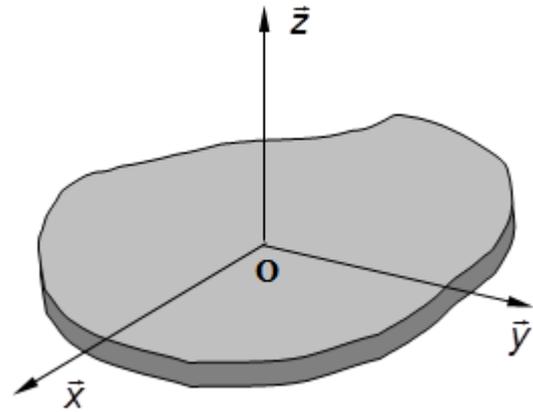
Et...  $C = \frac{A}{2} + \int_S z^2 dm$

**Cas où le solide est une plaque d'épaisseur négligeable (plaque mince)**

Si l'épaisseur suivant  $\vec{z}$  est négligeable devant les autres dimensions, alors  $z = 0$

Donc  $\mathbf{E} = \mathbf{D} = \mathbf{0}$  et  $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$

$$[I_S]_{O,R} = \begin{bmatrix} A & -F & 0 \\ & B & 0 \\ Sym & & A+B \end{bmatrix}_{O,R}$$



**MOMENT D'INERTIE PAR RAPPORT A UN AXE QUEL**

$$I_{(O, \vec{u})} = \vec{u}^{tr} [I_S]_{(O,R)} \vec{u}$$

**THEOREME DE HUYGHENS GENERALISE**

Le passage d'une matrice d'inertie définie en  $\mathbf{G}$ , centre d'inertie de  $\mathbf{S}$ , à la matrice d'inertie en  $\mathbf{O}$  s'écrit:

$$[I_S]_{O,R} = [I_S]_{G,R} + m \begin{bmatrix} b^2 + c^2 & -ab & -ac \\ & c^2 + a^2 & -bc \\ Sym & & a^2 + b^2 \end{bmatrix}$$

$a, b, c$  étant les coordonnées du centre de masse  $\mathbf{G}$  dans le repère lié au solide en  $\mathbf{O}$ .

**Remarque**

- les moments d'inertie  $A_G, B_G, C_G$  sont minimaux en  $\mathbf{G}$ .

**Important**

- le théorème de Huyghens ne permet pas de passer d'un point quelconque à un autre : passage obligé par  $\mathbf{G}$  !
- **Énoncé du théorème de Koenig** : l'opérateur d'inertie du solide  $\mathbf{S}$  de masse  $m$  calculé en  $\mathbf{O}$  = l'opérateur d'inertie de  $\mathbf{S}$  en  $\mathbf{G}$  + l'opérateur d'inertie calculé en  $\mathbf{O}$  appliqué à une masse ponctuelle  $m$  située en  $\mathbf{G}$ .
- C'est la même chose que Huyghens généralisé...

**Remarque : moments principaux d'inertie et repère principal d'inertie**

La matrice d'inertie est symétrique, donc diagonalisable. Ceci signifie qu'il existe, pour tout solide, un référentiel dans lequel les produits d'inertie  $D, E, F$  sont nuls. Les moments d'inertie  $A, B, C$  sont alors dits « principaux » et correspondent aux valeurs propres de la matrice. La base de ce référentiel principal correspond aux vecteurs propres associés.

Exemples :

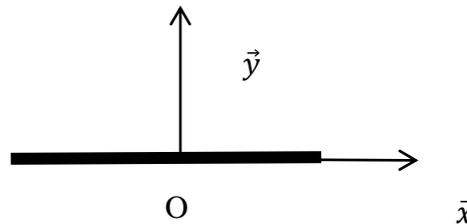
1 : calculer la matrice d'inertie d'une barre homogène de longueur  $2L$  et de masse  $m$  en son centre  $O$  dans le repère  $R(O; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  lié à la barre tel que la barre soit portée par  $(O; \vec{x})$

2 : calculer la matrice d'inertie d'un demi disque homogène de rayon  $R$  et de masse  $m$  en son cdm  $G$  dans le repère  $R(O; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  lié au solide tel que  $\vec{OG}$  soit porté par  $(O; \vec{y})$

3: calculer la matrice d'inertie d'un cône homogène de rayon  $R$ , de hauteur  $H$  et de masse  $m$  au centre de sa base  $O$  dans le repère  $R(O; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  lié au solide tel que  $\vec{OG}$  soit porté par  $(O; \vec{z})$

Réponses :

1:



Le solide possède un axe de symétrie de révolution  $(O; \vec{x})$  donc la matrice est diagonale et  $B=C$

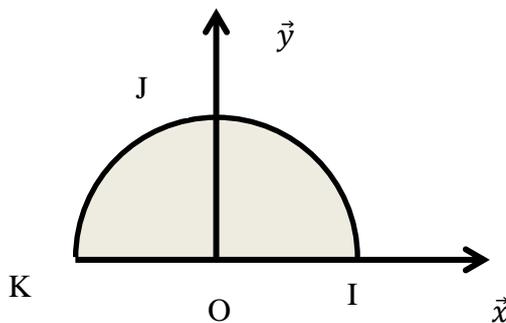
$$A = \int (y^2 + z^2) dm, \text{ avec } y = z = 0 \text{ car le solide est filaire donc } A=0$$

$$B = \int (x^2 + z^2) dm, \text{ avec } dm = \rho dx, \rho = \frac{m}{2L}$$

$$B = \frac{m}{2L} \int_{-L}^L x^2 dx = \frac{mL^2}{3} = C,$$

$$[I_{(O,S)}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mL^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mL^2}{3} \end{pmatrix}_R$$

2 :



$$OG = \frac{4R}{3\pi}$$

Le solide possède deux plans de symétrie :  $(O; \vec{x}; \vec{y})$  et  $(O; \vec{z}; \vec{y})$  donc la matrice est diagonale.

