

## S5-PROJET ENERGIE MECANIQUE

**Objectif du projet** : ce cours utilise vos connaissances de S4 de dynamique. Nous allons les compléter dans le cadre d'un projet : le but est d'expliquer le comportement dynamique d'un système réel à l'aide de sa mise en équation et de son interprétation.

**Déroulement du projet** : vous êtes en équipe de 3 ou 4 (groupes aléatoires). Chaque groupe est constitué d'un rapporteur et d'un planificateur (ces postes changent toutes les semaines, planning prédéfini fourni en début de semestre).

**Rôle du planificateur** : mise en place d'un planning numérique des tâches sur les 7 (ou 14) semaines du projet. Il met à jour ce planning (tâches effectuées, en cours et à faire) toutes les semaines et il le présente. Il rend un document final récapitulatif la progression du projet avec le temps passé par tâche.

**Rôle du rapporteur** : il s'approprie le travail du groupe; il l'explique ensuite pendant 5 à 10 minutes -à l'aide de documents clairs et concis- à l'enseignant. Il restitue ensuite au groupe les remarques.

**Rôle de chaque membre du groupe** : il tient à jour un portfolio numérique (outil non imposé) dans lequel il répertorie **les tâches qu'il a effectuées** à chaque séance, chronologiquement (seul ou en groupe), pendant et en dehors des cours avec le temps consacré, les problèmes rencontrés, les solutions apportées. Le temps total hors séance doit apparaître. L'étudiant doit faire apparaître qu'il a participé à chaque compétence visée du projet (pas d'étudiant mono tâche !). Les brouillons, ordonnés chronologiquement, feront foi (à présenter dans un classeur).

Temps à allouer au projet par personne : 21 (ou 42) heures encadrées + 10.5 (ou 21) heures « maison » environ.

De plus, « un classeur de projet » sera tenu à jour avec les documents exposés par le rapporteur, classeur consultable à tout moment par l'enseignant. L'évaluation prendra fortement en compte la capacité du groupe à fournir des documents rigoureux et exploitables : professionnels.

**Evaluation du projet** : chaque audition d'un rapporteur + planificateur est évaluée et contribue à la note de contrôle continu du groupe. Leurs portfolios sont examinés en même temps et leur apporte une note personnelle. L'évaluation finale (toute l'équipe) complète la note du groupe : pendant 5 minutes le résultat des travaux est présenté et commenté, un bilan est attendu (prendre du recul), mais aucun dossier (5 slides environ) : les conclusions étayées sont évaluées prioritairement, ainsi que le planning restituant la démarche scientifique.

**Evaluation complémentaire** : deux contrôles continus sont programmés en semaine 2 et 6. Ils ont pour but de valider les deux compétences principales de cet enseignement par projet, et les sujets de contrôle sont intimement liés au projet (pas de révisions requises, valide la compréhension individuelle liée au projet).

Compétence 1 : obtenir les équations de mouvement (suite de dynamique S4)

Compétence 2 : étudier les positions d'équilibre et leur stabilité d'un système.

### Compétences techniques :

Rechercher et écrire des équations de mouvement à partir du PFD

Déterminer les positions d'équilibre et leur stabilité pour un système conservatif

Déterminer les positions d'équilibre et leur stabilité pour un système dissipatif

Simuler un système d'équations de mouvement

### Compétences transverses :

Communiquer au sein d'un groupe

Organiser son travail au sein d'un groupe (planification)

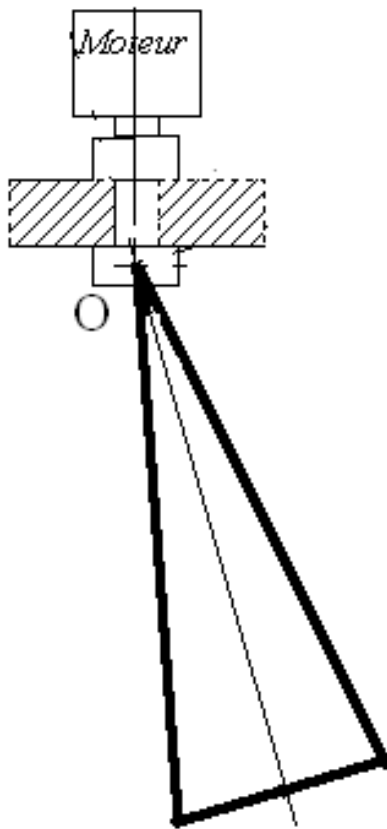
Synthétiser son travail (Portfolio, résumé de cours)

Restituer un travail à l'oral (Rapports)

## Ressources :

<b>Présentation du projet</b>	p2.
<b>Chapitre 0 : le point sur nos connaissances</b>	p3.
Cinématique – exercice	
<b>Chapitre 1 : géométrie des masses</b>	p9.
Centre de masse, matrice d'inertie, théorèmes de Huyghens	
<b>Chapitre 2 : principe fondamental de la dynamique</b>	p16.
Torseur cinétique et torseur dynamique, énoncé du PFD	
Paramétrage et choix des équations	
Exercice de synthèse	
<b>Chapitre 3 : travail, puissance – énergie potentielle, énergie cinétique</b>	p25.
Travail, puissance, énergie potentielle	
Energie cinétique	
Théorème de l'énergie cinétique, intégrale première de l'énergie cinétique	
<b>Chapitre 4 : positions d'équilibre et stabilité des équilibres des systèmes conservatifs</b>	p35.
Théorème de Lejeune-Dirichlet	
Exercice de synthèse	
<b>Chapitre 5 : positions d'équilibre et stabilité des équilibres des systèmes dissipatifs</b>	p42.
Théorème de Liapounov	
Exercice de synthèse	
<b>Chapitre 6 : l'art de la linéarisation</b>	p47.
Petits mouvements au voisinage de la position d'équilibre	
Exercice de synthèse	
<b>Aide-mémoire</b>	p53.

## Projet énergie mécanique



Dans le cadre d'une étude de stabilisation gyroscopique, un client souhaite avoir la description du comportement dynamique d'un pendule conique en fonction de ses dimensions (rapport entre le rayon de sa base et sa hauteur), et l'estimation du rôle des frottements dans cette étude (influence sur les positions d'équilibre dynamique et sur les pulsations propres du système).

Pour ce faire, on possède une maquette permettant de mettre en rotation plusieurs types de pendules coniques et d'observer leur comportement dynamique en fonction de la vitesse de rotation : le moteur impose un couple constant ; la vitesse de rotation se stabilise ensuite autour d'une valeur moyenne.

Dans un premier temps les frottements seront négligés. Dans un second temps, on prendra en compte un frottement au niveau de l'axe de rotation du cône (frottement visqueux - à estimer - proportionnel à la vitesse de rotation), et un frottement aérodynamique appliqué au niveau du centre de masse du cône (proportionnel et opposé à la vitesse du centre de masse du cône). Il est demandé de faire une observation fine de la partie expérimentale, puis de comparer avec l'étude théorique.

NB : la figure ci-contre n'est pas contractuelle, seule la maquette et sa modélisation sont à étudier. Les cônes sont en alliage d'aluminium.

[Vidéo de démonstration](#)

### Planification du projet

Faire une liste des tâches pour mener à bien le projet, et les planifier (à mettre à jour régulièrement). Chaque tâche sera associée à un (ou plusieurs) noms d'étudiants avec le nombre d'heures facturées au client par tâche (1 heure passée par deux étudiants = 2 heures facturées). Un code des couleurs sera associé aux tâches à effectuer, aux tâches en cours et aux tâches terminées. Faire un bilan sur le temps passé par étudiant pendant et hors séance (21h à l'edt, environs 10.5h « maison » par étudiant).

NB : afin de profiter pleinement de ce projet dans le cadre de votre formation, il est important de voir et comprendre tous les chapitres. C'est la synthèse du cours qui permettra de traiter la complexité du projet. Ainsi, si des parties théoriques ou des exercices vous posent problème, un cours spécifique sera mis en place à votre demande par l'enseignant ; l'important est de comprendre et maîtriser les notions étudiées afin de pouvoir les réutiliser ultérieurement.

**Durée du projet** : 7 semaines, 21 heures à l'edt, 10h30 environ « maison » par étudiant.

## Chapitre 0 : le point sur nos connaissances

### 1 : torseur

Un torseur est un champ vectoriel équiprojectif :

$$\vec{M}_A \cdot \vec{AB} = \vec{M}_B \cdot \vec{AB}$$

Relation très utilisée en particulier en cinématique du solide... Voir un peu plus loin.

Il est défini par sa résultante  $\vec{R}$  et son moment en un point A :  $\vec{M}_A$

Notation :

$$[T]_A = \left[ \vec{R} \mid \vec{M}_A \right]_A \quad \text{ou} \quad \left\{ \vec{R} \mid \vec{M}_A \right\}_A \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{c} \vec{R} \\ \vec{M}_A \end{array} \right\}_A \dots$$

Propriété :

$$\vec{M}_A = \vec{M}_B + \vec{R} \wedge \vec{BA} \quad \text{ou} \quad \vec{M}_A = \vec{M}_B + \vec{AB} \wedge \vec{R}$$

*Définitions :*

- Glisseur : un torseur est un glisseur si et seulement si il existe un point K tel que

$$\vec{M}_K = \vec{0}$$

L'ensemble des points K est une droite appelée « axe du glisseur ».

- Couple : un torseur est un couple si sa résultante est nulle. Un couple est donc un champ vectoriel constant.

Propriété :

On démontre que tout torseur peut s'écrire comme la somme d'un couple et d'un glisseur (la somme de deux torseurs ne peut se faire que s'ils sont exprimés en un même point).

### 2 : cinématique du solide

Le champ cinématique des vitesses est un torseur : le torseur cinématique.

$$\vec{v}(A)_{S/0} \cdot \vec{AB} = \vec{v}(B)_{S/0} \cdot \vec{AB}$$

Il est défini par sa résultante cinématique  $\vec{\Omega}_{S/0}$  –vecteur vitesse de rotation du solide dans son mouvement par rapport au repère  $R_0$

et par son moment cinématique en un point A  $\vec{v}(A)_{S/0}$  –vecteur vitesse du point A du solide dans son mouvement par rapport au repère  $R_0$  :

$$[V_{S/0}]_A = \left[ \vec{\Omega}_{S/0} \mid \vec{v}(A)_{S/0} \right]_A$$

Pour définir complètement le vecteur vitesse d'un point, il faut :

... un point P

... qui appartient à un solide S, ou qui est fixe dans un repère  $R_S$

... solide ou repère mobile dans un repère  $R_0$  dans lequel  $O_0$  est un point fixe (pas forcément l'origine)

$$\vec{v}(P)_{S/O} = \frac{d^{(0)} \overrightarrow{O_0P}}{dt} \quad \text{ou} \quad \left. \frac{d \overrightarrow{O_0P}}{dt} \right|_{R_0}$$

Il est essentiel de faire apparaître le repère de dérivation !

*Remarque : le champ des accélérations d'un solide n'est en général pas un torseur.*

**Formule du changement de repère de dérivation (ou formule de dérivation composée)**

$$\frac{d^{(0)} \vec{U}}{dt} = \frac{d^{(1)} \vec{U}}{dt} + \vec{\Omega}_{1/0} \wedge \vec{U}$$

NB : ne pas confondre ...

- **repère d'observation** (l'observateur est lié à ce repère, et il décrit le mouvement)
- **repère de dérivation** (notion utile pour le traitement mathématique des calculs)
- **repère d'écriture** (dans lequel on exprime les résultats). Il est rarement nécessaire d'écrire ces résultats dans un repère particulier ! Et encore moins souvent utile de les écrire dans  $R_0$ , même lorsqu'il s'agit de calculer la vitesse d'un point, dans son mouvement par rapport à  $R_0$ .

Exemple : l'écriture suivante est tout à fait possible

$$\vec{v}(P)_{2/1} = \frac{d^{(1)} \overrightarrow{O_1P}}{dt} = \dot{x} \vec{i}_1 + r \dot{\theta} \vec{j}_1 + L\omega_{2/1} \vec{j}_2$$

Le repère d'observation est  $R_1$ ,

le premier\* repère de dérivation qui apparaît est  $R_1$ ,

il n'y a pas vraiment de repère d'écriture :  $R_1$  et  $R_2$  sont utilisés !

\* Dans les calculs, on a sûrement utilisé la relation

$$\frac{d^{(1)} \overrightarrow{O_1P}}{dt} = \frac{d^{(2)} \overrightarrow{O_1P}}{dt} + \vec{\Omega}_{2/1} \wedge \overrightarrow{O_1P}$$

Et là apparaissent 2 repères de dérivation !

<https://www.youtube.com/watch?v=J351RmKw7wc>

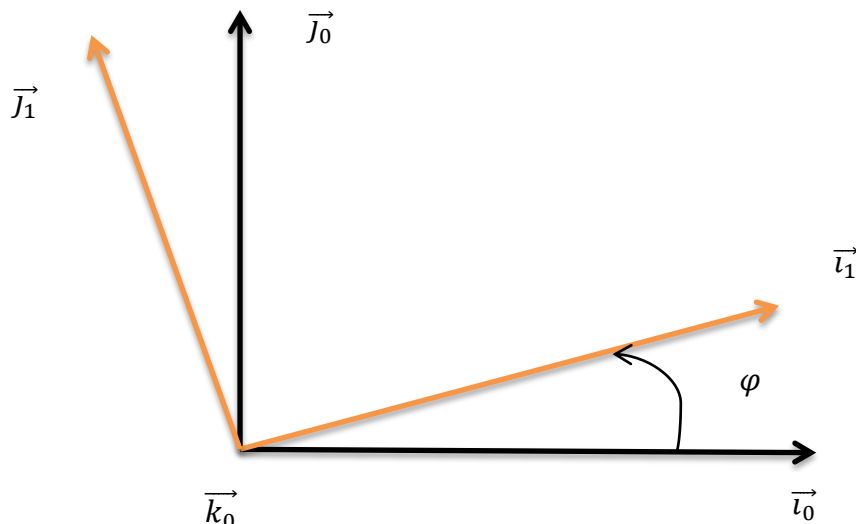
## Exercice 1

Soient  $R_0 = (O_0, \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$  et  $R_1 = (O_1, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1 = \vec{k}_0)$  mobile dans  $R_0$

$$\vec{\Omega}_{1/0} = \frac{d\varphi}{dt} \vec{k}_0 \text{ ou } \dot{\varphi} \vec{k}_0$$

Calculer  $\frac{d^{(0)}\vec{l}_1}{dt}$  et  $\frac{d^{(0)}\vec{j}_1}{dt}$

On trouve :



Représentation plane des repères directs avec l'axe de rotation commun aux deux repères  $\vec{k}_0$  perpendiculaire au plan, l'angle  $\varphi$  algébrique est représenté positif compris entre 0 et  $\frac{\pi}{2}$  pour éviter les erreurs de signe.

$$\frac{d^{(0)}\vec{l}_1}{dt} = \dot{\varphi} \cdot \vec{j}_1 \text{ et } \frac{d^{(0)}\vec{j}_1}{dt} = -\dot{\varphi} \cdot \vec{l}_1$$

*Remarquer que « dériver par rapport au temps » consiste à faire pivoter le vecteur de  $+\pi/2$  autour de l'axe portant le vecteur vitesse de rotation  $\vec{k}_0$  et de multiplier par la valeur algébrique de la vitesse de rotation  $\dot{\varphi}$ .*

## Exercice 2

Soient  $R_0 = (O_0, \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$  et

$R_1 = (O_1, \vec{i}_1 = \vec{i}_0, \vec{j}_1, \vec{k}_1), R_2 = (O_2, \vec{i}_2, \vec{j}_2 = \vec{j}_1, \vec{k}_2),$  mobiles dans  $R_0$

$$\vec{\Omega}_{1/0} = \dot{\varphi} \vec{i}_0 \quad \vec{\Omega}_{2/1} = \dot{\theta} \vec{j}_1$$