C'est un solide surfacique donc  $z=0$

Calculons la matrice d'inertie en  $O$  pour commencer

$$A = \int (y^2) dm; dm = \rho \cdot dS; \rho = \frac{2m}{\pi R^2}; dS = r dr d\theta; y = r \sin\theta$$

$$A = \frac{2m}{\pi R^2} \iint (r \sin\theta)^2 r dr d\theta = \frac{2m}{\pi R^2} \int_0^R r^3 dr \int_0^\pi (\sin\theta)^2 d\theta$$

$$A = \frac{2m}{\pi R^2} \int_0^R r^3 dr \int_0^\pi \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} d\theta = \frac{2m}{\pi R^2} \frac{R^4}{4} \frac{\pi}{2} = \frac{mR^2}{4}$$

Or pour le quart de disque (OIJ):  $A = B = \frac{mR^2}{8}$

Donc pour le demi disque :  $B = \frac{mR^2}{4}$  (2 quarts de disque !)

$$C = \int (x^2 + y^2) dm = A + B = \frac{mR^2}{2}$$

Remarque :

On pouvait commencer par C (plus facile)

$$C = \int (x^2 + y^2) dm = \int r^2 dm = \frac{2m}{\pi R^2} \int_0^R r^3 dr \int_0^\pi d\theta = \frac{mR^2}{2}$$

Puis on remarquait que  $C = A + B$  avec  $A = B$

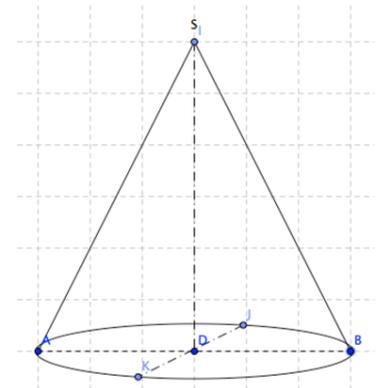
Matrice d'inertie en G : on applique Huygens

$$[I_{(G,S)}] = [I_{(O,S)}] - \left\{ \begin{array}{ccc} m \left( \frac{4R}{3\pi} \right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m \left( \frac{4R}{3\pi} \right)^2 \end{array} \right\}_R$$

3 :

(O;  $\vec{z}$ ) est un axe de symétrie de révolution donc la matrice d'inertie du cône calculée en O est diagonale et A=B

$$[I_{(O,S)}] = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_R$$



Calcul de C

$$C = \int (x^2 + y^2) dm, dm = \rho dV, \rho = \frac{m}{V}, V = \frac{\pi R^2 H}{3}, dV = r dr d\theta dz, x^2 + y^2 = r^2$$

Les variables r et z sont liées donc les intégrales sont imbriquées :  $R(z) = R(1 - \frac{z}{H})$

$$C = \rho \int_0^H \left[ \int_0^{R(z)} r^3 dr \right] dz \cdot \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi\rho \int_0^H \frac{R(z)^4}{4} dz = \frac{3mR^2}{2H} \int_0^H \left(1 - \frac{z}{H}\right)^4 dz$$

$$C = \frac{3mR^2}{2H} \left[ -\frac{H}{5} \left(1 - \frac{z}{H}\right)^5 \right]_0^H = \frac{3mR^2}{10}$$

Calcul de A :

$$A = \int (z^2 + y^2) dm, \text{ par symétrie } \int y^2 dm = \int x^2 dm = \frac{C}{2}$$

Donc  $A = \int z^2 dm + \frac{C}{2}$ , on pose  $K = \int z^2 dm$

$$K = \rho \int_0^H \left[ \int_0^{R(z)} r dr \right] z^2 dz \cdot \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi\rho \int_0^H \frac{R(z)^2}{2} z^2 dz = \frac{3m}{H} \int_0^H \left(1 - \frac{z}{H}\right)^2 z^2 dz$$

$$K = \frac{3m}{H} \int_0^H \left( z^2 - \frac{2z^3}{H} + \frac{z^4}{H^2} \right) dz = \frac{3m}{H} \left[ \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{2H} + \frac{z^5}{5H^2} \right]_0^H = \frac{mH^2}{10}$$

$$A = \frac{3mR^2}{20} + \frac{mH^2}{10}$$

## Chapitre 4 : Principe Fondamental de la Dynamique Énoncé

### 1 : Torseur cinétique – torseur dynamique

#### Définitions

**Torseur cinétique** : torseur associé au champ de vitesses du solide S.

$$[L_{S/0}]_C = \left[ \begin{array}{c} \overrightarrow{p_{S/0}} \\ \overrightarrow{L_{S/0C}} \end{array} \right]_C$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{p_{S/0}} &= \int \overrightarrow{v(P)}_{S/0} dm \\ \overrightarrow{p_{S/0}} &= m \overrightarrow{v(G)}_{S/0} \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{L_{S/0C}} = \int \overrightarrow{CP} \wedge \overrightarrow{v(P)}_{S/0} dm$$

**Torseur dynamique** : torseur associé au champ des accélérations du solide S.

$$[N_{S/0}]_C = \left[ \begin{array}{c} \overrightarrow{D_{S/0}} \\ \overrightarrow{N_{S/0C}} \end{array} \right]_C$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{D_{S/0}} &= \int \overrightarrow{a(P)}_{S/0} dm \\ \overrightarrow{D_{S/0}} &= m \overrightarrow{a(G)}_{S/0} \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{N_{S/0C}} = \int \overrightarrow{CP} \wedge \overrightarrow{a(P)}_{S/0} dm$$

#### Relation entre les résultantes cinétique et dynamique

Système à masse conservative

$$\overrightarrow{D(S/0)} = \frac{d^{(0)} \overrightarrow{p(S/0)}}{dt}$$

#### Relation entre les moments cinétique et dynamique

$$\overrightarrow{N(S/0)_C} = \frac{d^{(0)} \overrightarrow{L(S/0)_C}}{dt} + \overrightarrow{v(C)}_{/0} \wedge \overrightarrow{p(S/0)}$$

**Remarques** : si C est fixe dans  $R_0$  ou si  $C = G$  :

$$\overrightarrow{N(S/0)_C} = \frac{d^{(0)} \overrightarrow{L(S/0)_C}}{dt}$$

**Système de solides**

Appelons  $\Sigma$  un système de  $n$  solides

$$\Sigma = \bigcup_{i=1}^n S_i$$

$$\vec{L}_{S0C} = \int_{\Sigma} \left[ \vec{CP} \wedge \vec{v}(P)_{S0} dm \right] = \sum_{i=1}^n \left[ \int_{S_i} \vec{CP} \wedge \vec{v}(P)_{S0} dm \right]$$

Le moment cinétique (dynamique) d'un système de solides s'obtient en sommant les moments cinétiques (dynamiques) de chaque solide, calculés en un même point.

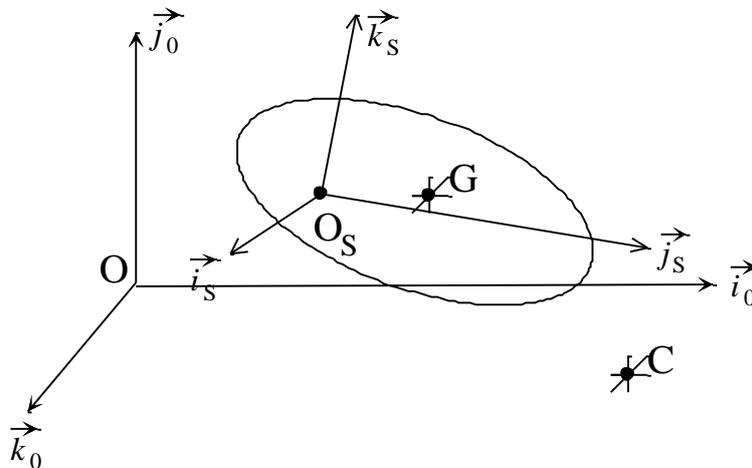
**2 : calcul du moment cinétique en pratique**

Notations : solide  $S$ , centre de masse  $G$ ,  $R_0$  repère fixe (galiléen),  $R_S$  repère lié à  $S$  et dont l'origine est le point  $O_S$  (point de calcul de la matrice d'inertie).

La forme la plus générale pour l'écriture du moment cinétique en un point  $C$  (quelconque) est

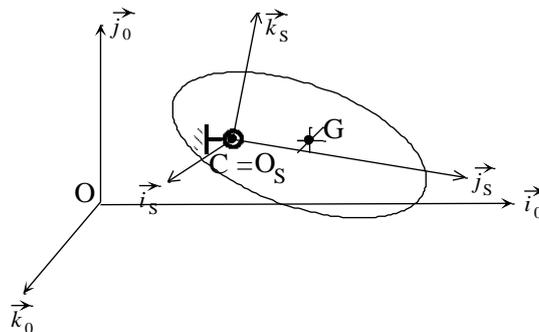
$$\vec{L}_{S0C} = m \vec{CG} \wedge \vec{v}(O_S)_{S0} + m \vec{CO}_S \wedge (\vec{\Omega}_{S0} \wedge \vec{O}_S G) + [I_{O_S}] \vec{\Omega}_{S0}$$

formule peu utile, voir cas particuliers



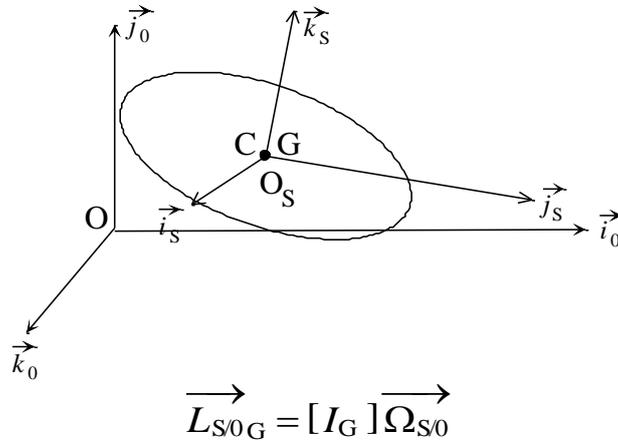
**Cas particuliers : (toujours se placer dans ces cas)**

Si le solide ( $S$ ) possède un point fixe dans  $R_0$  :  $C$  est confondu avec  $O_S$ , fixe dans  $R_0$



$$\vec{L}_{S0O_S} = [I_{O_S}] \vec{\Omega}_{S0}$$

**Sinon on passe par le centre de masse (puis BABAR) : C est confondu avec O<sub>S</sub>, confondu avec G...**



**Ce qu'il faut retenir pour calculer le moment dynamique d'un solide (S) en A :**

**Se poser la question : (S) possède t'il un point fixe O dans R<sub>0</sub> ?**

Si oui : on peut passer par ce point fixe

$$\vec{N}_A = \vec{N}_O + \vec{AO} \wedge m \vec{a}_G; \vec{N}_O = \left. \frac{d\vec{L}_O}{dt} \right|_{R_0}; \vec{L}_O = [I_{(O,S)}] \vec{\Omega}_{S/0}$$

Si non : on passe par G le centre de masse de (S) (toujours vrai, avec ou sans point fixe)

$$\vec{N}_A = \vec{N}_G + \vec{AG} \wedge m \vec{a}_G; \vec{N}_G = \left. \frac{d\vec{L}_G}{dt} \right|_{R_0}; \vec{L}_G = [I_{(G,S)}] \vec{\Omega}_{S/0}$$

## 2 : Principe Fondamental de la Dynamique – PFD

Dans un repère galiléen  $R_0$  ou assimilé (repère dit fixe ou de référence), le torseur en C (point quelconque) des efforts extérieurs appliqués au système  $\Sigma$  est égal au torseur dynamique en C de  $\Sigma$  par rapport à  $R_0$ .

$$[F_{ext/\Sigma}]_C = [N_{\Sigma/0}]_C$$

Ou

**Théorème de la résultante dynamique**

$$\overrightarrow{F_{ext/\Sigma}} = \overrightarrow{D_{\Sigma/0}}$$

**Théorème du moment dynamique**

$$\overrightarrow{M_{ext/\Sigma}}_C = \overrightarrow{N_{\Sigma/0}}_C$$

**Remarques :**

- 1. Tout espace en translation rectiligne uniforme par rapport à un espace galiléen est galiléen.
- 2. Espaces galiléens

Espace de Copernic

origine : centre de masse du système solaire,

axes : définis par des étoiles très lointaines.

C'est un excellent espace galiléen pour étudier les mouvements qui se produisent au voisinage du système solaire.

Pour les mouvements terrestres, le sol sera notre référence (assimilé galiléen).

### 2 : choix des équations du PFD pour obtenir les équations de mouvement

A : Toute étude dynamique d'un système commence par le choix d'un repère de référence galiléen.

B : Ensuite, il faut fixer, à chaque sous ensemble cinématique constituant le système, un repère.

C : Les paramètres de position apparaissent alors : ils permettent de passer d'un repère à un autre.

D : Une dernière étape consiste à déterminer les éventuelles relations entre les paramètres de position.

**Il y a autant d'équations de mouvement à déterminer qu'il existe de paramètres de position indépendants.**

La mise en place des paramètres – afin d'éviter les erreurs de signes - se fera de la façon suivante :

- un paramètre de translation sera toujours représenté positif sur le schéma (sa valeur est algébrique)
- un paramètre angulaire sera toujours représenté (de préférence petit) compris entre 0 et  $\pi/2$  (sa valeur est algébrique)

Nous ne sommes pas toujours obligés de développer toutes les équations qu'offre le PFD (6, pour chaque système matériel isolé).