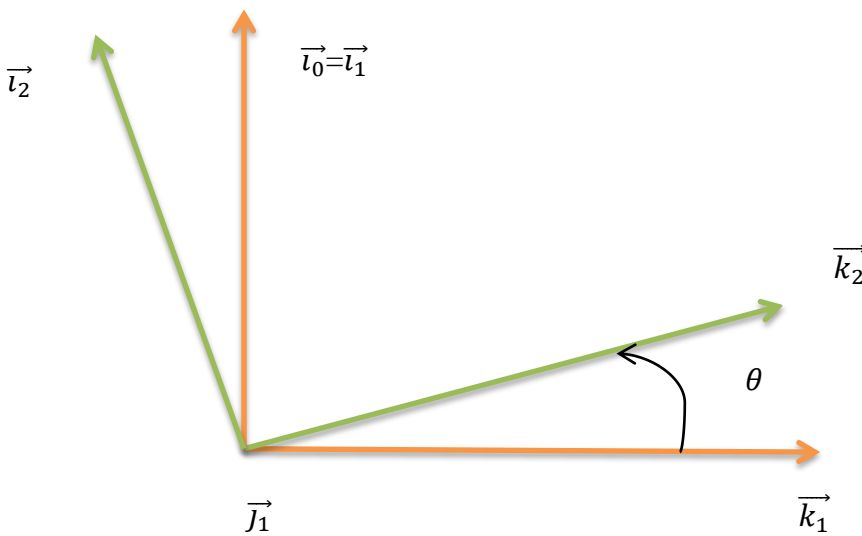
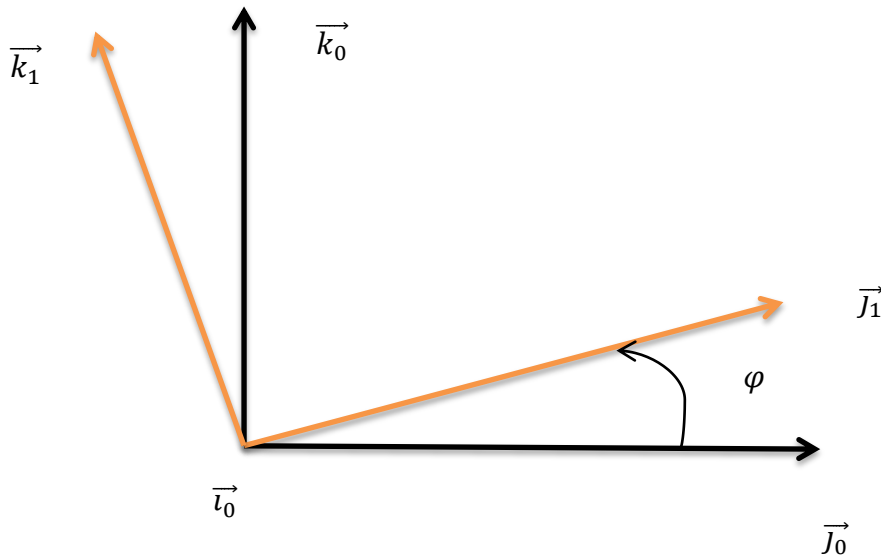
Calculer  $\frac{d^{(0)}\vec{j}_1}{dt}, \frac{d^{(0)}\vec{k}_1}{dt}, \frac{d^{(0)}\vec{k}_2}{dt}, \frac{d^{(0)}\vec{l}_2}{dt}$

On trouve :

# S5 Enm. Énergie mécanique

José Bruned, Erwan Contal, Guillaume Helbert

Version 22/10/2019



$$\frac{d^{(0)}\vec{j}_1}{dt} = \dot{\varphi} \cdot \vec{k}_1, \quad \frac{d^{(0)}\vec{k}_1}{dt} = -\dot{\varphi} \cdot \vec{j}_1$$

Pour calculer  $\frac{d^{(0)}\vec{k}_2}{dt}$ , deux possibilités :

$$\frac{d^{(0)}\vec{k}_2}{dt} = \frac{d^{(2)}\vec{k}_2}{dt} + \vec{\Omega}_{2/0} \wedge \vec{k}_2; \quad \frac{d^{(2)}\vec{k}_2}{dt} = \vec{0}; \quad \vec{\Omega}_{2/0} = \vec{\Omega}_{2/1} + \vec{\Omega}_{1/0}$$

$$\text{Ou mieux } \frac{d^{(0)}\vec{k}_2}{dt} = \frac{d^{(1)}\vec{k}_2}{dt} + \vec{\Omega}_{1/0} \wedge \vec{k}_2; \quad \frac{d^{(1)}\vec{k}_2}{dt} = \dot{\theta} \cdot \vec{i}_2; \quad \dot{\varphi} \cdot \vec{i}_0 \wedge \vec{k}_2 = -\dot{\varphi} \cdot \cos\theta \cdot \vec{j}_1$$

$$\text{De même } \frac{d^{(0)}\vec{i}_2}{dt} = -\dot{\theta} \cdot \vec{k}_2 + \dot{\varphi} \cdot \sin\theta \cdot \vec{j}_1$$

Résumé dérivation vectorielle : <https://www.youtube.com/watch?v=O7b-J7rvyAE>

## Pour s'entraîner :

Soit le repère fixe  $R_0 (O, \vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Z}_0)$  et les repères mobiles

$$R_1 (O, \vec{X}_1, \vec{Y}_1 = \vec{Y}_0, \vec{Z}_1) \quad R_2 (O, \vec{X}_2, \vec{Y}_2, \vec{Z}_2 = \vec{Z}_1)$$

Avec  $\vec{\Omega}_{R_1/R_0} = \dot{\theta} \cdot \vec{Y}_0$  et  $\vec{\Omega}_{R_2/R_1} = \dot{\phi} \cdot \vec{Z}_1$

Calculer :

$$\frac{d^{(0)}\vec{X}_1}{dt}; \frac{d^{(0)}\vec{Z}_1}{dt}; \frac{d^{(0)}\vec{X}_2}{dt}; \frac{d^{(0)}\vec{Y}_2}{dt}$$

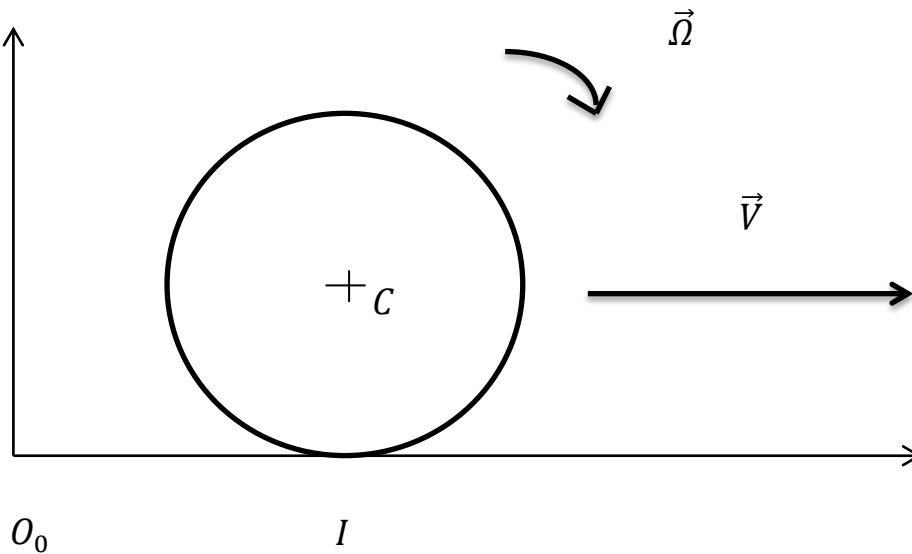
## Roulement sans glissement

Soit I le point de contact entre S1 et S2. On définit la vitesse de glissement de S1 par rapport à S2 : ( $R_0$  est un repère quelconque)

$$\vec{v}(I)_{gl} = \underbrace{\vec{v}(I)_{1/0} - \vec{v}(I)_{2/0}}_{\vec{v}(I)_{1/2}}$$

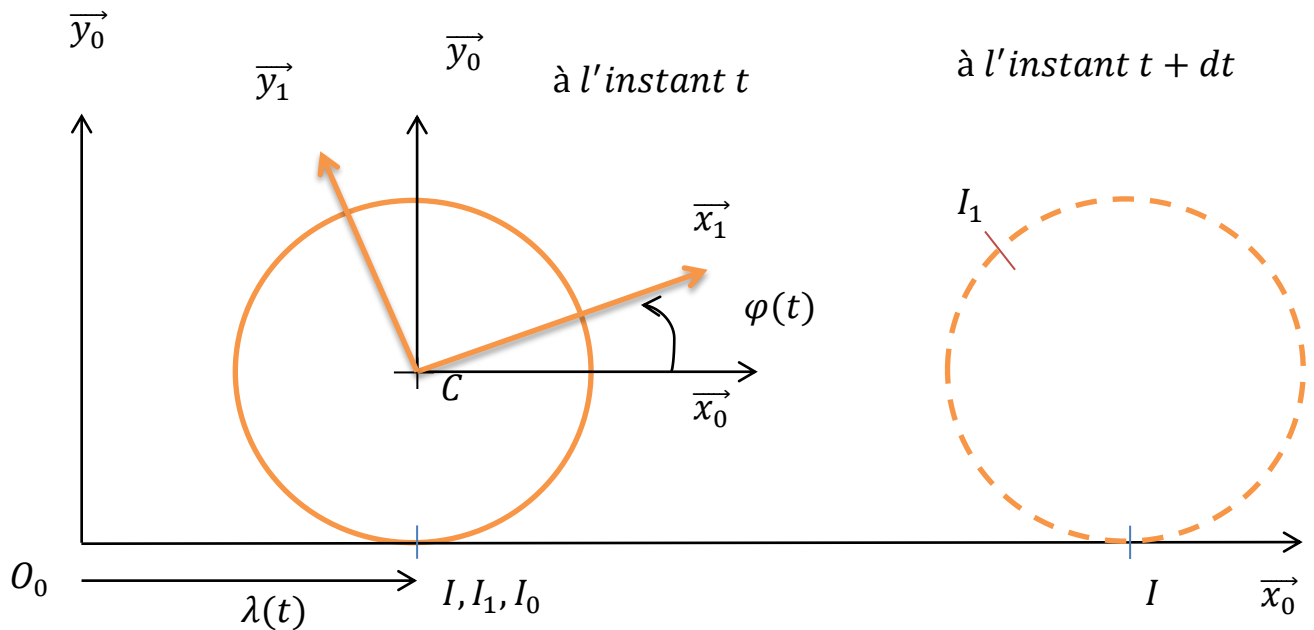
Il y a roulement sans glissement si  $\vec{v}(I)_{gl} = \vec{0}$

Exemple : une roue (1) de rayon R roule sans glisser sur le sol (0). Quelle est la relation entre la vitesse d'avance et la vitesse de rotation de la roue ?





**Réponse** : on met en place un repère par sous ensemble cinématique, puis le paramétrage permettant de passer d'un repère à un autre.



$R_0 (O_0; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{k}_0)$  fixe,  $R'_0 (C; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{k}_0)$  lié à l'axe de la roue,  $R_1 (C; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{k}_1)$  lié à la roue

Avec  $\lambda(t)$  algébrique et dessiné positif,  $\varphi(t)$  algébrique représenté positif compris entre 0 et  $\frac{\pi}{2}$ .

Les points I : I est le point géométrique de contact entre la roue et le sol,  $I_1$  est le point de la roue (1) en I à l'instant t,  $I_0$  est le point de la roue en I à l'instant t. Les points  $I, I_1, I_0$  coïncident à l'instant t

À l'instant  $t+dt$ , I est toujours le point de contact entre la roue et le sol,  $I_1$  s'est déplacé sur la roue et  $I_0$  n'a pas bougé.

La vitesse de glissement est  $\vec{v}_{I_1/0}$

$$\vec{v}_{I_1/0} = \vec{v}_{C \in 1/0} + \vec{I_1 C} \wedge \vec{\Omega}_{1/0} = \dot{\lambda} \vec{x}_0 + R \dot{\varphi} \vec{x}_0$$

La relation de roulement sans glissement est :  $\dot{\lambda} + R \dot{\varphi} = 0$

### Mouvement plan sur plan

Un solide S est animé d'un mouvement plan sur plan si un plan P1 lié à S glisse sur un plan fixe P. A tout instant, P et P1 restent donc parallèles.

On appelle CIR (centre instantané de rotation) le point géométrique I appartenant à S qui, à l'instant t, possède une vitesse nulle par rapport à  $R_0$  :

$$\vec{v}(I)_{S/0} \Big|_t = \vec{0}$$

Suite de l'exemple précédent : une roue (1) de rayon R roule en glissant sur le sol (0) :  $2\dot{\lambda} + R\dot{\varphi} = 0$

Où se trouve le CIR de ce mouvement plan sur plan ?

**Solution** : on appelle K le CIR. On pose  $\overrightarrow{O_o K} = a\overrightarrow{x_0} + b\overrightarrow{y_0}$

$$\overrightarrow{v_{K\epsilon 1/0}} = \overrightarrow{v_{C\epsilon 1/0}} + \overrightarrow{K\vec{C}} \wedge \overrightarrow{\Omega_{1/0}} = \dot{\lambda}\overrightarrow{x_0} + ((\lambda - a)\overrightarrow{x_0} + (R - b)\overrightarrow{y_0}) \wedge \dot{\phi}\overrightarrow{k_0};$$

$$\overrightarrow{v_{K\epsilon 1/0}} = (\dot{\lambda} + (R - b)\dot{\phi})\overrightarrow{x_0} - (\lambda - a)\dot{\phi}\overrightarrow{y_0} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{v_{K\epsilon 1/0}} = \left(\frac{R}{2} - b\right)\dot{\phi}\overrightarrow{x_0} - (\lambda - a)\dot{\phi}\overrightarrow{y_0} = \vec{0}$$

Donc  $a = \lambda$  et  $b = \frac{R}{2}$

## Chapitre 1 : géométrie des masses

On s'intéresse ici aux systèmes à masse conservative :  $\frac{dm}{dt} = 0$  donc  $m = cste$

### 1 : schématisation des systèmes matériels

#### 1.1 : système matériel discret

Le système est composé d'un nombre fini  $n$  de particules  $P_j$  de masse  $m_j$ .

La masse du système est :

$$m_S = \sum_{j=1}^n m_j$$

#### 1.2 : système continu à densité de masse

On note alors l'expression de la masse élémentaire :

$$\rho_1 \cdot dV = dm ; \rho_1 \text{ masse volumique (kg/m}^3\text{)}$$

$$\rho_2 \cdot dS = dm ; \rho_2 \text{ masse surfacique (kg/m}^2\text{)}$$

$$\rho_3 \cdot dL = dm ; \rho_3 \text{ masse linéique (kg/m)}$$

### 2 : centre de masse (cdm), noté très souvent G

#### 2.1 : système discret

$$\forall C, \quad m_S \overrightarrow{CG} = \sum_{j=1}^n [m_j \overrightarrow{CP_j}]$$

#### 2.2 : système continu

$$\forall C, \quad m_S \overrightarrow{CG} = \int_{(S)} \overrightarrow{CP} dm$$

**Remarques :**

Nous pouvons projeter cette relation :

$$m_S x_G = \int_{(S)} x_P dm$$

Et 2 autres du même genre...

Nous pouvons dériver par rapport au temps :

$$m_S \overrightarrow{v(G)} = \sum_{j=1}^n [m_j \overrightarrow{v(P_j)}]$$

$$m_S \overrightarrow{v(G)} = \int_{(S)} \overrightarrow{v(P)} dm$$

encore une fois...

$$m_S \overrightarrow{a(G)} = \sum_{j=1}^n [m_j \overrightarrow{a(P_j)}]$$

$$m_S \overrightarrow{a(G)} = \int_{(S)} \overrightarrow{a(P)} dm$$

Et :

$$m_S \dot{x}_G = \sum_{j=1}^n [m_j \dot{x}_{P_j}] \qquad m_S \ddot{z}_G = \int_{(S)} \ddot{z}_P dm$$

Ainsi de suite...

### 3) Matrice d'inertie

#### 3.1 : définitions

La matrice d'inertie d'un solide S regroupe les propriétés géométriques et de répartition de masse de S. Elle est toujours symétrique, quelque soit le repère de calcul. Dans la pratique, les termes de cette matrice sont calculés dans un repère lié au solide et sont donc des *constantes* par rapport au temps. Avec la masse, elle définit complètement l'inertie de ce solide.

$$[I_S]_{O_S} = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{O_S, R_S}$$

Matrice d'inertie en  $O_S$  exprimée dans le repère  $R_S$  lié à (S).