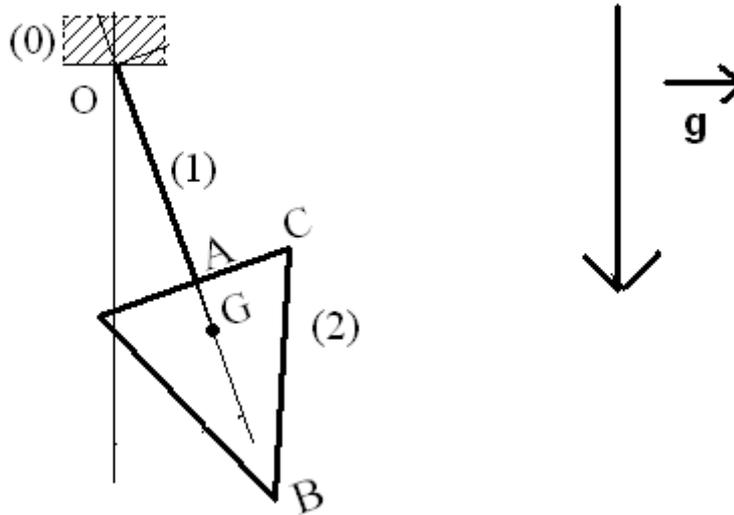
**Le choix des équations à développer se fait à partir des paramètres indépendants :**

Pour un paramètre de **translation** suivant un axe  $\vec{u}$  positionnant les solides (S1) et (S2), on écrira l'**équation de la résultante** en projection sur  $\vec{u}$ , et en isolant les solides (S1) et (S2)

Pour un paramètre de **rotation** autour d'un axe  $\vec{u}$  positionnant les solides (S1) et (S2), on écrira l'**équation des moments** en projection sur  $\vec{u}$ , et en isolant les solides (S1) et (S2)

### 1. Un pendule

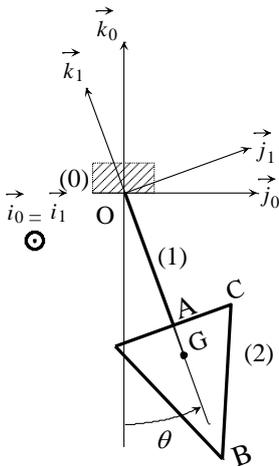
... est constitué d'une barre OA notée (1), de longueur  $H$  ( $OA = H$ ) et de masse  $m_1$ , et d'un cône noté (2), de hauteur  $H$  ( $AB = H$ ), de rayon de base  $R$  ( $AC = R$ ), et de masse  $m_2$ . La liaison entre ces 2 solides est un encastrement au point A. (S) (ensemble  $\{(1),(2)\}$ ) est en liaison pivot en O par rapport au bâti (0). G cdm de (1) et(2),  $OG = a$ .



Déterminer l'équation du mouvement à partir du PFD.

Correction :

Repères-paramétrage :

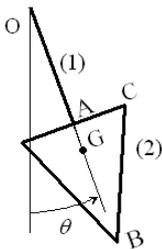


Le paramètre de position  $\theta(t)$  est un paramètre de rotation autour de  $(O, \vec{l}_1)$ , il positionne (1) et (2) donc :

**Equation du moment en projection sur  $\vec{l}_1$  en isolant (1) et (2).**

Point de calcul ?

**Bilan des actions mécaniques extérieures : BAME.** On isole (1) et (2) :



liaison pivot en O :  $\{Pivot_{0/1}\} = \begin{Bmatrix} X & 0 \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_{(O,R_0)}$  poids en G :  $\{Poids\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -mg & 0 \end{Bmatrix}_{(G,R_0)}$   $m = m_1 + m_2$

Le point de calcul des moments doit être sur  $(O, \vec{l}_1)$ , sinon Y et Z vont apparaître dans l'équation (inconnues de liaison). On choisit donc le point O.

$$\vec{M}_0 \cdot \vec{l}_1 = \vec{N}_{0 \in (1 \cup 2)} \cdot \vec{l}_1$$

Calcul de  $\vec{M}_0 \cdot \vec{l}_1$  :  $\vec{M}_0 \cdot \vec{l}_1 = 0 + (\vec{OG} \wedge -mg\vec{k}_0) \cdot \vec{l}_1 = -amg \cdot \sin\theta$

**Bilan des quantités d'accélération : BQA**

Calcul de  $\vec{N}_{0 \in (1 \cup 2)} \cdot \vec{l}_1$  :

$$\vec{N}_{0 \in (1 \cup 2)} = \vec{N}_{0 \in 2} + \vec{N}_{0 \in 1}$$

Le point  $0 \in (1)$  est fixe dans  $R_0$  donc :  $\vec{N}_{0 \in 1} = \left. \frac{d \vec{L}_{0 \in 1}}{dt} \right|_{R_0}$  ; et

$$\vec{L}_{0 \in 1} = [I_{(O, S_1)}] \cdot [\Omega_{S_1/0}] = \begin{Bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}_{R_1} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_{R_1} = A_1 \dot{\theta} \vec{l}_1, \vec{N}_{0 \in 1} = A_1 \ddot{\theta} \vec{l}_1$$

Le point  $0 \in (2)$  est fixe dans  $R_0$  donc :  $\vec{N}_{0 \in 2} = \left. \frac{d \vec{L}_{0 \in 2}}{dt} \right|_{R_0}$  ;

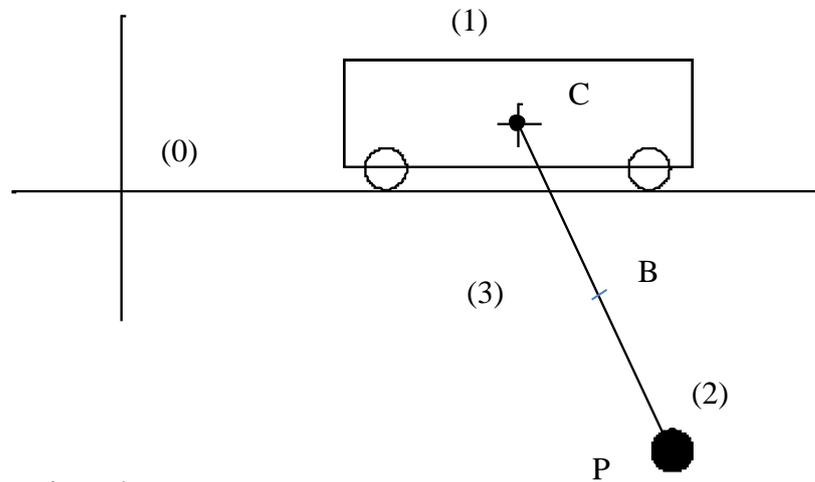
$$\vec{L}_{0 \in 2} = [I_{(O, S_2)}] \cdot [\Omega_{S_2/0}] = \begin{Bmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{Bmatrix}_{R_1} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_{R_1} = A_2 \dot{\theta} \vec{l}_1, \vec{N}_{0 \in 2} = A_2 \ddot{\theta} \vec{l}_1$$

**Equation du mouvement :**

$$(A_1 + A_2) \ddot{\theta} = -amg \cdot \sin\theta$$

**Le chariot de grue** (mouvement horizontal)

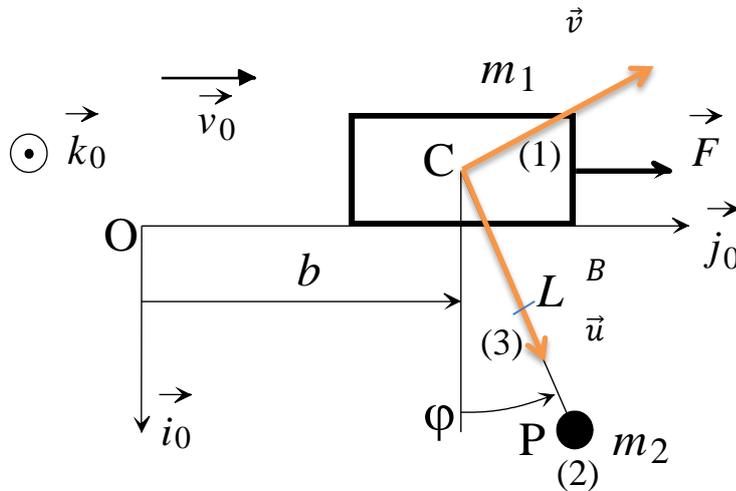
Un chariot de grue (1) (cdm C, masse  $m_1$ ) se déplace sur un bras fixe horizontal (0) (frottements négligés). Une charge (P) ponctuelle (2) (point P, masse  $m_2$ ) se balance au bout d'un câble modélisé par une barre (3) (longueur  $L$ , masse  $m_3$ , cdm B) en liaison pivot sans frottement avec (1) en C. Une force  $F$  horizontale constante tracte (1) vers la droite.



Ecrire les équations de mouvement

Solution :

Repères et paramétrage :



Paramètres de position :  $b(t) = \overrightarrow{OC} \cdot \vec{j}_0$ ,  $\varphi(t) = (\vec{j}_0, \vec{u})$ ,

**Equation liée à  $b(t)$  :**

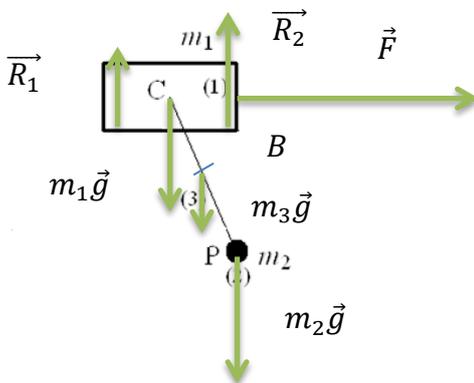
Paramètre de translation suivant  $\vec{j}_0$  positionnant (1)U(2)U(3) :

$$(\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2 + \mathbf{m}_3)\overrightarrow{a_G} \cdot \vec{j}_0 = \overrightarrow{F_{ext/(1U2U3)}} \cdot \vec{j}_0$$

BAME :

Calcul de  $\overrightarrow{F_{ext/(1U2U3)}} \cdot \vec{j}_0$  :

On isole (1)U(2)U(3)



$\vec{R}_1$  et  $\vec{R}_2$  réactions des roues sur (1),  $m_i \vec{g}$  les 3 poids et  $\vec{F}$  force de traction, donc :

$$\overrightarrow{F_{ext/(1U2U3)}} \cdot \vec{j}_0 = F$$

BQA :

Calcul de  $(\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2 + \mathbf{m}_3)\overrightarrow{a_G} \cdot \vec{j}_0$  :

$$(\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2 + \mathbf{m}_3)\overrightarrow{a_G} \cdot \vec{j}_0 = (\mathbf{m}_1 \overrightarrow{a_C} + \mathbf{m}_2 \overrightarrow{a_P} + \mathbf{m}_3 \overrightarrow{a_B}) \cdot \vec{j}_0 ;$$

$$\overrightarrow{a_C} \cdot \vec{j}_0 = \ddot{b},$$

$$\overrightarrow{OP} = cte. \vec{i}_0 + b. \vec{j}_0 + L. \vec{u}, \quad \overrightarrow{v_{PE2/0}} = \dot{b} \vec{j}_0 + L \dot{\varphi} \vec{v}, \quad \overrightarrow{a_{PE2/0}} = \ddot{b} \vec{j}_0 + L \ddot{\varphi} \vec{v} - L \dot{\varphi}^2 \vec{u},$$

$$\overrightarrow{a_{PE2/0}} \cdot \vec{j}_0 = \ddot{b} + L(\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi),$$

$$\overrightarrow{OB} = cte. \vec{i}_0 + b. \vec{j}_0 + \frac{L}{2}. \vec{u}, \quad \overrightarrow{v_{BE3/0}} = \dot{b} \vec{j}_0 + \frac{L}{2} \dot{\varphi} \vec{v}, \quad \overrightarrow{a_{BE3/0}} = \ddot{b} \vec{j}_0 + \frac{L}{2} \ddot{\varphi} \vec{v} - \frac{L}{2} \dot{\varphi}^2 \vec{u},$$

$$\overrightarrow{a_{BE3/0}} \cdot \vec{j}_0 = \ddot{b} + \frac{L}{2}(\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi),$$

$$\text{Equation liée à } b(t) : (\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2 + \mathbf{m}_3)\ddot{b} + \left(\mathbf{m}_2 + \frac{\mathbf{m}_3}{2}\right)L(\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi) = F$$

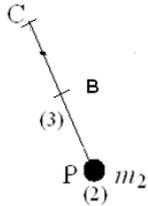
**Equation liée à  $\varphi(t)$  :**

Paramètre de rotation suivant  $\vec{k}_0$  positionnant (2)U(3) :

Equation du moment en projection sur  $\vec{k}_0$  en isolant (2)U(3).

Point de calcul ?

On isole (2)U(3) :



Pivot en C, poids en B et en P, donc on calcule les moments en C

$$\overrightarrow{M_C} \cdot \vec{k}_0 = \overrightarrow{N_{C \in (2)U(3)}} \cdot \vec{k}_0$$

**Calcul de  $\overrightarrow{M_C} \cdot \vec{k}_0$**

$$\overrightarrow{M_C} \cdot \vec{k}_0 = 0 + (\overrightarrow{CB} \wedge m_3 g \vec{u}_0 + \overrightarrow{CP} \wedge m_2 g \vec{u}_0) \cdot \vec{k}_0 = -Lg \cdot \sin\varphi \left( m_2 + \frac{m_3}{2} \right)$$

**Calcul de  $\overrightarrow{N_{C \in (2)U(3)}} \cdot \vec{k}_0$**

$$\overrightarrow{N_{C \in (2)U(3)}} \cdot \vec{k}_0 = \overrightarrow{N_{CE2}} \cdot \vec{k}_0 + \overrightarrow{N_{CE3}} \cdot \vec{k}_0,$$