Termes diagonaux : moments d'inertie (toujours positifs, ou négligés)

$$A = \int (y^2 + z^2) \cdot dm$$

$$B = \int (x^2 + z^2) \cdot dm$$

$$C = \int (x^2 + y^2) \cdot dm$$

Termes non diagonaux : produits d'inertie (positifs, négatifs ou nuls, ou négligés)

$$F = \int x \cdot y \cdot dm$$

$$E = \int x \cdot z \cdot dm$$

$$D = \int y \cdot z \cdot dm$$

De plus, on définit, *uniquement pour faciliter parfois les calculs des 6 grandeurs définies plus haut* :

- le « moment d'inertie polaire, par rapport au point  $O_S$  » :

$$I_{O_S} = \int (x^2 + y^2 + z^2) dm$$

- et les moments d'inertie, par rapport aux plans  $(O_S, \vec{j}_S, \vec{k}_S)$ ,  $(O_S, \vec{k}_S, \vec{i}_S)$ ,  $(O_S, \vec{i}_S, \vec{j}_S)$  respectivement

$$A' = \int x^2 dm \qquad B' = \int y^2 dm \qquad C' = \int z^2 dm$$

#### 3.2 : propriétés

$$A = B' + C' \qquad B = C' + A' \qquad C = A' + B'$$

$$I_O = A' + B' + C' = \frac{1}{2}(A + B + C)$$

La matrice d'inertie est symétrique : elle est donc diagonalisable. Cela signifie qu'il existe un repère  $R_P$  lié au solide, appelé « repère principal d'inertie » tel que

$$[I_S]_{O_S, R_P} = \begin{bmatrix} A_P & 0 & 0 \\ 0 & B_P & 0 \\ 0 & 0 & C_P \end{bmatrix}_{O_S, R_P}$$

**Remarque** : si, par exemple, le 3<sup>ème</sup> axe du repère principal est un axe de révolution pour le solide, alors  $A_P = B_P$  (car  $x$  et  $y$  peuvent être intervertis)

**Théorème** : pour un solide de révolution, tout repère construit sur l'axe de révolution est principal d'inertie.

### 3.3: changement du point de calcul de la matrice d'inertie

#### **Théorème de Huyghens généralisé**

Supposons connue la matrice d'inertie du solide, dans un repère lié au solide **ET** ayant pour origine G

$$[I_S]_{G, R_S} = \begin{bmatrix} A_G & -F_G & -E_G \\ & B_G & -D_G \\ Sym & & C_G \end{bmatrix}_{G, R_S}$$

On souhaite exprimer cette matrice d'inertie, dans un repère  $R_O(O, R)$  --- **parallèle au précédent** --- mais défini en un point O quelconque de ce solide.

Avec  $\vec{OG} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ , nous obtenons  $[I_S]_{O, R} = [I_S]_{G, R} + \begin{bmatrix} m(b^2 + c^2) & -mab & -mca \\ & m(c^2 + a^2) & -mbc \\ Sym & & m(a^2 + b^2) \end{bmatrix}$

#### **Remarque**

- les moments d'inertie  $A_G, B_G, C_G$  sont minimaux en G.

#### **Important**

- le théorème de Huyghens ne permet pas de passer d'un point quelconque à un autre : passage obligé par G !

**Enoncé du théorème de Koenig** : l'opérateur d'inertie du solide S de masse  $m$  calculé en  $O =$  l'opérateur d'inertie de S en G + l'opérateur d'inertie calculé en O appliqué à une masse ponctuelle  $m$  située en G. C'est la même chose que Huyghens généralisé...

## Exercice d'application :

## robot ABB IRB 140

### Mouvement du robot

Type de mouvement	Portée du mouvement	
Axe 1 Mouvement de rotation	+180°	- -180°
Axe 2 Mouvement de bras	+110°	- -90°
Axe 3 Mouvement de bras	+50°	- -230°
Axe 4 Mouvement de poignet	+200°	- -200°
Axe 5 Mouvement de flexion	+120°	- -120°
Axe 6 Mouvement de pivot	+400°	- -400°

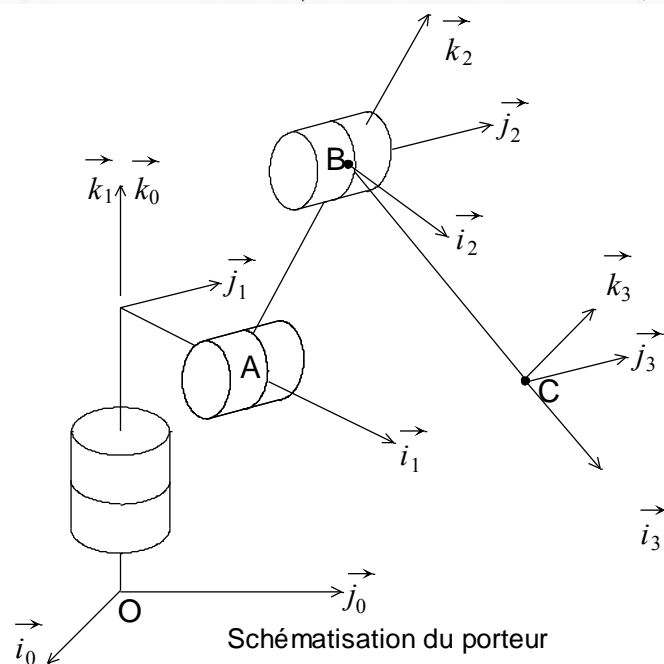
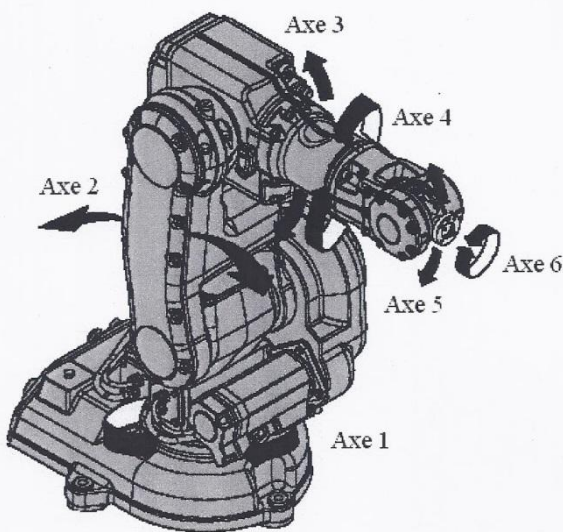
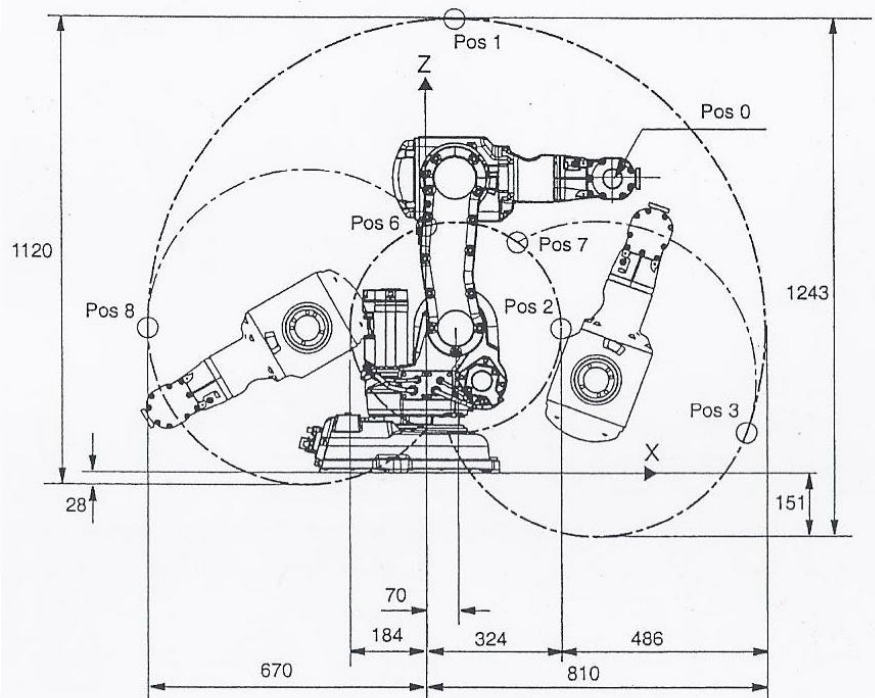
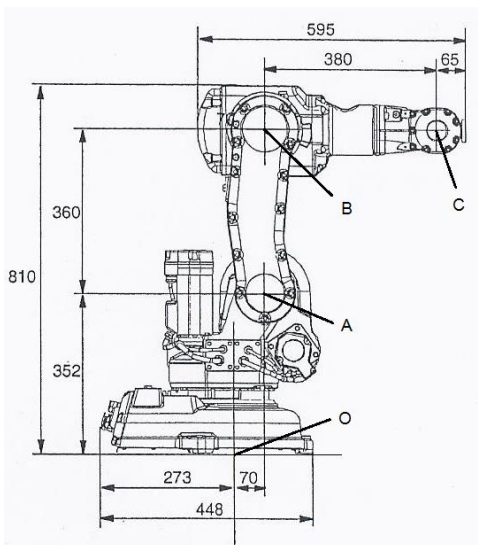
Positions au centre du poignet (mm)

pos.	x	z
0	450	712
1	70	1092
2	314	421
3	765	99
6	1	596
7	218	558
8	-670	352

Angle (degrés)

pos.	axe 2	axe 3
0	0	0
1	0	-90
2	0	+50
3	110	-90
6	-90	+50
7	110	-230
8	-90	-90

Les positions extrêmes du bras du robot.



La schématisation du « porteur » (les 3 premiers axes) de ce robot fait apparaître les repères liés à ses « segments » (ou « bras », ou « solides ») de ce robot. Les 3 rotations successives seront notées  $\alpha, \beta, \gamma$  avec évidemment  $\alpha = \alpha(t), \beta = \beta(t), \gamma = \gamma(t)$ .

1 : Déterminer les vecteurs vitesses de rotation

$$\begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega}_{1/0} \\ \overrightarrow{\Omega}_{2/1} \quad \overrightarrow{\Omega}_{2/0} \\ \overrightarrow{\Omega}_{3/2} \quad \overrightarrow{\Omega}_{3/1} \quad \overrightarrow{\Omega}_{3/0} \end{array}$$

2 : Déterminer les vecteurs vitesses

$$\begin{array}{c} \overrightarrow{v(A)}_{1/0} \\ \overrightarrow{v(A)}_{2/1} \quad \overrightarrow{v(A)}_{2/0} \quad \overrightarrow{v(B)}_{2/1} \quad \overrightarrow{v(B)}_{2/0} \\ \overrightarrow{v(C)}_{3/2} \quad \overrightarrow{v(C)}_{3/1} \quad \overrightarrow{v(C)}_{3/0} \end{array}$$

3 : Enfin, en supposant que, dans la phase de mouvement qui nous intéresse (et qui sera de durée limitée), les vitesses de rotations aient des mesures algébriques constantes

$$\dot{\alpha} = \frac{d\alpha}{dt} = \omega_{1/0} \text{ (cste)} \quad \dot{\beta} = \frac{d\beta}{dt} = \omega_{2/1} \text{ (cste)} \quad \dot{\gamma} = \frac{d\gamma}{dt} = \omega_{3/2} \text{ (cste)}$$

Déterminer

$$\begin{array}{c} \overrightarrow{a(A)}_{1/0} \\ \overrightarrow{a(A)}_{2/1} \quad \overrightarrow{a(A)}_{2/0} \quad \overrightarrow{a(B)}_{2/1} \quad \overrightarrow{a(B)}_{2/0} \\ \overrightarrow{a(C)}_{3/2} \quad \overrightarrow{a(C)}_{3/1} \quad \overrightarrow{a(C)}_{3/0} \end{array}$$

**Réponse :**

En notant  $\overrightarrow{OA} = a \vec{i}_1 + d \vec{k}_0, \overrightarrow{AB} = b \vec{k}_2, \overrightarrow{BC} = c \vec{i}_3$

$$\overrightarrow{v(A)}_{1/0} = a \dot{\alpha} \vec{j}_1, \overrightarrow{v(B)}_{2/0} = a \dot{\alpha} \vec{j}_1 + b(\dot{\beta} \vec{i}_2 + \dot{\alpha} \sin(\beta) \vec{j}_1)$$

$$\overrightarrow{v(C)}_{3/0} = a \dot{\alpha} \vec{j}_1 + b(\dot{\beta} \vec{i}_2 + \dot{\alpha} \sin(\beta) \vec{j}_1) + c(-(\dot{\gamma} + \dot{\beta}) \vec{k}_3 + \dot{\alpha} \cos(\beta + \gamma) \vec{j}_1),$$

$$\overrightarrow{a(A)}_{1/0} = -a \dot{\alpha}^2 \vec{i}_1,$$

$$\overrightarrow{a(B)}_{2/0} = -a \dot{\alpha}^2 \vec{i}_1 + b(-\dot{\beta}^2 \vec{k}_2 + 2 \dot{\alpha} \dot{\beta} \cos(\beta) \vec{j}_1 - \dot{\alpha}^2 \sin(\beta) \vec{i}_1),$$

$$\overrightarrow{a(C)}_{3/0} = -a \dot{\alpha}^2 \vec{i}_1 + b(-\dot{\beta}^2 \vec{k}_2 + 2 \dot{\alpha} \dot{\beta} \cos(\beta) \vec{j}_1 - \dot{\alpha}^2 \sin(\beta) \vec{i}_1) + c(-(\dot{\gamma} + \dot{\beta})^2 \vec{i}_3 - 2 \dot{\alpha}(\dot{\gamma} + \dot{\beta}) \sin(\beta + \gamma) \vec{j}_1 - \dot{\alpha}^2 \cos(\beta + \gamma) \vec{i}_1)$$

## Chapitre 2 : Principe Fondamental de la Dynamique Énoncé

### 1 : Torseur cinétique – torseur dynamique

#### Définitions

**Torseur cinétique** : torseur associé au champ de vitesses du solide S.

$$[L_{S/0}]_C = \left[ \begin{array}{c|c} \overrightarrow{p_{S/0}} & \overrightarrow{L_{S/0C}} \end{array} \right]_C$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{p_{S/0}} &= \int \overrightarrow{v(P)}_{S/0} dm \\ \overrightarrow{p_{S/0}} &= m \overrightarrow{v(G)}_{S/0} \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{L_{S/0C}} = \int \overrightarrow{CP} \wedge \overrightarrow{v(P)}_{S/0} dm$$

**Torseur dynamique** : torseur associé au champ des accélérations du solide S.

$$[N_{S/0}]_C = \left[ \begin{array}{c|c} \overrightarrow{D_{S/0}} & \overrightarrow{N_{S/0C}} \end{array} \right]_C$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{D_{S/0}} &= \int \overrightarrow{a(P)}_{S/0} dm \\ \overrightarrow{D_{S/0}} &= m \overrightarrow{a(G)}_{S/0} \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{N_{S/0C}} = \int \overrightarrow{CP} \wedge \overrightarrow{a(P)}_{S/0} dm$$

#### Relation entre les résultantes cinétique et dynamique

Système à masse conservative

$$\overrightarrow{D(S/0)} = \frac{d^{(0)} \overrightarrow{p(S/0)}}{dt}$$

#### Relation entre les moments cinétique et dynamique

$$\overrightarrow{N(S/0)_C} = \frac{d^{(0)} \overrightarrow{L(S/0)_C}}{dt} + \overrightarrow{v(C)}_{/0} \wedge \overrightarrow{p(S/0)}$$

Remarques : si C est fixe dans  $R_0$  ou si  $C = G$  :

$$\overrightarrow{N(S/0)_C} = \frac{d^{(0)} \overrightarrow{L(S/0)_C}}{dt}$$

## Système de solides

Appelons  $\Sigma$  un système de  $n$  solides

$$\Sigma = \bigcup_{i=1}^n S_i$$

$$\vec{L}_{S/O_C} = \int_{\Sigma} \left[ \vec{CP} \wedge \vec{v}(P)_{S/O} dm \right] = \sum_{i=1}^n \left[ \int_{S_i} \vec{CP} \wedge \vec{v}(P)_{S/O} dm \right]$$

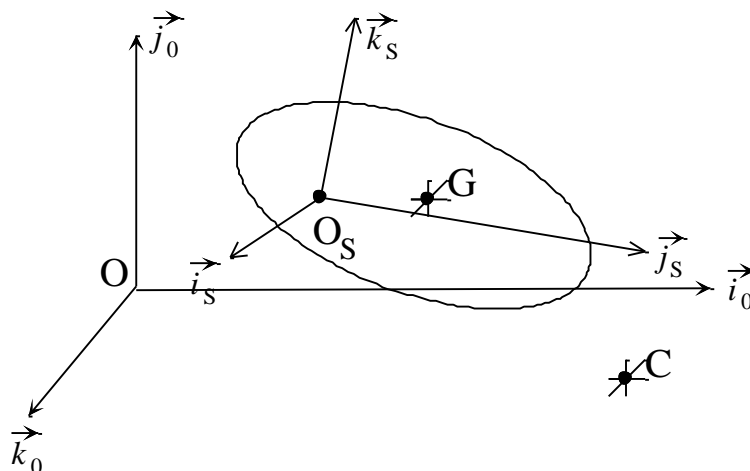
Le moment cinétique (dynamique) d'un système de solides s'obtient en sommant les moments cinétiques (dynamiques) de chaque solide, calculés en un même point.

## 2 : calcul du moment cinétique en pratique

Notations : solide  $S$ , centre de masse  $G$ ,  $R_0$  repère fixe (galiléen),  $R_S$  repère lié à  $S$  et dont l'origine est le point  $O_S$  (point de calcul de la matrice d'inertie).