$\overrightarrow{N_{CE3}} \cdot \vec{k}_0$  :

CE3 n'est pas fixe dans  $R_0$ , donc on passe par le cdm de (3) : B

$$\overrightarrow{N_{CE3}} \cdot \vec{k}_0 = (\overrightarrow{N_{BE3}} + \overrightarrow{CB} \wedge m_3 \overrightarrow{a_{BE3/0}}) \cdot \vec{k}_0$$

$$\overrightarrow{N_{BE3}} \cdot \vec{k}_0 = \left. \frac{d\overrightarrow{L_{BE3}}}{dt} \right|_{R_0} \cdot \vec{k}_0 = \left. \frac{d(\overrightarrow{L_{BE3}} \cdot \vec{k}_0)}{dt} \right|_{R_0} \text{ car } \vec{k}_0 \text{ fixe dans } R_0$$

$$\overrightarrow{L_{BE3}} = [I_{(B,S_3)}] \cdot [\Omega_{S_3/0}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_3 L^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_3 L^2}{12} \end{pmatrix}_{R_1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix}_{R_1} = \frac{m_3 L^2}{12} \dot{\varphi} \vec{k}_0,$$

$$\overrightarrow{L_{BE3}} \cdot \vec{k}_0 = \frac{m_3 L^2}{12} \dot{\varphi}, \quad \overrightarrow{N_{BE3}} \cdot \vec{k}_0 = \frac{m_3 L^2}{12} \ddot{\varphi},$$

Par permutation circulaire dans le produit mixte :

$$(\overrightarrow{CB} \wedge m_3 \overrightarrow{a_{BE3/0}}) \cdot \vec{k}_0 = \left( \vec{k}_0 \wedge \frac{L}{2} \vec{u} \right) \cdot m_3 \overrightarrow{a_{BE3/0}} = \frac{L}{2} \vec{v} \cdot m_3 (\ddot{b} \vec{J}_0 + \frac{L}{2} \dot{\varphi} \vec{v} - \frac{L}{2} \dot{\varphi}^2 \vec{u}) = \frac{L m_3}{2} (\ddot{b} \cos\varphi + \frac{L}{2} \dot{\varphi}^2),$$

$$\text{Donc } \overrightarrow{N_{CE3}} \cdot \vec{k}_0 = \frac{L m_3}{2} \ddot{b} \cos\varphi + \frac{m_3 L^2}{3} \dot{\varphi}^2$$

$\overrightarrow{N_{CE2}} \cdot \vec{k}_0$  :

CE2 n'est pas fixe dans  $R_0$ , donc on passe par le cdm de (2) : P

$$\overrightarrow{N_{CE2}} \cdot \vec{k}_0 = (\overrightarrow{N_{PE2}} + \overrightarrow{CP} \wedge m_2 \overrightarrow{a_{PE2}}) \cdot \vec{k}_0,$$

$$\overrightarrow{N_{PE2}} \cdot \vec{k}_0 = \left. \frac{d\overrightarrow{L_{PE2}}}{dt} \right|_{R_0} \cdot \vec{k}_0, \quad \overrightarrow{L_{PE2}} = [I_{(P,S_2)}] \cdot [\Omega_{S_2/0}], \quad [I_{(P,S_2)}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{R_1} \text{ car P masse ponctuelle}$$

Donc  $\overrightarrow{N_{PE2}} \cdot \vec{k}_0 = 0$

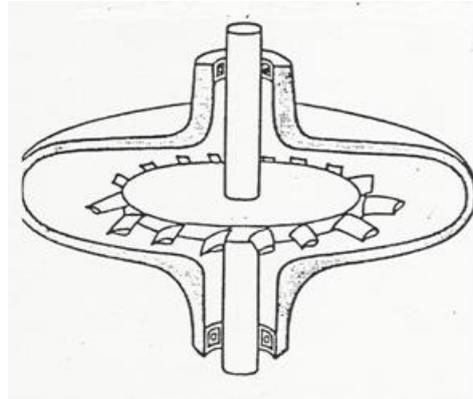
$$\overrightarrow{N_{CE2}} \cdot \vec{k}_0 = (\overrightarrow{CP} \wedge m_2 \overrightarrow{a_{PE2}}) \cdot \vec{k}_0 = (\ddot{b} \cos\varphi + L \dot{\varphi}^2) L m_2,$$

Equation liée à  $\varphi(t)$  :

$$\left( \frac{m_3}{2} + m_2 \right) L \ddot{b} \cos\varphi + \left( \frac{m_3}{3} + m_2 \right) \dot{\varphi} L^2 = -Lg \cdot \sin\varphi \left( m_2 + \frac{m_3}{2} \right)$$

**Pale de turbine**

On se propose d'étudier l'allure des phénomènes de résonance qui pourraient se produire dans une structure de type machine tournante, en utilisant un modèle très simplifié.



Le rotor (1) de la machine est représenté par un solide de révolution. H désigne son centre de masse. On note  $M$  sa masse et  $I$  son moment d'inertie par rapport à son axe.

La liaison entre le stator et le rotor est de type **pivot glissant parfait** à laquelle se superpose une raideur axiale : le rotor peut se déplacer en translation verticale autour d'une position moyenne correspondant à H en O - le rappel vers cette position est schématisé par un ressort linéaire de raideur  $K$  et de longueur à vide nulle (l'écrasement du ressort en statique compense le poids de l'ensemble : on met à zéro longueur à vide et poids du système !)

Simultanément, un moteur exerce sur (1) un couple  $C_m(t)$ , imposant une rotation uniforme autour de l'axe du rotor vertical, de vitesse angulaire  $\Omega = \dot{\varphi} = cte$  ( $\Omega > 0$ ).

$N$  solides identiques ( $P_k$ ), appelés pales, sont reliés au rotor (1) de la machine, de façon identique, en des points  $A_k$  régulièrement répartis sur une circonférence, de centre H, et de rayon  $R$ .

Afin de modéliser la flexion des pales sous charge, on remplace la liaison encastrement avec le rotor par une liaison pivot d'axe orthoradial en  $A_k$ , couplé à un ressort de torsion de même axe au même point, de raideur  $C$  tel que la pale reste horizontale au repos.

Dans notre étude simplifiée, on considère (1) muni d'une seule pale (P) et le point A associé.

G est le centre de masse de (P), et  $AG = L$  (constante positive)

On néglige le moment d'inertie de la pale autour de AG (deuxième axe ici), ce qui amène à prendre une matrice d'inertie en G sous une forme simple :

$$[I_{G,pale}] = \begin{bmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_p \end{bmatrix}_{(G,R_{pale})}$$

Et on désigne par  $m$  la masse de la pale.