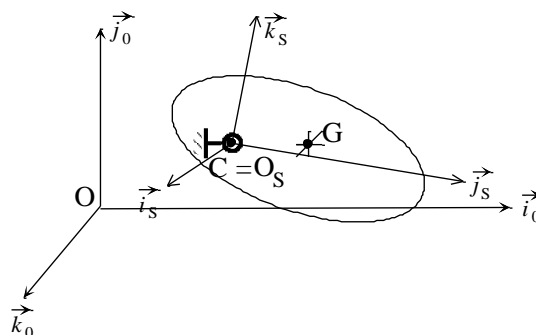
La forme la plus générale pour l'écriture du moment cinétique en un point  $C$  (quelconque) est

$$\vec{L}_{S/O_C} = m \vec{CG} \wedge \vec{v}(O_S)_{S/O} + m \vec{CO}_S \wedge (\vec{\Omega}_{S/O} \wedge \vec{O}_S G) + [I_{O_S}] \vec{\Omega}_{S/O}$$



### Cas particuliers :

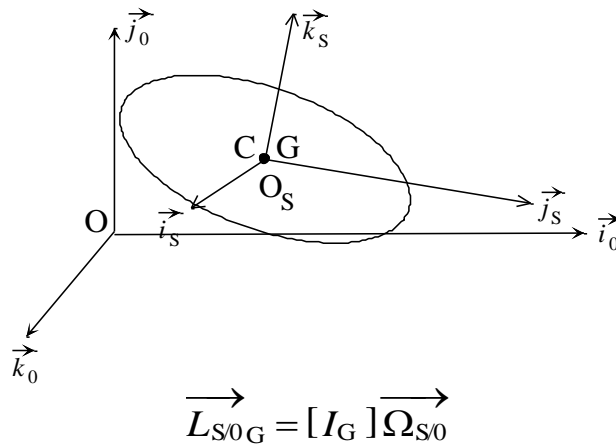
$C$  est confondu avec  $O_S$ , fixe dans  $R_0$



$$\vec{L}_{S/O_{O_S}} = [I_{O_S}] \vec{\Omega}_{S/O}$$



C est confondu avec  $O_S$ , confondus avec  $G...$



Résumé calcul du moment dynamique : <https://www.youtube.com/watch?v=fvn1ZE8RdQc>

## 2 : Principe Fondamental de la Dynamique – PFD

Dans un repère galiléen  $R_0$  ou assimilé (repère dit fixe ou de référence), le torseur en C (point quelconque) des efforts extérieurs appliqués au système  $\Sigma$  est égal au torseur dynamique en C de  $\Sigma$  par rapport à  $R_0$ .

$$[F_{ext/\Sigma}]_C = [N_{\Sigma/0}]_C$$

Ou

<b>Théorème de la résultante dynamique</b>	<b>Théorème du moment dynamique</b>
--	-------------------------------------

$$\vec{F}_{ext/\Sigma} = D_{\Sigma/0}$$

$$\vec{M}_{ext/\Sigma C} = N_{\Sigma/0 C}$$

**Remarques :**

- 1. Tout espace en translation rectiligne uniforme par rapport à un espace galiléen est galiléen.
  - 2. Espaces galiléens
- Espace de Copernic  
 origine : centre de masse du système solaire,  
 axes : définis par des étoiles très lointaines.  
 C'est un excellent espace galiléen pour étudier les mouvements qui se produisent au voisinage du système solaire.

Pour les mouvements terrestres, le sol sera notre référence (assimilé galiléen).

## 2 : choix des équations du PFD pour obtenir les équations de mouvement

- A : Toute étude dynamique d'un système commence par le choix d'un repère de référence galiléen.
- B : Ensuite, il faut fixer, à chaque sous ensemble cinématique constituant le système, un repère.
- C : Les paramètres de position apparaissent alors : ils permettent de passer d'un repère à un autre.
- D : Une dernière étape consiste à déterminer les éventuelles relations entre les paramètres de position.

## Il y a autant d'équations de mouvement à déterminer qu'il existe de paramètres de position indépendants.

La mise en place des paramètres –afin d'éviter les erreurs de signes - se fera de la façon suivante :

- un paramètre de translation sera toujours représenté positif sur le schéma (sa valeur est algébrique)
- un paramètre angulaire sera toujours représenté (de préférence petit) compris entre 0 et  $\pi/2$  (sa valeur est algébrique)

Nous ne sommes pas toujours obligés de développer toutes les équations qu'offre le PFD (6, pour chaque système matériel isolé).

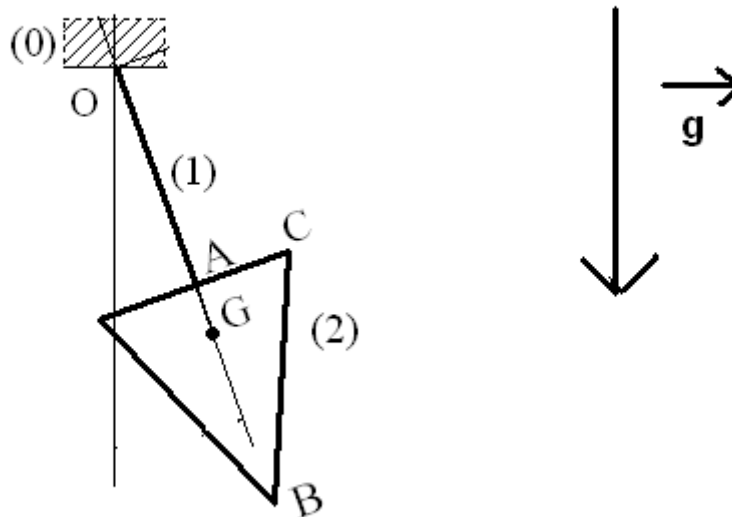
### Le choix des équations à développer se fait à partir des paramètres indépendants :

Pour un paramètre de **translation** suivant un axe  $\vec{u}$  positionnant les solides (S1) et (S2), on écrira **l'équation de la résultante** en projection sur  $\vec{u}$ , et en isolant les solides (S1) et (S2)

Pour un paramètre de **rotation** autour d'un axe  $\vec{u}$  positionnant les solides (S1) et (S2), on écrira **l'équation des moments** en projection sur  $\vec{u}$ , et en isolant les solides (S1) et (S2)

## 1. Un pendule

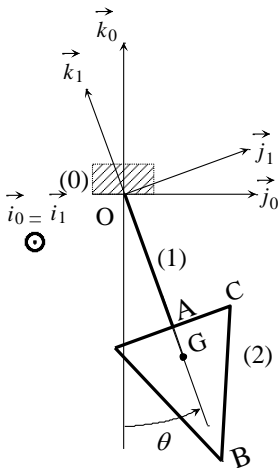
... est constitué d'une barre OA notée (1), de longueur  $H$  ( $OA = H$ ) et de masse  $m_1$ , et d'un cône noté (2), de hauteur  $H$  ( $AB = H$ ), de rayon de base  $R$  ( $AC = R$ ), et de masse  $m_2$ . La liaison entre ces 2 solides est un encastrement au point A. (S) (ensemble  $\{(1),(2)\}$ ) est en liaison pivot en O par rapport au bâti (0). G cdm de (1) et(2),  $OG = a$ .



Déterminer l'équation du mouvement à partir du PFD.

Correction :

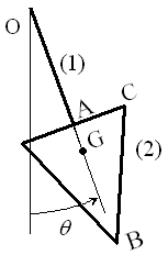
Repères-paramétrage :



Le paramètre de position  $\theta(t)$  est un paramètre de rotation autour de  $(O, \vec{l}_1)$ , il positionne (1) et (2) donc :  
Equation du moment en projection sur  $\vec{l}_1$  en isolant (1) et (2).

Point de calcul ?

On isole (1) et (2) :



Bilan des efforts :

$$\text{liaison pivot en } O : \{Pivot_{0/1}\} = \begin{pmatrix} X & 0 \\ Y & M \\ Z & N \end{pmatrix}_{(O,R_0)} \quad \text{poids en } G : \{Poids\} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -mg & 0 \end{pmatrix}_{(G,R_0)} \quad m = m_1 + m_2$$

Le point de calcul des moments doit être sur  $(O, \vec{l}_1)$ , sinon Y et Z vont apparaître dans l'équation (inconnues de liaison). On choisit donc le point O.

$$\overrightarrow{M_0 \cdot \vec{l}_1} = \overrightarrow{N_{0 \in (1 \cup 2)} \cdot \vec{l}_1}$$

$$\text{Calcul de } \overrightarrow{M_0 \cdot \vec{l}_1} : \overrightarrow{M_0 \cdot \vec{l}_1} = 0 + (\overrightarrow{OG} \wedge -mg\vec{k}_0) \cdot \vec{l}_1 = -amg \cdot \sin\theta$$

$$\text{Calcul de } \overrightarrow{N_{0 \in (1 \cup 2)} \cdot \vec{l}_1} :$$

$$\overrightarrow{N_{0 \in (1 \cup 2)}} = \overrightarrow{N_{0 \in 2}} + \overrightarrow{N_{0 \in 1}}$$

$$\text{Le point } 0 \in (1) \text{ est fixe dans } R_0 \text{ donc : } \overrightarrow{N_{0 \in 1}} = \left. \frac{d\overrightarrow{L_{0 \in 1}}}{dt} \right|_{R_0} ; \text{ et}$$

$$\overrightarrow{L_{0 \in 1}} = [I_{(O, S_1)}] \cdot [\Omega_{S_1/0}] = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{R_1} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{R_1} = A_1 \dot{\theta} \vec{l}_1, \quad \overrightarrow{N_{0 \in 1}} = A_1 \ddot{\theta} \vec{l}_1$$

$$\text{Le point } 0 \in (2) \text{ est fixe dans } R_0 \text{ donc : } \overrightarrow{N_{0 \in 2}} = \left. \frac{d\overrightarrow{L_{0 \in 2}}}{dt} \right|_{R_0} ;$$

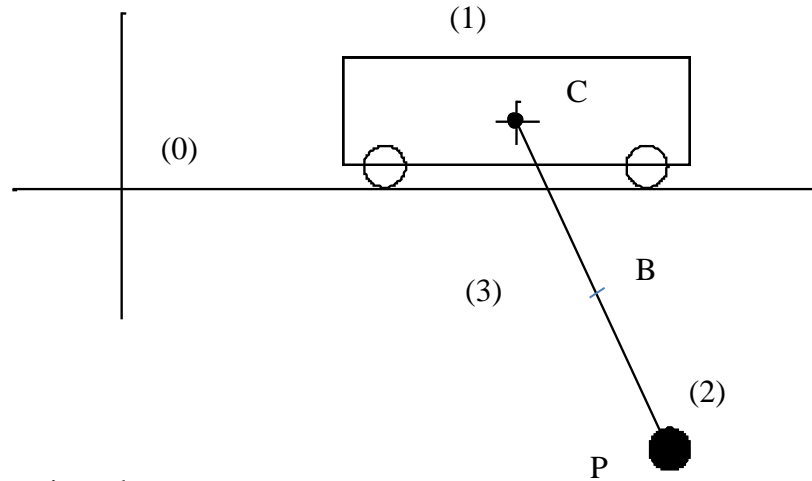
$$\overrightarrow{L_{0 \in 2}} = [I_{(O, S_2)}] \cdot [\Omega_{S_2/0}] = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{R_1} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{R_1} = A_2 \dot{\theta} \vec{l}_1, \quad \overrightarrow{N_{0 \in 2}} = A_2 \ddot{\theta} \vec{l}_1$$

Equation du mouvement :

$$(A_1 + A_2) \ddot{\theta} = -amg \cdot \sin\theta$$

## Le chariot de grue (mouvement horizontal)

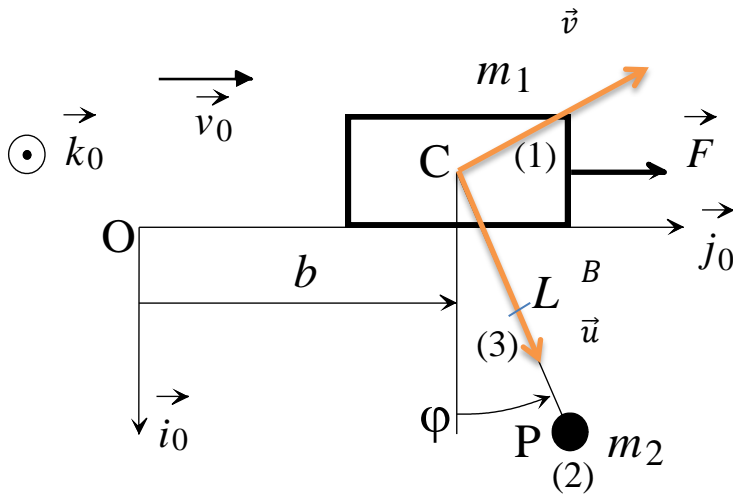
Un chariot de grue (1) (cdm C, masse  $m_1$ ) se déplace sur un bras fixe horizontal (0) (frottements négligés). Une charge (P) ponctuelle (2) (point P, masse  $m_2$ ) se balance au bout d'un câble modélisé par une barre (3) (longueur  $L$ , masse  $m_3$ , cdm B) en liaison pivot sans frottement avec (1) en C. Une force  $F$  horizontale constante tracte (1) vers la droite.



Ecrire les équations de mouvement

Solution :

Repères et paramétrage :



Paramètres de position :  $b(t) = \overrightarrow{OC} \cdot \vec{j}_0$ ,  $\varphi(t) = (\vec{j}_0, \vec{u})$ ,

**Equation liée à  $b(t)$  :**

Paramètre de translation suivant  $\vec{j}_0$  positionnant (1)U(2)U(3) :

$$(m_1 + m_2 + m_3) \overrightarrow{a_G} \cdot \vec{j}_0 = \overrightarrow{F_{ext/(1U2U3)}} \cdot \vec{j}_0$$

Calcul de  $(m_1 + m_2 + m_3) \overrightarrow{a_G} \cdot \vec{j}_0$  :

$$(m_1 + m_2 + m_3) \overrightarrow{a_G} \cdot \vec{j}_0 = (m_1 \overrightarrow{a_C} + m_2 \overrightarrow{a_P} + m_3 \overrightarrow{a_B}) \cdot \vec{j}_0 ;$$

$$\overrightarrow{a_C} \cdot \vec{j}_0 = \ddot{b},$$

$$\overrightarrow{OP} = cte \cdot \vec{i}_0 + b \cdot \vec{j}_0 + L \cdot \vec{u}, \quad \overrightarrow{v_{PE2}} = \dot{b} \vec{j}_0 + L \dot{\varphi} \vec{v}, \quad \overrightarrow{a_{PE2/0}} = \ddot{b} \vec{j}_0 + L \ddot{\varphi} \vec{v} - L \dot{\varphi}^2 \vec{u},$$

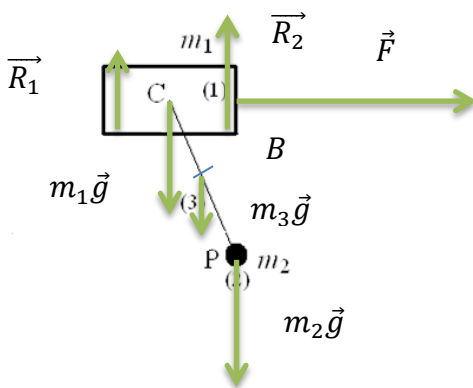
$$\overrightarrow{a_{PE2/0}} \cdot \vec{j}_0 = \ddot{b} + L(\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi),$$

$$\overrightarrow{OB} = cte \cdot \vec{i}_0 + b \cdot \vec{j}_0 + \frac{L}{2} \cdot \vec{u}, \quad \overrightarrow{v_{BE3/0}} = \dot{b} \vec{j}_0 + \frac{L}{2} \dot{\varphi} \vec{v}, \quad \overrightarrow{a_{BE3/0}} = \ddot{b} \vec{j}_0 + \frac{L}{2} \ddot{\varphi} \vec{v} - \frac{L}{2} \dot{\varphi}^2 \vec{u},$$

$$\overrightarrow{a_{BE3/0}} \cdot \vec{j}_0 = \ddot{b} + \frac{L}{2}(\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi),$$

Calcul de  $\overrightarrow{F_{ext/(1U2U3)}} \cdot \vec{j}_0$  :

On isole (1)U(2)U(3)



$\vec{R}_1$  et  $\vec{R}_2$  réactions des roues sur (1),  $m_i \vec{g}$  les 3 poids et  $\vec{F}$  force de traction, donc :

$$\overrightarrow{F_{ext/(1U2U3)}} \cdot \vec{j}_0 = F$$

Equation liée à  $b(t)$  :  $(m_1 + m_2 + m_3) \ddot{b} + \left(m_2 + \frac{m_3}{2}\right) L(\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi) = F$

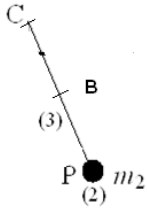
## Equation liée à $\varphi(t)$ :

Paramètre de rotation suivant  $\vec{k}_0$  positionnant (2)U(3) :

Equation du moment en projection sur  $\vec{k}_0$  en isolant (2)U(3).