De plus, des forces dues à l'action du fluide s'opposent au mouvement de la pale (P) par rapport à  $R_0$ . Cet ensemble de forces est considéré comme équivalent à une seule force continuellement appliquée en G :

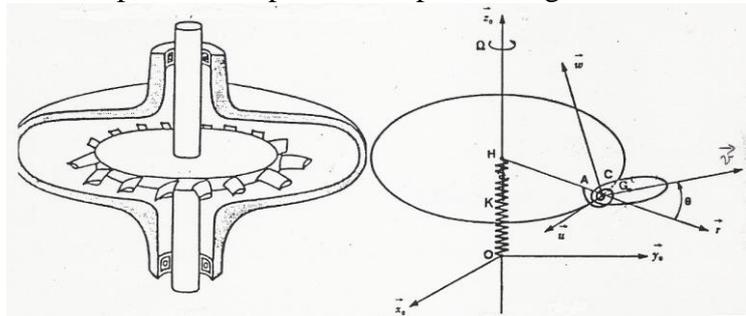
$$\vec{F}_{fl} = -b \vec{v}(G)_{P/O}$$

où  $b$  désigne une constante positive

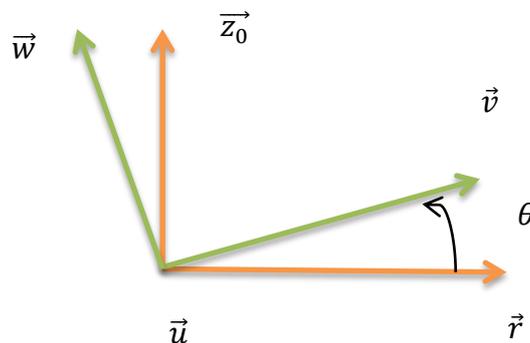
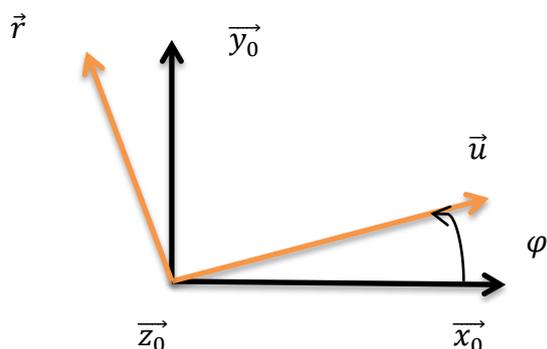
Déterminer les équations du mouvement du système.

## Résolution du problème :

Mise en place des repères et du paramétrage :



$$\vec{OH} = z(t)\vec{z}_0, \vec{HA} = R\vec{r}, \vec{AG} = L\vec{v}$$



3 paramètres de position, donc 3 équations de mouvement :

**Equation relative à  $\varphi(t)$  :**

$$\dot{\varphi} = cte \text{ donc } \varphi(t) = \Omega \cdot t + \varphi_0$$

**Equation relative à  $z(t)$  :**

$$(m + M)\vec{a}_B \cdot \vec{z}_0 = \vec{F}_{ext/(PUR)} \cdot \vec{z}_0, \text{ avec B cdm de l'ensemble Pale + Rotor}$$

Calcul de  $(m + M)\vec{a}_B \cdot \vec{z}_0$  :

$$(m + M)\vec{a}_{BE(PUR)/R_0} \cdot \vec{z}_0 = (m\vec{a}_{GEP} + M\vec{a}_{HER}) \cdot \vec{z}_0$$

$$\frac{\vec{a}_{HER}}{R_0} \cdot \vec{z}_0 = \ddot{z},$$

$$\vec{OG} = z(t)\vec{z}_0 + R\vec{r} + L\vec{v}, \quad \frac{\vec{v}_{GEP}}{R_0} = \dot{z}\vec{z}_0 - R\Omega\vec{u} + L(\dot{\theta}\vec{w} - \Omega\cos\theta\vec{u}) = \dot{z}\vec{z}_0 - \Omega(R + L\cos\theta)\vec{u} + L\dot{\theta}\vec{w},$$

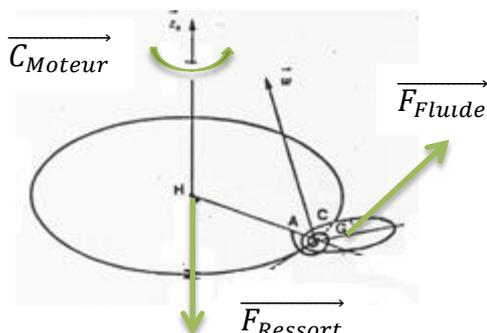
$$\frac{\vec{a}_{GEP}}{R_0} = \ddot{z}\vec{z}_0 + \Omega\dot{\theta}L\sin\theta\vec{u} - \Omega^2(R + L\cos\theta)\vec{r} + L\ddot{\theta}\vec{w} + L\dot{\theta}(-\dot{\theta}\vec{v} + \Omega\sin\theta\vec{u}), \left(\frac{d\vec{w}}{dt}\right)_{R_0} = -\dot{\theta}\vec{v} + \Omega\sin\theta\vec{u},$$

$$\frac{\vec{a}_{GEP}}{R_0} = \ddot{z}\vec{z}_0 + 2\Omega\dot{\theta}L\sin\theta\vec{u} - \Omega^2(R + L\cos\theta)\vec{r} + L\ddot{\theta}\vec{w} - L\dot{\theta}^2\vec{v},$$

$$(m + M)\vec{a}_{BE(PUR)/R_0} \cdot \vec{z}_0 = (m + M)\ddot{z} + m(L\ddot{\theta}\cos\theta - L\dot{\theta}^2\sin\theta),$$

Calcul de  $\vec{F}_{ext/(PUR)} \cdot \vec{z}_0$

On isole  $(P)U(R)$  : bilan des efforts extérieurs (poids négligés)



$$\vec{F}_{ext/(PUR)} \cdot \vec{z}_0 = (\vec{F}_{Ressort} - b\frac{\vec{v}_{GEP}}{R_0}) \cdot \vec{z}_0,$$

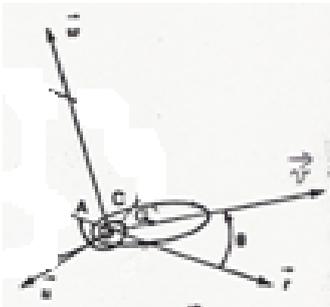
$$\vec{F}_{ext/(PUR)} \cdot \vec{z}_0 = -Kz(t) - b(\dot{z} + L\dot{\theta}\cos\theta),$$

Equation relative à  $z(t)$  :  $(m + M)\ddot{z} + m(L\ddot{\theta}\cos\theta - L\dot{\theta}^2\sin\theta) = -Kz(t) - b(\dot{z} + L\dot{\theta}\cos\theta)$