Point de calcul ?

On isole (2)U(3) :



Pivot en C, poids en B et en P, donc on calcule les moments en C

$$\overrightarrow{M_C} \cdot \vec{k}_0 = \overrightarrow{N_{CE(2 \cup 3)}} \cdot \vec{k}_0$$

Calcul de  $\overrightarrow{M_C} \cdot \vec{k}_0$

$$\overrightarrow{M_C} \cdot \vec{k}_0 = 0 + (\overrightarrow{CB} \wedge m_3 g \vec{u}_0 + \overrightarrow{CP} \wedge m_2 g \vec{u}_0) \cdot \vec{k}_0 = -Lg \cdot \sin\varphi \left( m_2 + \frac{m_3}{2} \right)$$

Calcul de  $\overrightarrow{N_{CE(2 \cup 3)}} \cdot \vec{k}_0$

$$\overrightarrow{N_{CE(2 \cup 3)}} \cdot \vec{k}_0 = \overrightarrow{N_{CE2}} \cdot \vec{k}_0 + \overrightarrow{N_{CE3}} \cdot \vec{k}_0,$$

$\overrightarrow{N_{CE3}} \cdot \vec{k}_0$  :

CE3 n'est pas fixe dans  $R_0$ , donc on passe par le cdm de (3) : B

$$\overrightarrow{N_{CE3}} \cdot \vec{k}_0 = (\overrightarrow{N_{BE3}} + \overrightarrow{CB} \wedge m_3 \overrightarrow{a_{BE3/0}}) \cdot \vec{k}_0$$

$$\overrightarrow{N_{BE3}} \cdot \vec{k}_0 = \left. \frac{d\overrightarrow{L_{BE3}}}{dt} \right|_{R_0} \cdot \vec{k}_0 = \left. \frac{d(\overrightarrow{L_{BE3}} \cdot \vec{k}_0)}{dt} \right|_{R_0} \text{ car } \vec{k}_0 \text{ fixe dans } R_0$$

$$\overrightarrow{L_{BE3}} = [I_{(B, S_3)}] \cdot [\Omega_{S_3/0}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_3 L^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_3 L^2}{12} \end{pmatrix}_{R_1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix}_{R_1} = \frac{m_3 L^2}{12} \dot{\varphi} \vec{k}_0,$$

$$\overrightarrow{L_{BE3}} \cdot \vec{k}_0 = \frac{m_3 L^2}{12} \dot{\varphi}, \quad \overrightarrow{N_{BE3}} \cdot \vec{k}_0 = \frac{m_3 L^2}{12} \ddot{\varphi},$$

Par permutation circulaire dans le produit mixte :

$$(\overrightarrow{CB} \wedge m_3 \overrightarrow{a_{BE3/0}}) \cdot \vec{k}_0 = \left( \vec{k}_0 \wedge \frac{L}{2} \vec{u} \right) \cdot m_3 \overrightarrow{a_{BE3/0}} = \frac{L}{2} \vec{v} \cdot m_3 (\ddot{b} \vec{J}_0 + \frac{L}{2} \ddot{\varphi} \vec{v} - \frac{L}{2} \dot{\varphi}^2 \vec{u}) = \frac{L m_3}{2} (\ddot{b} \cos\varphi + \frac{L}{2} \ddot{\varphi}),$$

$$\text{Donc } \overrightarrow{N_{CE3}} \cdot \vec{k}_0 = \frac{L m_3}{2} \ddot{b} \cos\varphi + \frac{m_3 L^2}{3} \ddot{\varphi}$$

$\overrightarrow{N_{CE2}} \cdot \vec{k}_0$  :

CE2 n'est pas fixe dans  $R_0$ , donc on passe par le cdm de (2) : P

$$\overrightarrow{N_{CE2}} \cdot \vec{k}_0 = (\overrightarrow{N_{PE2}} + \overrightarrow{CP} \wedge m_2 \overrightarrow{a_{PE2}}) \cdot \vec{k}_0,$$

$$\overrightarrow{N_{PE2}} \cdot \vec{k}_0 = \left. \frac{d\overrightarrow{L_{PE2}}}{dt} \right|_{R_0} \cdot \vec{k}_0, \quad \overrightarrow{L_{PE2}} = [I_{(P, S_2)}] \cdot [\Omega_{S_2/0}], \quad [I_{(P, S_2)}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{R_1} \text{ car P masse ponctuelle}$$

$$\text{Donc } \overrightarrow{N_{PE2}} \cdot \vec{k}_0 = 0$$

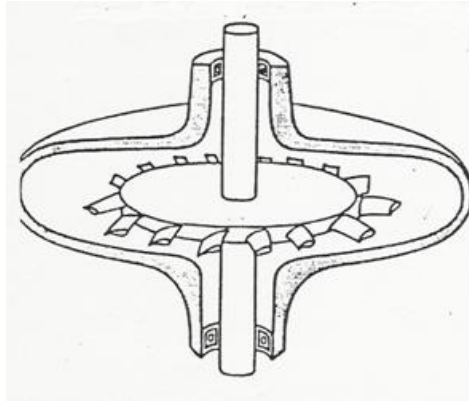
$$\overrightarrow{N_{CE2}} \cdot \vec{k}_0 = (\overrightarrow{CP} \wedge m_2 \overrightarrow{a_{PE2}}) \cdot \vec{k}_0 = (\ddot{b} \cos\varphi + L \ddot{\varphi}) L m_2,$$

Equation liée à  $\varphi(t)$  :

$$\left( \frac{m_3}{2} + m_2 \right) L \ddot{b} \cos\varphi + \left( \frac{m_3}{3} + m_2 \right) \ddot{\varphi} L^2 = -Lg \cdot \sin\varphi \left( m_2 + \frac{m_3}{2} \right)$$

## Pale de turbine

On se propose d'étudier l'allure des phénomènes de résonance qui pourraient se produire dans une structure de type machine tournante, en utilisant un modèle très simplifié.



Le rotor (1) de la machine est représenté par un solide de révolution. H désigne son centre de masse. On note  $M$  sa masse et  $I$  son moment d'inertie par rapport à son axe.

La liaison entre le stator et le rotor est de type **pivot glissant parfait** à laquelle se superpose une raideur axiale : le rotor peut se déplacer en translation verticale autour d'une position moyenne correspondant à H en O - le rappel vers cette position est schématisé par un ressort linéaire de raideur  $K$  et de longueur à vide nulle (l'écrasement du ressort en statique compense le poids de l'ensemble : on met à zéro longueur à vide et poids du système !)

Simultanément, un moteur exerce sur (1) un couple  $C_m(t)$ , imposant une rotation uniforme autour de l'axe du rotor vertical, de vitesse angulaire  $\Omega = \dot{\varphi} = cte$  ( $\Omega > 0$ ).

$N$  solides identiques ( $P_k$ ), appelés pales, sont reliés au rotor (1) de la machine, de façon identique, en des points  $A_k$  régulièrement répartis sur une circonférence, de centre H, et de rayon  $R$ .

Afin de modéliser la flexion des pales sous charge, on remplace la liaison encastrement avec le rotor par une liaison pivot d'axe orthoradial en  $A_k$ , couplé à un ressort de torsion de même axe au même point, de raideur  $C$  tel que la pale reste horizontale au repos.

Dans notre étude simplifiée, on considère (1) muni d'une seule pale (P) et le point A associé.

G est le centre de masse de (P), et  $AG = L$  (*constante positive*)

On néglige le moment d'inertie de la pale autour de AG (deuxième axe ici), ce qui amène à prendre une matrice d'inertie en G sous une forme simple :

$$[I_{G,pale}] = \begin{bmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_p \end{bmatrix}_{(G,R_{pale})}$$

Et on désigne par  $m$  la masse de la pale.

De plus, des forces dues à l'action du fluide s'opposent au mouvement de la pale (P) par rapport à  $R_0$ . Cet ensemble de forces est considéré comme équivalent à une seule force continuellement appliquée en G :

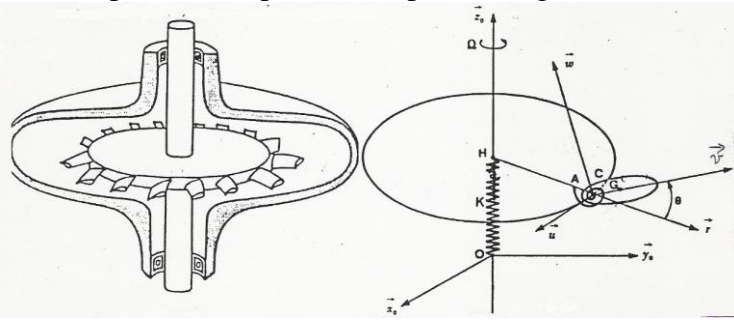
$$\vec{F}_{fl} = -b \vec{v}(G)_{P/0}$$

où  $b$  désigne une constante positive

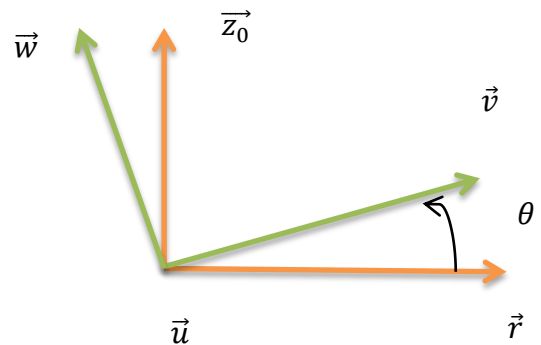
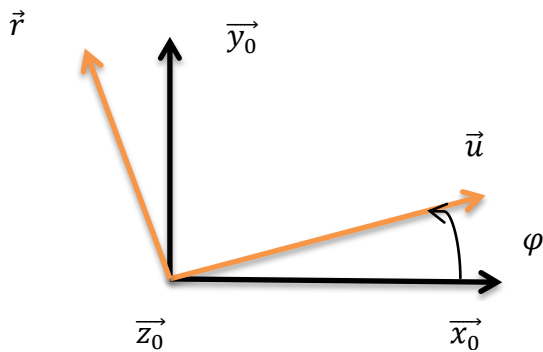
Déterminer les équations du mouvement du système.

## Résolution du problème :

Mise en place des repères et du paramétrage :



$$\vec{OH} = z(t)\vec{z}_0, \vec{HA} = R\vec{r}, \vec{AG} = L\vec{v}$$



3 paramètres de position, donc 3 équations de mouvement :

**Equation relative à  $\varphi(t)$  :**

$$\dot{\varphi} = cte \text{ donc } \varphi(t) = \Omega \cdot t + \varphi_0$$

**Equation relative à  $z(t)$  :**

$$(m + M)\vec{a}_B \cdot \vec{z}_0 = \vec{F}_{ext/(PUR)} \cdot \vec{z}_0, \text{ avec B cdm de l'ensemble Pale + Rotor}$$

Calcul de  $(m + M)\vec{a}_B \cdot \vec{z}_0$  :

$$(m + M)\vec{a}_{BE(PUR)/R_0} \cdot \vec{z}_0 = (m\vec{a}_{GEP} + M\vec{a}_{HER}) \cdot \vec{z}_0$$

$$\frac{\vec{a}_{HER}}{R_0} \cdot \vec{z}_0 = \ddot{z},$$

$$\vec{OG} = z(t)\vec{z}_0 + R\vec{r} + L\vec{v}, \quad \frac{\vec{v}_{GEP}}{R_0} = \dot{z}\vec{z}_0 - R\Omega\vec{u} + L(\dot{\theta}\vec{w} - \Omega\cos\theta\vec{u}) = \dot{z}\vec{z}_0 - \Omega(R + L\cos\theta)\vec{u} + L\dot{\theta}\vec{w},$$

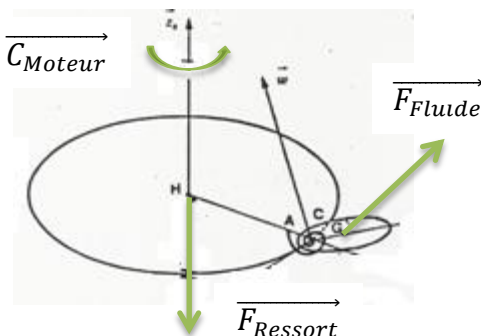
$$\frac{\vec{a}_{GEP}}{R_0} = \ddot{z}\vec{z}_0 + \Omega\dot{\theta}L\sin\theta\vec{u} - \Omega^2(R + L\cos\theta)\vec{r} + L\ddot{\theta}\vec{w} + L\dot{\theta}(-\dot{\theta}\vec{v} + \Omega\sin\theta\vec{u}), \left(\frac{d\vec{w}}{dt}\right)_{R_0} = -\dot{\theta}\vec{v} + \Omega\sin\theta\vec{u},$$

$$\frac{\vec{a}_{GEP}}{R_0} = \ddot{z}\vec{z}_0 + 2\Omega\dot{\theta}L\sin\theta\vec{u} - \Omega^2(R + L\cos\theta)\vec{r} + L\ddot{\theta}\vec{w} - L\dot{\theta}^2\vec{v},$$

$$(m + M)\vec{a}_{BE(PUR)/R_0} \cdot \vec{z}_0 = (m + M)\ddot{z} + m(L\ddot{\theta}\cos\theta - L\dot{\theta}^2\sin\theta),$$

Calcul de  $\vec{F}_{ext/(PUR)} \cdot \vec{z}_0$

On isole  $(P)U(R)$  : bilan des efforts extérieurs (poids négligés)



$$\vec{F}_{ext/(PUR)} \cdot \vec{z}_0 = (\vec{F}_{Ressort} - b\frac{\vec{v}_{GEP}}{R_0}) \cdot \vec{z}_0,$$

$$\vec{F}_{ext/(PUR)} \cdot \vec{z}_0 = -Kz(t) - b(\dot{z} + L\dot{\theta}\cos\theta),$$

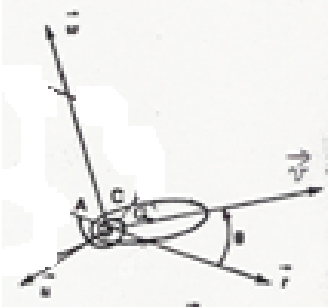


Equation relative à  $z(t)$  :  $(m + M)\ddot{z} + m(L\ddot{\theta}\cos\theta - L\dot{\theta}^2\sin\theta) = -Kz(t) - b(\dot{z} + L\dot{\theta}\cos\theta)$

## Equation relative à $\theta(t)$ :

Paramètre de rotation suivant  $\vec{z}_0$  positionnant la pale (P) :

On isole (P) : bilan des efforts extérieurs



Force du fluide en G

Pivot en A d'axe  $(A, \vec{u})$

Ressort de torsion d'axe  $(A, \vec{u})$  et de raideur C

Donc le point de calcul des moments est A

$$\overrightarrow{M}_A \cdot \vec{u} = \overrightarrow{N}_{A \in (P)} \cdot \vec{u}$$

Calcul de  $\overrightarrow{M}_A \cdot \vec{u}$  :

$$\overrightarrow{M}_A \cdot \vec{u} = 0 - C\theta + (\overrightarrow{AG} \wedge -b\overrightarrow{V}_G) \cdot \vec{u} = -C\theta - b(\vec{u} \wedge L\vec{v}) \cdot \overrightarrow{V}_G = -C\theta - bL\vec{w} \cdot (\dot{z}\vec{z}_0 - \Omega(R + L\cos\theta)\vec{u} + L\dot{\theta}\vec{w}),$$

$$\overrightarrow{M}_A \cdot \vec{u} = -C\theta - bL(\dot{z}\cos\theta + L\dot{\theta})$$

Calcul de  $\overrightarrow{N}_{A \in (P)} \cdot \vec{u}$  :

$A \in (P)$  n'est pas fixe dans  $R_0$  donc on passe par le cdm de (P) : G

$$\overrightarrow{N}_{A \in (P)} \cdot \vec{u} = \left( \overrightarrow{N}_{G \in (P)} + \overrightarrow{AG} \wedge m \overrightarrow{a}_{G \in (P)} \right) \cdot \vec{u},$$

$$\overrightarrow{N}_{G \in (P)} \cdot \vec{u} = \left. \frac{dL_{G \in (P)}}{dt} \right|_{R_0} \cdot \vec{u},$$

$$\overrightarrow{L}_{G \in (P)} = [I_{(G,P)}] \cdot [\Omega_{P/0}] = \begin{pmatrix} I_P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_P \end{pmatrix}_{R_P} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \Omega \sin\theta \\ \Omega \cos\theta \end{pmatrix}_{R_P} = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \cdot I_P \\ 0 \\ \Omega \cos\theta \cdot I_P \end{pmatrix}_{R_P},$$

$\overrightarrow{N}_{G \in (P)} \cdot \vec{u}$  : pour effectuer ce calcul simplement, on dérive et on projette en même temps !