**Equation relative à  $\theta(t)$  :**

Paramètre de rotation suivant  $\vec{z}_0$  positionnant la pale (P) :

On isole (P) : bilan des efforts extérieurs



- Force du fluide en G
- Pivot en A d'axe  $(A, \vec{u})$
- Ressort de torsion d'axe  $(A, \vec{u})$  et de raideur C

Donc le point de calcul des moments est A

$$\overrightarrow{M}_A \cdot \vec{u} = \overrightarrow{N}_{A \in (P)} \cdot \vec{u}$$

Calcul de  $\overrightarrow{M}_A \cdot \vec{u}$  :

$$\overrightarrow{M}_A \cdot \vec{u} = 0 - C\theta + (\overrightarrow{AG} \wedge -b\overrightarrow{V}_G) \cdot \vec{u} = -C\theta - b(\vec{u} \wedge L\vec{v}) \cdot \overrightarrow{V}_G = -C\theta - bL\vec{w} \cdot (\dot{z}\vec{z}_0 - \Omega(R + L\cos\theta)\vec{u} + L\dot{\theta}\vec{w}),$$

$$\overrightarrow{M}_A \cdot \vec{u} = -C\theta - bL(\dot{z}\cos\theta + L\dot{\theta})$$

Calcul de  $\overrightarrow{N}_{A \in (P)} \cdot \vec{u}$  :

$A \in (P)$  n'est pas fixe dans  $R_0$  donc on passe par le cdm de (P) : G

$$\overrightarrow{N}_{A \in (P)} \cdot \vec{u} = \left( \overrightarrow{N}_{G \in (P)} + \overrightarrow{AG} \wedge m \overrightarrow{a}_{G \in (P)} \right) \cdot \vec{u},$$

$$\overrightarrow{N}_{G \in (P)} \cdot \vec{u} = \left. \frac{dL_{G \in (P)}}{dt} \right|_{R_0} \cdot \vec{u},$$

$$\overrightarrow{L}_{G \in (P)} = [I_{(G,P)}] \cdot [\Omega_{P/0}] = \begin{pmatrix} I_P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_P \end{pmatrix}_{R_P} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \Omega \sin\theta \\ \Omega \cos\theta \end{pmatrix}_{R_P} = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \cdot I_P \\ 0 \\ \Omega \cos\theta \cdot I_P \end{pmatrix}_{R_P},$$

$\overrightarrow{N}_{G \in (P)} \cdot \vec{u}$  : pour effectuer ce calcul simplement, on dérive et on projette en même temps !

On remarque que  $\left. \frac{d\vec{u}}{dt} \right|_{R_0} \cdot \vec{u} = 0$ , et  $\vec{w} \cdot \vec{u} = 0$

$$D'où : \overrightarrow{N}_{G \in (P)} \cdot \vec{u} = \ddot{\theta} \cdot I_P + \Omega \cos\theta \cdot I_P \left( \left. \frac{d\vec{w}}{dt} \right|_{R_0} \cdot \vec{u} \right) = \ddot{\theta} \cdot I_P + \Omega^2 \sin\theta \cos\theta \cdot I_P$$

$$\left( \overrightarrow{AG} \wedge m \overrightarrow{a}_{G \in (P)} \right) \cdot \vec{u} = (\vec{u} \wedge L\vec{v}) \cdot m \overrightarrow{a}_{G \in (P)} = Lm\vec{w} \cdot (\dot{z}\vec{z}_0 + 2\Omega\dot{\theta}L\sin\theta\vec{u} - \Omega^2(R + L\cos\theta)\vec{r} + L\ddot{\theta}\vec{w} - L\dot{\theta}^2\vec{v})$$

$$\left( \overrightarrow{AG} \wedge m \overrightarrow{a}_{G \in (P)} \right) \cdot \vec{u} = Lm(\dot{z}\cos\theta + \Omega^2(R + L\cos\theta)\sin\theta + L\ddot{\theta})$$

$$\text{Donc } \overrightarrow{N}_{A \in (P)} \cdot \vec{u} = \ddot{\theta} \cdot I_P + \Omega^2 \sin\theta \cos\theta \cdot I_P + Lm(\dot{z}\cos\theta + \Omega^2(R + L\cos\theta)\sin\theta + L\ddot{\theta})$$

Equation relative à  $\theta(t)$  :

$$\ddot{\theta} \cdot I_P + \Omega^2 \sin\theta \cos\theta \cdot I_P + Lm(\dot{z}\cos\theta + \Omega^2(R + L\cos\theta)\sin\theta + L\ddot{\theta}) = -C\theta - bL(\dot{z}\cos\theta + L\dot{\theta})$$

### Résumé de cours S5

#### Formule du changement de repère de dérivation (ou formule de dérivation composée)

$$\frac{d^{(0)} \vec{U}}{dt} = \frac{d^{(1)} \vec{U}}{dt} + \vec{\Omega}_{1/0} \wedge \vec{U}$$

**Torseur cinétique** : torseur associé au champ de vitesses du solide S.

$$[L_{S/0}]_C = \left[ \vec{p}_{S/0} \mid \vec{L}_{S/0C} \right]_C \quad \vec{p}_{S/0} = m \vec{v}(G)_{S/0} \quad \vec{L}_{S/0C} = \int \vec{CP} \wedge \vec{v}(P)_{S/0} dm$$

**Torseur dynamique** : torseur associé au champ des accélérations du solide S.

$$[N_{S/0}]_C = \left[ \vec{D}_{S/0} \mid \vec{N}_{S/0C} \right]_C \quad \vec{D}_{S/0} = m \vec{a}(G)_{S/0} \quad \vec{N}_{S/0C} = \int \vec{CP} \wedge \vec{a}(P)_{S/0} dm$$

#### Relation entre les résultantes cinétique et dynamique

$$\vec{D}(S/0) = \frac{d^{(0)} \vec{p}(S/0)}{dt}$$

#### Relation entre les moments cinétique et dynamique

$$\vec{N}(S/0)_C = \frac{d^{(0)} \vec{L}(S/0)_C}{dt} + \vec{v}(C)_{/0} \wedge \vec{p}(S/0)$$

$$\vec{L}_{S/0C} = m \vec{CG} \wedge \vec{v}(O_S)_{S/0} + m \vec{CO}_S \wedge (\vec{\Omega}_{S/0} \wedge \vec{O}_S G) + [I_{O_S}] \vec{\Omega}_{S/0}$$

#### PFD

$$[F_{ext/\Sigma}]_C = [N_{\Sigma/0}]_C$$

#### Théorème de la résultante dynamique

$$\vec{F}_{ext/\Sigma} = \vec{D}_{\Sigma/0}$$

#### Théorème du moment dynamique

$$\vec{M}_{ext/\Sigma C} = \vec{N}_{\Sigma/0C}$$