On remarque que  $\left. \frac{d\vec{u}}{dt} \right|_{R_0} \cdot \vec{u} = 0$ , et  $\vec{w} \cdot \vec{u} = 0$

$$D'où : \overrightarrow{N}_{G \in (P)} \cdot \vec{u} = \ddot{\theta} \cdot I_P + \Omega \cos\theta \cdot I_P \left( \left. \frac{d\vec{w}}{dt} \right|_{R_0} \cdot \vec{u} \right) = \ddot{\theta} \cdot I_P + \Omega^2 \sin\theta \cos\theta \cdot I_P$$

$$\left( \overrightarrow{AG} \wedge m \overrightarrow{a}_{G \in (P)} \right) \cdot \vec{u} = (\vec{u} \wedge L\vec{v}) \cdot m \overrightarrow{a}_{G \in (P)} = Lm\vec{w} \cdot (\dot{z}\vec{z}_0 + 2\Omega\dot{\theta}L\sin\theta\vec{u} - \Omega^2(R + L\cos\theta)\vec{r} + L\ddot{\theta}\vec{w} - L\dot{\theta}^2\vec{v})$$

$$\left( \overrightarrow{AG} \wedge m \overrightarrow{a}_{G \in (P)} \right) \cdot \vec{u} = Lm(\dot{z}\cos\theta + \Omega^2(R + L\cos\theta)\sin\theta + L\ddot{\theta})$$

$$\text{Donc } \overrightarrow{N}_{A \in (P)} \cdot \vec{u} = \ddot{\theta} \cdot I_P + \Omega^2 \sin\theta \cos\theta \cdot I_P + Lm(\dot{z}\cos\theta + \Omega^2(R + L\cos\theta)\sin\theta + L\ddot{\theta})$$

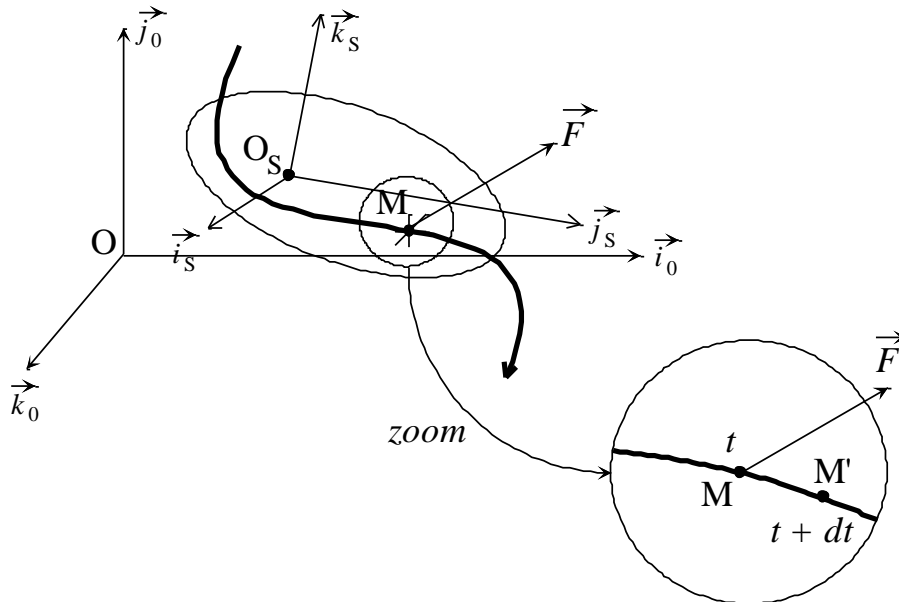
Equation relative à  $\theta(t)$  :

$$\ddot{\theta} \cdot I_P + \Omega^2 \sin\theta \cos\theta \cdot I_P + Lm(\dot{z}\cos\theta + \Omega^2(R + L\cos\theta)\sin\theta + L\ddot{\theta}) = -C\theta - bL(\dot{z}\cos\theta + L\dot{\theta})$$

Chapitre 3 : travail, puissance – énergie potentielle, énergie cinétique

1 : travail, puissance

Travail élémentaire et puissance d'une force



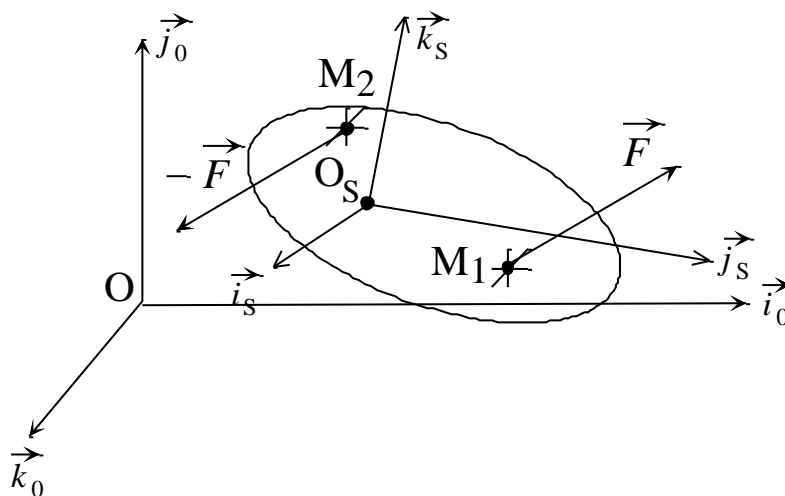
Travail élémentaire de la force, dans son déplacement... élémentaire MM' :

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{OM}$$

Puissance de cette même force :

$$P = \frac{\delta W}{dt} \quad P = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{OM}}{dt} \quad \left( = \vec{F} \cdot \vec{v}(M) \right)$$

Travail élémentaire et puissance d'un couple



Un couple est une action mécanique que nous pouvons représenter sous la forme de 2 forces « égales et opposées » (sic), appliquées en 2 points du solide.

Le torseur associé aux actions  $\{\vec{F}, -\vec{F}\}$  s'écrit :

$$\text{Résultante : } \vec{0}. \quad \text{Moment en } M_1 : \overrightarrow{M_1 M_2} \wedge (-\vec{F})$$

$$c \text{ est un couple } \left[ \vec{0} \mid \vec{C} \right]_{VP}$$

*Puissance du couple*

$$P(\vec{F}, -\vec{F}) = \vec{F} \cdot \overrightarrow{v(M_1)}_{S/0} + (-\vec{F}) \cdot \overrightarrow{v(M_2)}_{S/0}$$

$$P(\vec{F}, -\vec{F}) = \vec{F} \cdot \overrightarrow{v(M_1)}_{S/0} - \vec{F} \cdot \left( \overrightarrow{v(M_1)}_{S/0} + \overrightarrow{\Omega}_{S/0} \wedge \overrightarrow{M_1 M_2} \right)$$

$$P(\vec{F}, -\vec{F}) = -\vec{F} \cdot \left( \overrightarrow{\Omega}_{S/0} \wedge \overrightarrow{M_1 M_2} \right)$$

Expression dans laquelle apparait le produit mixte...

$$P(\vec{F}, -\vec{F}) = \overrightarrow{\Omega}_{S/0} \cdot \left( \overrightarrow{M_1 M_2} \wedge -\vec{F} \right)$$

$$P(\vec{F}, -\vec{F}) = \overrightarrow{\Omega}_{S/0} \cdot \left( \overrightarrow{M_2 M_1} \wedge \vec{F} \right)$$

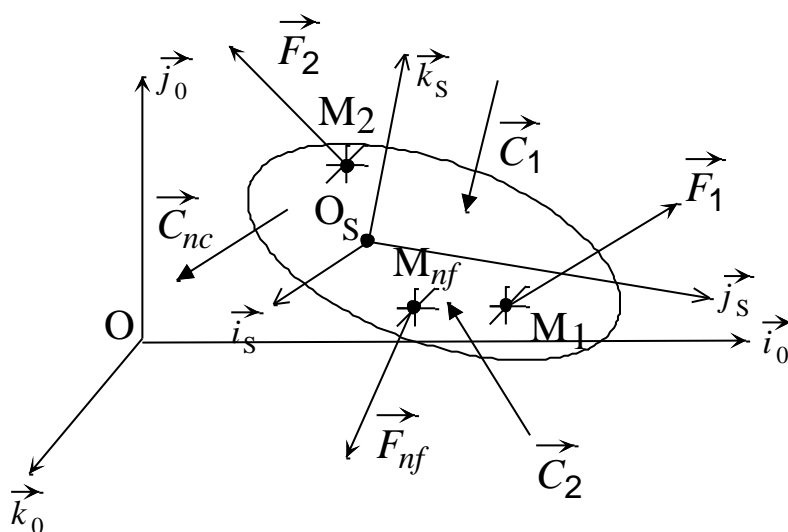
$$P(\vec{F}, -\vec{F}) = \overrightarrow{\Omega}_{S/0} \cdot \vec{C} \quad P(\vec{C}) = \vec{C} \cdot \overrightarrow{\Omega}_{S/0}$$

Grande similitude des résultats :

$$\begin{array}{ll} P(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \overrightarrow{v(M)} & P(\vec{C}) = \vec{C} \cdot \overrightarrow{\Omega}_{S/0} \\ \delta W(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \overrightarrow{v(M)} dt & \delta W(\vec{C}) = \vec{C} \cdot \overrightarrow{\Omega}_{S/0} dt \\ \delta W(\vec{F}) = \vec{F} \cdot d\overrightarrow{OM} & \delta W(\vec{C}) = \vec{C} \cdot d\vec{\theta} \end{array}$$

## Travail élémentaire et puissance d'un système d'actions mécaniques extérieures s'exerçant sur un solide

Le solide est noté (S). Le système d'actions mécaniques comprend  $n_f$  forces et  $n_c$  couples.



$$P(\text{actions extérieures}) = \sum_{i=1}^{nf} \vec{F}_i \cdot \vec{v}(\mathbf{M}_i)_{S/0} + \sum_{j=1}^{nc} \vec{C}_j \cdot \vec{\Omega}_{S/0}$$

$$P(\text{actions extérieures}) = \sum_{i=1}^{nf} \vec{F}_i \cdot \left( \vec{v}(\mathbf{A})_{S/0} + \vec{\Omega}_{S/0} \wedge \overrightarrow{\mathbf{AM}_i} \right) + \sum_{j=1}^{nc} \vec{C}_j \cdot \vec{\Omega}_{S/0}$$

$$P(\text{actions extérieures}) = \left( \sum_{i=1}^{nf} \vec{F}_i \right) \cdot \vec{v}(\mathbf{A})_{S/0} + \sum_{i=1}^{nf} \vec{F}_i \cdot \left( \vec{\Omega}_{S/0} \wedge \overrightarrow{\mathbf{AM}_i} \right) + \sum_{j=1}^{nc} \vec{C}_j \cdot \vec{\Omega}_{S/0}$$

Et...

$$\left( \sum_{i=1}^{nf} \vec{F}_i \right) \cdot \vec{v}(\mathbf{A})_{S/0} = \vec{F}_{\text{ext}/S} \cdot \vec{v}(\mathbf{A})_{S/0}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{nf} \vec{F}_i \cdot \left( \vec{\Omega}_{S/0} \wedge \overrightarrow{\mathbf{AM}_i} \right) + \sum_{j=1}^{nc} \vec{C}_j \cdot \vec{\Omega}_{S/0} &= \sum_{i=1}^{nf} \left[ \vec{\Omega}_{S/0} \cdot \left( \overrightarrow{\mathbf{AM}_i} \wedge \vec{F}_i \right) \right] + \sum_{j=1}^{nc} \vec{C}_j \cdot \vec{\Omega}_{S/0} \\ &= \left[ \sum_{i=1}^{nf} \left( \overrightarrow{\mathbf{AM}_i} \wedge \vec{F}_i \right) + \sum_{j=1}^{nc} \vec{C}_j \right] \cdot \vec{\Omega}_{S/0} \end{aligned}$$

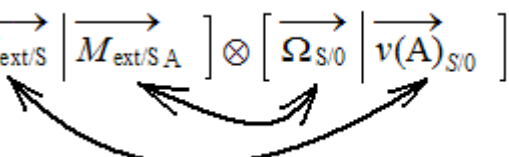
Avec...

$$\left[ \sum_{i=1}^{nf} \left( \overrightarrow{\mathbf{AM}_i} \wedge \vec{F}_i \right) + \sum_{j=1}^{nc} \vec{C}_j \right] \cdot \vec{\Omega}_{S/0} = \vec{M}_{\text{ext}/S_A} \cdot \vec{\Omega}_{S/0}$$

En définitive :

$$P(\text{actions extérieures}) = \vec{F}_{\text{ext}/S} \cdot \vec{v}(\mathbf{A})_{S/0} + \vec{M}_{\text{ext}/S_A} \cdot \vec{\Omega}_{S/0}$$

La puissance des forces extérieures correspond au « comoment » du torseur des actions mécaniques extérieures et du torseur cinématique du solide.

$$P(\text{actions extérieures}) = \left[ \vec{F}_{\text{ext}/S} \mid \vec{M}_{\text{ext}/S_A} \right] \otimes \left[ \vec{\Omega}_{S/0} \mid \vec{v}(\mathbf{A})_{S/0} \right]$$


Mais attention !

Le résultat doit être homogène ! Puissance en  $W$ , donc des «  $(N) \times (m/s)$  » ou des «  $(N.m) \times (rad/s)$  ».

Voilà pour la puissance ! Pour le travail, imaginez vous-même... C'est assez simple.

**Travail élémentaire et puissance d'un système d'actions mécaniques extérieures s'exerçant sur un ensemble de solides**

Soit un système  $\Sigma$  composé de  $ns$  solides  $S_i$  :

$$\Sigma = \bigcup_{i=1}^{ns} S_i$$

$i$  dénombre ici le... nombre de solides !

## Puissance extérieure

La puissance extérieure est la puissance développée par les *actions mécaniques extérieures* au système *isolé*. Elle est égale à la somme des comoments entre le torseur des efforts extérieurs et le *torseur cinématique de chaque solide* composant le système.

$$P(\text{actions extérieures}/\Sigma) = \sum_{i=1}^{ns} \left[ \overrightarrow{F}_{\text{ext}/S_i} \cdot \overrightarrow{v}(A_i)_{S/0} + \overrightarrow{M}_{\text{ext}/S A_i} \cdot \overrightarrow{\Omega}_{S_i/0} \right]$$

## Puissance intérieure

La puissance intérieure est la puissance développée par les *actions mécaniques intérieures* à chacun des solides et les *inter-efforts de liaison* entre les solides qui composent le système  $\Sigma$ .

1) *Puissance des forces intérieures* à un solide indéformable (efforts de cohésion, attraction universelle). Ces forces intérieures vont toujours par paire !

Considérons 2 points d'un solide (S), notés  $M_1$  et  $M_2$ .

$$P(\overrightarrow{F}_{M_1/M_2}, \overrightarrow{F}_{M_2/M_1}) = \overrightarrow{F}_{M_2/M_1} \cdot \overrightarrow{v}(M_1)_{S/0} + \overrightarrow{F}_{M_1/M_2} \cdot \overrightarrow{v}(M_2)_{S/0}$$

$$P(\overrightarrow{F}_{M_1/M_2}, \overrightarrow{F}_{M_2/M_1}) = \overrightarrow{F}_{M_2/M_1} \cdot \left( \overrightarrow{v}(M_1)_{S/0} - \left( \overrightarrow{v}(M_1)_{S/0} + \overrightarrow{\Omega}_{S/0} \wedge \overrightarrow{M_1 M_2} \right) \right)$$

$$P(\overrightarrow{F}_{M_1/M_2}, \overrightarrow{F}_{M_2/M_1}) = \overrightarrow{F}_{M_2/M_1} \cdot \left( \overrightarrow{\Omega}_{S/0} \wedge \overrightarrow{M_1 M_2} \right)$$

Or les actions réciproques entre  $M_1$  sur  $M_2$  sont portées par la droite passant précisément par ces 2 points.

$$P(\overrightarrow{F}_{M_1/M_2}, \overrightarrow{F}_{M_2/M_1}) = \vec{0}$$

La puissance des forces intérieures à un solide **indéformable** est **nulle** !

La puissance des forces intérieures à un solide **déformable** est, a priori, **non nulle** !

2) *Puissance des inter-efforts de liaison internes* à un système de solides

$$P(S_i \leftrightarrow S_j) = \left[ \overrightarrow{F}_{S_i/S_j} \mid \overrightarrow{M}_{S_i/S_j A} \right] \otimes \left[ \overrightarrow{\Omega}_{S_j/0} \mid \overrightarrow{v}(A)_{S_j/0} \right] +$$

$$\left[ \overrightarrow{F}_{S_j/S_i} \mid \overrightarrow{M}_{S_j/S_i A} \right] \otimes \left[ \overrightarrow{\Omega}_{S_i/0} \mid \overrightarrow{v}(A)_{S_i/0} \right]$$

$$P(S_i \leftrightarrow S_j) = \left[ \overrightarrow{F}_{S_i/S_j} \mid \overrightarrow{M}_{S_i/S_j A} \right] \otimes \left[ \overrightarrow{\Omega}_{S_j/S_i} \mid \overrightarrow{v}(A)_{S_j/S_i} \right]$$

Si la liaison est sans frottement, les torseurs ci-dessus sont complémentaires et les comoments sont nuls ! Mais si la liaison est **avec** frottement, et si les solides sont en mouvement l'un par rapport à l'autre, alors la puissance de ces inter-efforts de liaison n'est pas nulle ! Elle est négative : il y a dissipation d'énergie.

**Puissance mécanique** : c'est la somme des puissances intérieures et extérieures.

$$P_{\text{méc}} = P_{\text{ext}} + P_{\text{int}}$$

## Remarque

La puissance est un scalaire : elle est donc indépendante des repères de projection et des points d'application des torseurs.

Unité : le Watt :  $1 W = 1 J/s = 1 N.m/s = 1 Nm.rad/s$

Résumé sur la puissance : <https://www.youtube.com/watch?v=yZfQ0V5vLX0>

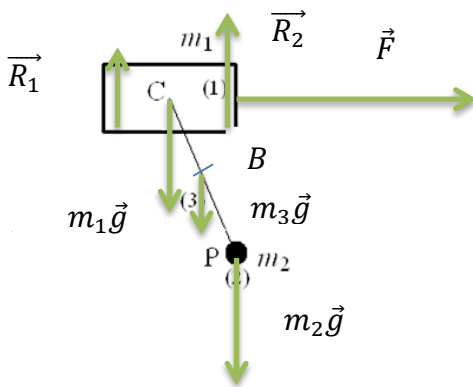
## Exemple : calculer la puissance mécanique du chariot de grue.

Réponse :

Le chariot de grue est composé de trois parties

Puissance des efforts extérieurs :

On isole (1)U(2)U(3)



$$P_{ext} = \vec{R}_1 \cdot \vec{V}_{I_1} + \vec{R}_2 \cdot \vec{V}_{I_2} + m_1 \vec{g} \cdot \vec{V}_C + m_2 \vec{g} \cdot \vec{V}_P + m_3 \vec{g} \cdot \vec{V}_B + \vec{F} \cdot \vec{V}_C$$

Avec  $I_1$  et  $I_2$  points d'application de  $\vec{R}_1$  et  $\vec{R}_2$

$$P_{ext} = F \cdot \dot{b} - \sin\varphi \left( m_2 + \frac{m_3}{2} \right) \cdot L \dot{\varphi} g$$

Puissance des efforts intérieurs :

$$P_{int} = P_{1 \leftrightarrow 2} + P_{1 \leftrightarrow 3} + P_{3 \leftrightarrow 2}$$

$$P_{1 \leftrightarrow 2} = 0 \text{ car il n'y a pas d'inter effort entre (1) et (2)}$$

$$P_{1 \leftrightarrow 3} = \{Pivot_{1/3}\} \times \{Effort_{3 \rightarrow 1}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \dot{\varphi} & 0 \end{Bmatrix}_C \cdot \begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & 0 \end{Bmatrix}_C = 0, \text{ pivot parfaite}$$

$$P_{3 \leftrightarrow 2} = 0 \text{ car 2 et 3 sont en liaison encastrement (pas de mouvement relatif).}$$

$$\text{Donc } P = F \cdot \dot{b} - \sin\varphi \left( m_2 + \frac{m_3}{2} \right) \cdot L \dot{\varphi} g$$

## 2 Energies

### Energie potentielle

Une force dérive d'une énergie potentielle si

$$\vec{F} = -\overrightarrow{grad}(E_{pot}) \quad \vec{F} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial E_{pot}}{\partial x} \\ \frac{\partial E_{pot}}{\partial y} \\ \frac{\partial E_{pot}}{\partial z} \end{bmatrix} \quad \vec{F} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} E_{pot}$$

Cette fonction énergie potentielle ne dépend que de la **position** du point d'application de la force et ne dépend donc pas **explicitement** du temps !

$$\frac{\partial E_{pot}}{\partial t} = 0$$

## Remarque

Toutes les forces dissipatives de type frottement sont donc exclues de cette catégorie.

Les forces dérivant d'un potentiel seront principalement les forces constantes (le poids notamment) et les forces développées par les ressorts.

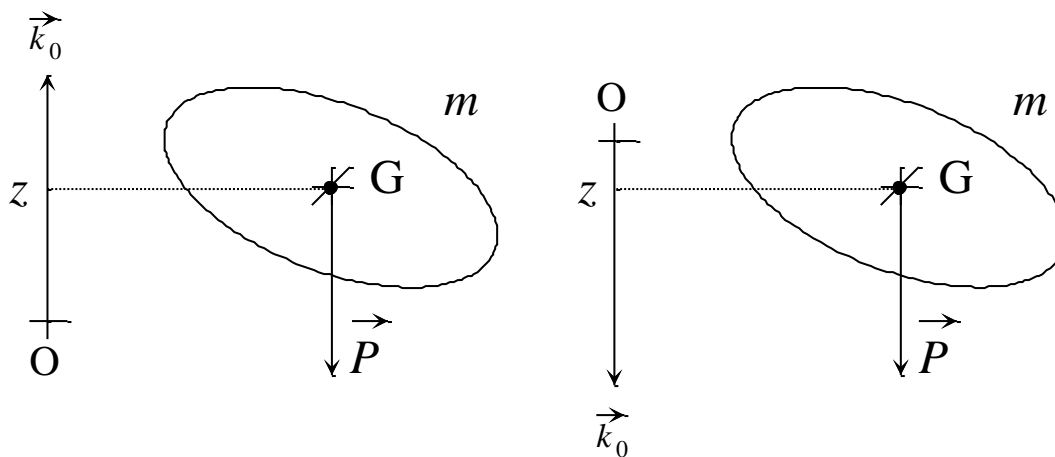
## Expression de la puissance d'une force dérivant d'un potentiel :

$$P = \vec{F} \cdot \vec{V}_M,$$

$$\vec{F} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial E_{pot}}{\partial x} \\ \frac{\partial E_{pot}}{\partial y} \\ \frac{\partial E_{pot}}{\partial z} \end{bmatrix}, \vec{V}_M = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix}, \vec{F} \cdot \vec{V}_M = - \left( \frac{\partial E_{pot}}{\partial x} \cdot \dot{x} + \frac{\partial E_{pot}}{\partial y} \cdot \dot{y} + \frac{\partial E_{pot}}{\partial z} \cdot \dot{z} \right) = - \frac{dE_{pot}}{dt} \quad \text{car} \quad \frac{\partial E_{pot}}{\partial t} = 0$$

Donc  $P = - \frac{dE_{pot}}{dt}$

## Exemple : poids (force constante)



$$E_{pot} = mgz + cste$$

$$E_{pot} = -mgz + cste$$

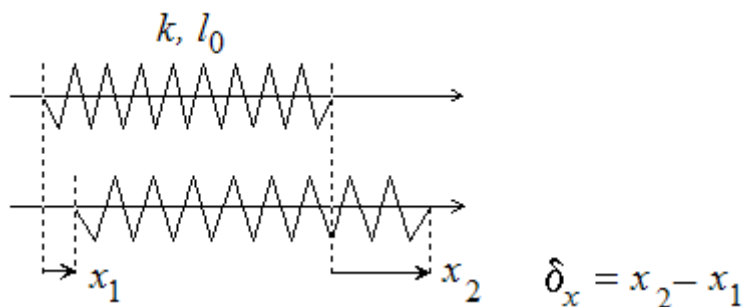
Retenir : plus la masse est élevée, plus son énergie potentielle est importante !

$$E_{pot}(\text{poids}) = -\vec{OG} \cdot \vec{P} + cste$$

Démonstration :

$$P = \vec{P} \cdot \vec{V}_G = \vec{P} \cdot \frac{d\vec{OG}}{dt} = \frac{d(\vec{OG} \cdot \vec{P})}{dt} = - \frac{dE_{pot}}{dt}, \text{ donc } E_{pot} = -\vec{OG} \cdot \vec{P} + cte$$

## Exemple : ressort de traction-compression



$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} k_x \delta_x^2 + cste$$

*ressort de torsion*

$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} k_\theta \delta_\theta^2 + cste$$

*Retenir* : plus la déformation du ressort est grande, plus son énergie potentielle est importante !

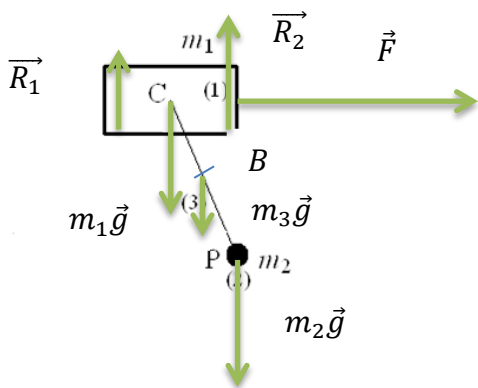
*Démonstration* :

$$P = \vec{C}_R \cdot \vec{\Omega} = -k_\theta \cdot \theta \cdot \dot{\theta} = -\frac{dE_{\text{pot}}}{dt}, \text{ donc } E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} k_\theta (\theta - \theta_0)^2 + cte,$$

**Remarque** : l'énergie potentielle est définie à une constante additive près. Cette constante dépend de la référence choisie. Elle ne sera jamais déterminée car, en pratique, seules les dérivées de l'énergie potentielle seront utiles.

**Exemple** : calculer l'énergie potentielle du chariot de grue

Réponse :



$$E_{\text{pot}} = -F \cdot b - \frac{L}{2} m_3 g \cos \varphi - L m_2 g \cos \varphi + cte$$

Remarque : par dérivation on retrouve

$$P_{\text{ext}} = F \cdot \dot{b} - \sin \varphi \left( m_2 + \frac{m_3}{2} \right) \cdot L \dot{\varphi} g$$

**Energie cinétique**

*masse ponctuelle m en P*

$$E_{\text{cin}} = \frac{1}{2} m \overrightarrow{v(P)}^2$$

*solide S de masse m, cdm G*

$$E_{\text{cin}} = \frac{1}{2} \int_S \overrightarrow{v(P)}^2 dm$$

$$E_{\text{cin}} = \frac{1}{2} \int_S \left( \overrightarrow{v(O_S)}_{S/0} + \overrightarrow{\Omega}_{S/0} \wedge \overrightarrow{O_S P} \right)^2 dm$$

qui se calcule en 3 temps :

$$E_{\text{cin1}} = \frac{1}{2} \int_S \overrightarrow{v(O_S)}_{S/0}^2 dm = \frac{1}{2} m \overrightarrow{v(O_S)}_{S/0}^2$$



$$E_{cin2} = \frac{1}{2} \int_S 2\vec{v}(\mathbf{O}_S)_{S/0} \cdot (\vec{\Omega}_{S/0} \wedge \vec{O}_S\vec{P}) dm = m \vec{v}(\mathbf{O}_S)_{S/0} \cdot (\vec{\Omega}_{S/0} \wedge \vec{O}_S\vec{G})$$

$$E_{cin3} = \frac{1}{2} \int_S (\vec{\Omega}_{S/0} \wedge \vec{O}_S\vec{P})^2 dm = \frac{1}{2} \vec{\Omega}_{S/0} [I_{O_S}] \vec{\Omega}_{S/0}$$

$$E_{cin} = \frac{1}{2} m \vec{v}(\mathbf{O}_S)_{S/0}^2 + m \vec{v}(\mathbf{O}_S)_{S/0} \cdot (\vec{\Omega}_{S/0} \wedge \vec{O}_S\vec{G}) + \frac{1}{2} \vec{\Omega}_{S/0} [I_{O_S}] \vec{\Omega}_{S/0}$$

C'est la forme la plus générale de l'expression de l'énergie cinétique d'un solide.

### Cas particuliers (on peut toujours s'y ramener)

si le solide (S) possède un point fixe  $O_S$  dans  $R_0$

$$E_{cin} = \frac{1}{2} \vec{\Omega}_{S/0} [I_{O_S}] \vec{\Omega}_{S/0}$$

Avec  $\vec{L}_{O_S} = [I_{O_S}] \cdot \vec{\Omega}_{S/0}$

sinon on prend  $O_S = G$

$$E_{cin} = \frac{1}{2} m \vec{v}(G)_{S/0}^2 + \frac{1}{2} \vec{\Omega}_{S/0} [I_G] \vec{\Omega}_{S/0}$$

Avec  $\vec{L}_G = [I_G] \cdot \vec{\Omega}_{S/0}$

### Système composé de plusieurs solides

L'énergie cinétique du système est égale à la somme des énergies cinétiques de chaque solide composant le système.

### Exemple : calculer l'énergie cinétique du chariot de grue

Réponse :

$$E_{cin} = E_{cin1} + E_{cin2} + E_{cin3},$$

$$E_{cin1} = \frac{1}{2} m_1 \dot{b}^2 \text{ car le solide est en translation}$$

$$E_{cin2} = \frac{1}{2} m_2 \vec{V}_P^2 \text{ car P est ponctuel}$$

$$E_{cin3} = \frac{1}{2} m_2 \vec{V}_B^2 + \frac{1}{2} \vec{\Omega}_{3/0} \cdot \vec{L}_B \text{ car (3) ne possède pas de point fixe dans } R_0 \text{ donc on passe par B.}$$

$$D'où E_{cin} = \frac{1}{2} (m_1 + m_2 + m_3) \dot{b}^2 + \frac{1}{2} m_2 (L^2 \dot{\varphi}^2 + 2\dot{b}L\dot{\varphi}\cos\varphi) + \frac{1}{2} m_3 \left( \frac{L^2}{4} \dot{\varphi}^2 + \dot{b}L\dot{\varphi}\cos\varphi \right)$$

### *Théorème de l'énergie cinétique pour un point matériel*

Dans  $R_0$  galiléen, le PFD appliqué à un point matériel (P,m) s'écrit :

$$\vec{F}_{ext/P} = m \vec{a}(\mathbf{P})_{P/0}$$

En multipliant cette équation par le vecteur vitesse du point P

$$\vec{F}_{ext/P} \cdot \vec{v}(\mathbf{P})_{P/0} = m \vec{a}(\mathbf{P})_{P/0} \cdot \vec{v}(\mathbf{P})_{P/0}$$

À gauche, nous reconnaissons la puissance de la résultante des forces extérieures

$$P(\vec{F}_{\text{ext}/P}) = m \frac{d^{(0)} \vec{v}(P)_{P/0}}{dt} \cdot \vec{v}(P)_{P/0}$$

et à droite...

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} m \frac{d \vec{v}(P)_{P/0}^2}{dt} \\ &= \frac{d \left( \frac{1}{2} m \vec{v}(P)_{P/0}^2 \right)}{dt} \\ &= \frac{d E_{\text{cin}}}{dt} \end{aligned}$$

### ***Théorème de l'énergie cinétique pour un système de points matériels***

Avec la même démarche, appliquée à chacun des points, et en faisant la somme terme à terme des équations, nous avons :

$$P(\vec{F}_{\text{ext}} + \vec{F}_{\text{int}}) = \frac{d E_{\text{cin}}}{dt}$$

### ***Théorème de l'énergie cinétique pour un solide, pour un système de solides, pour tous les systèmes à masse conservative***

$$P_{\text{ext}} + P_{\text{int}} = \frac{d E_{\text{cin}}}{dt}$$

### **Intégrale première de l'énergie**

Si **toutes** les forces appliquées au système, intérieures et extérieures, dérivent d'un potentiel,

$$P = - \frac{d E_{\text{pot}}}{dt}$$

alors

$$E_{\text{pot}} + E_{\text{cin}} = \text{cste}$$

### **Remarques :**

- si toutes les forces dérivent d'un potentiel, c'est qu'il n'y a aucune force dissipative d'énergie (pas de frottements) et donc que l'on peut écrire la relation de conservation d'énergie. Le théorème de l'énergie cinétique n'a alors aucun intérêt (même équation).
- Le théorème de l'énergie cinétique --- et la dérivée par rapport au temps de l'intégrale première de l'énergie --- sont des combinaisons linéaires des équations du mouvement issues du PFD.
- Le théorème de l'énergie cinétique sera donc utilisé dans les systèmes non conservatifs à un seul paramètre, sinon il y a risque de redondance avec le PFD.
- L'« intégrale première de l'énergie » est ainsi nommée car c'est une équation de mouvement déjà intégrée une fois. Il s'utilise également pour les systèmes à un seul paramètre.

Résumé sur les énergies et les théorèmes énergétiques :

<https://www.youtube.com/watch?v=XV8XBhMZySU>

### **Exercice 1**

Retrouvez l'équation du mouvement du pendule simple en utilisant l'intégrale première de l'énergie.

## Exercice 2

Peut-on retrouver les équations du mouvement du chariot de grue par les théorèmes énergétiques ?

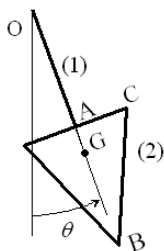
## Exercice 3

Reprendre l'exercice du pendule en considérant l'existence d'un couple de frottements visqueux dans la liaison pivot.

$$\vec{C}_{fv} = -c \dot{\theta} \vec{t}_0$$

## Solutions :

Exercice 1: on isole tout le système : (1)U(2)



Bilan des efforts :

$$\text{liaison pivot en O : } \{Pivot_{0/1}\} = \begin{Bmatrix} X & 0 \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_{(O,R_0)} \quad \text{poids en G : } \{Poids\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -mg & 0 \end{Bmatrix}_{(G,R_0)} \quad m=m_1 + m_2$$

Toutes les forces dérivent d'un potentiel (Puissance pivot nulle donc  $E_p = cte$ , Poids force constante), un seul paramètre de position donc intégrale première de l'énergie.

$$E_p = -amg \cos \theta + cte,$$

$$E_c = \frac{1}{2} \vec{\Omega}_{S/0} \cdot \vec{L}_{0 \in 1} = \frac{1}{2} (A_1 + A_2) \dot{\theta}^2$$

$$\frac{1}{2} (A_1 + A_2) \dot{\theta}^2 - amg \cos \theta = cte$$

On retrouve l'équation du mouvement par dérivation par rapport au temps :  $(A_1 + A_2) \ddot{\theta} = -amg \dot{\theta} \cdot \sin \theta$

Exercice 2 : Non car il y a 2 paramètres

Exercice 3 : Un seul paramètre, des frottements donc théorème de l'énergie cinétique

$$E_c = \frac{1}{2} \vec{\Omega}_{S/0} \cdot \vec{L}_{0 \in 1} = \frac{1}{2} (A_1 + A_2) \dot{\theta}^2, \quad \frac{dE_c}{dt} = (A_1 + A_2) \dot{\theta} \ddot{\theta}$$

$$P = -mg \vec{k}_0 \cdot \vec{V}_G + \vec{C}_{fv} \cdot \vec{\Omega}_S = -mg \vec{k}_0 \cdot a \dot{\theta} \vec{j}_1 - c \dot{\theta}^2 = -mga \dot{\theta} \sin \theta - c \dot{\theta}^2,$$

$$\text{Equation du mouvement : } (A_1 + A_2) \ddot{\theta} = -mga \sin \theta - c \dot{\theta}$$

## Chapitre 4 : positions d'équilibre et stabilité des équilibres des systèmes conservatifs Théorème de Lejeune Dirichlet

### Théorème de Lejeune Dirichlet (condition suffisante)

#### Équilibre

Le système est en équilibre dans  $R_0$  si tous ses points sont au repos par rapport à  $R_0$ . Si nous plaçons le système dans une de ses positions d'équilibre, et que nous le libérons sans lui communiquer de vitesse « initiale », alors le système reste immobile, dans cette position.

#### Première partie

Conditions d'application : le système  $\Sigma$  n'est soumis qu'à des forces dérivant d'un potentiel (pas de frottements) et indépendantes du temps.

La position de  $\Sigma$  est définie par  $n$  paramètres notés  $q_i$  ( $i$  variant de 1 à  $n$ ).

Il y a position d'équilibre si cette position, définie par les paramètres à l'équilibre  $q_{ie}$ , correspond à un extremum de la fonction énergie potentielle.

$$\forall q_i, \left. \frac{\partial E_{\text{pot}}}{\partial q_i} \right|_{q_{ie}} = 0 \quad \Rightarrow \text{système de } n \text{ équations}$$

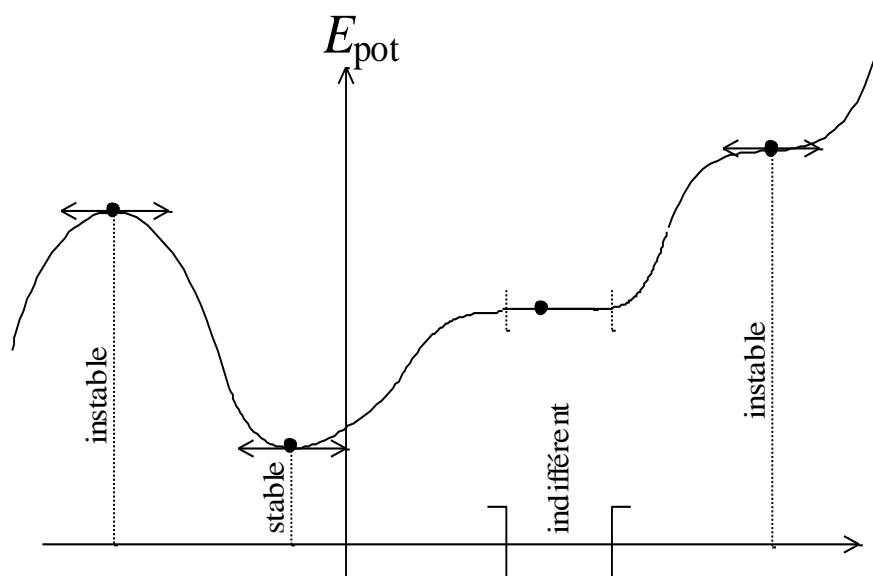
#### Stabilité de la position d'équilibre

Une position d'équilibre est *stable* si, en abandonnant le système  $\Sigma$  avec une « faible » vitesse initiale dans une position voisine de l'équilibre,  $\Sigma$  reste au voisinage de cette position à tout instant. Dans le cas contraire, on parlera d'équilibre *instable*.

#### Deuxième partie

L'équilibre est stable si la configuration de l'équilibre correspond à un minimum relatif de la fonction énergie potentielle.

Pour un système à 1 paramètre de position  $q$  :  $\left. \frac{d^2 E_{\text{pot}}}{d q^2} \right|_{q_e} > 0$



Pour un système à  $n$  paramètres de position  $q_i$

Il y a *stabilité* si toutes les valeurs propres de la matrice jacobienne  $[J]$  (matrice des dérivées secondes de la fonction énergie potentielle), dans la position de l'équilibre, sont positives.

Il faut donc

- a) Former la matrice jacobienne  $[J]$

$$[J] = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & \dots & J_{1n} \\ J_{21} & & & \\ \dots & & & \\ J_{n1} & & & J_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{avec } J_{ij} = \left. \frac{\partial^2 E_{\text{pot}}}{\partial q_i \partial q_j} \right|_{q_{ie}}$$

- b) Calculer le déterminant

$$\det([J] - \gamma[1]) \quad \text{avec } [1] \text{ la matrice identité } n \times n$$

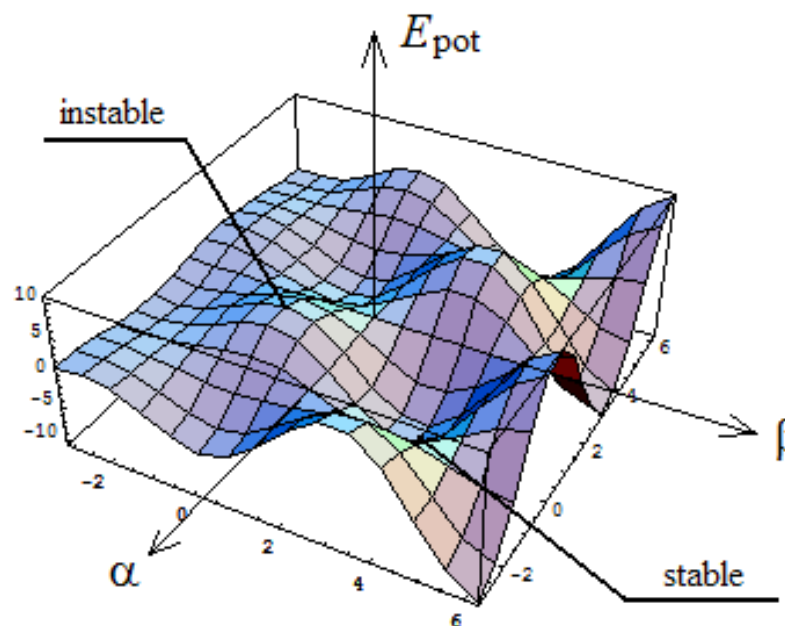
- c) Déterminer les racines du polynôme  $P(\gamma)$ ...

$$\det([J] - \gamma[1]) = 0$$

- d) Conclure

Si **toutes** les racines (ce sont les « valeurs propres » de la matrice  $[J]$ ) sont positives : l'équilibre est stable.

*Système à 2 paramètres :*

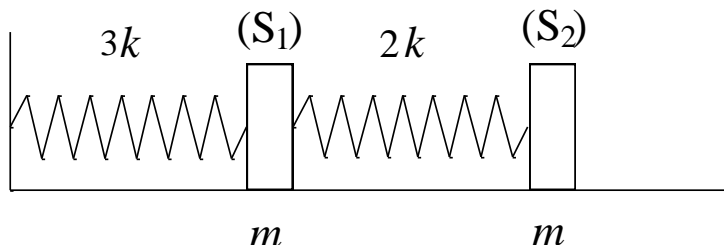


Lejeune Dirichlet en vidéo :  
<https://youtu.be/54NGOJcw1QU>

## Exercice 1

Un système se compose de deux masses ponctuelles  $S_1$  et  $S_2$  (masses identiques  $m$ ) reliées par deux ressorts, de longueur à vide  $l_1$  et  $l_2$  et de raideurs  $3k$  et  $2k$ .

*Hypothèse* : frottements négligés entre le sol et les solides  $S_1$  et  $S_2$ .



Déterminez les positions d'équilibre ainsi que leur stabilité.

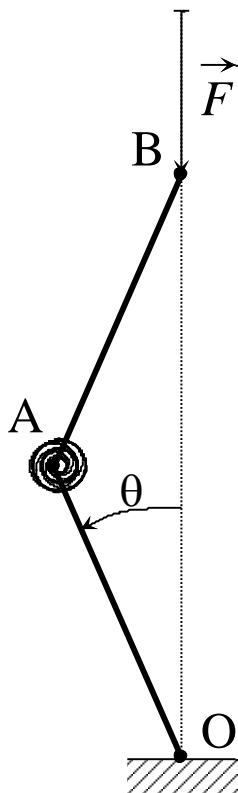
## Exercice 2

### Flambement des poutres.

Prenez un régllet métallique, comprimez le entre le plat de vos mains. Vous observerez que pour un effort « faible », le régllet reste droit, et à partir d'un effort critique de compression il se déforme : il flambe.

On modélise une barre déformable par un ensemble de  $n$  petits éléments rigides articulés 2 à 2. Cette articulation correspond à une liaison pivot munie d'un ressort de torsion de raideur  $C$ .

Pour simplifier l'étude, on prendra ici  $n = 2$ , avec  $OA = AB = L$ . La masse des barres est négligée, et le ressort est au repos pour  $\theta = 0$ . On supposera que la rupture mécanique intervient pour  $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$



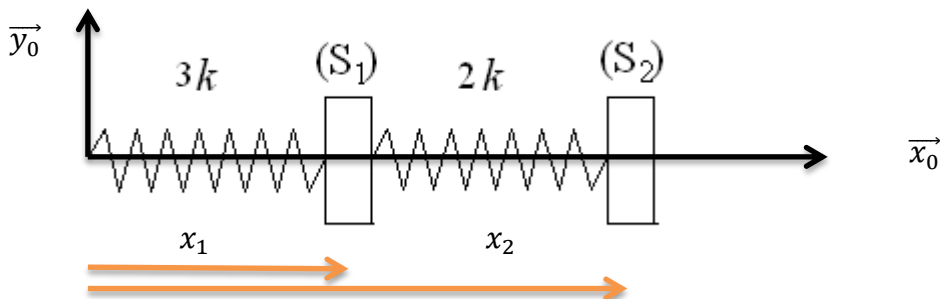
Déterminer les positions d'équilibre et leur stabilité en fonction de l'effort appliqué constant.

## Solutions

### Exercice 1 :

Bilan des forces intérieures et extérieures : 2 ressorts, les 2 réactions au support (sans frottement), les deux poids : toutes les forces dérivent d'un potentiel, on peut appliquer le théorème de Lejeune Dirichlet.

Repères et paramétrage :



$$E_p = \frac{1}{2} 3k(x_1 - l_1)^2 + \frac{1}{2} 2k(x_2 - x_1 - l_2)^2 + cte,$$

NB : les cdm de (1) et (2) restant à la même altitude, leur énergie potentielle reste constante.

Positions d'équilibre :

$$\frac{\partial E_p}{\partial x_1} = 3k(x_1 - l_1) - 2k(x_2 - x_1 - l_2), \quad \frac{\partial E_p}{\partial x_2} = 2k(x_2 - x_1 - l_2),$$

A l'équilibre :

$$\left(\frac{\partial E_p}{\partial x_1}\right)_e = 3k(x_{1e} - l_1) - 2k(x_{2e} - x_{1e} - l_2) = 0, \quad \left(\frac{\partial E_p}{\partial x_2}\right)_e = 2k(x_{2e} - x_{1e} - l_2) = 0,$$

D'où  $x_{1e} = l_1$  et  $x_{2e} = l_1 + l_2$

On en profite pour vérifier par notre sens physique que la solution trouvée n'est pas idiote.

Stabilité de la position d'équilibre :

$$[J_e] = \begin{bmatrix} 5k & -2k \\ -2k & 2k \end{bmatrix} \text{ Remarque : en général, les termes de cette matrice sont fonction de } x_{1e} \text{ et } x_{2e}.$$

Calcul des valeurs propres :

$$\begin{vmatrix} 5k - \lambda & -2k \\ -2k & 2k - \lambda \end{vmatrix} = (5k - \lambda)(2k - \lambda) - 4k^2 = \lambda^2 - 7k\lambda + 6k^2; \quad \Delta = 49k^2 - 24k^2 = 25k^2,$$

$$\lambda_1 = \frac{7k+5k}{2} = 6k > 0; \quad \lambda_2 = \frac{7k-5k}{2} = k > 0 \text{ donc la position d'équilibre est stable.}$$

### Exercice 2 :

Bilan des efforts extérieurs : pivot parfaite en O, effort constant F en B.

Bilan des efforts intérieurs : pivot parfaite en A, ressort de torsion en A (déformation du ressort  $2\theta$ )

Toutes les forces dérivent d'un potentiel donc on peut appliquer le théorème de Lejeune Dirichlet.

$$E_p = \frac{1}{2} C(2\theta - 0)^2 - \overrightarrow{OB} \cdot \vec{F} + cte, \quad E_p = 2C\theta^2 + 2LF\cos\theta + cte,$$

Positions d'équilibre :

$$\frac{dE_p}{d\theta} = 4C\theta - 2LF\sin\theta,$$

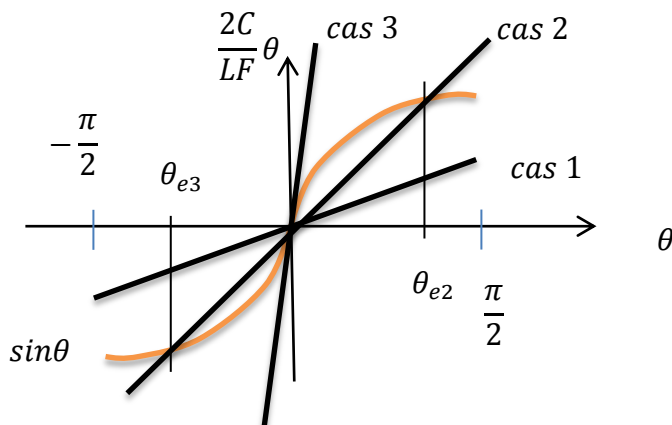
A l'équilibre :

$$\left(\frac{dE_p}{d\theta}\right)_e = 4C\theta_e - 2LF\sin\theta_e = 0,$$

$$\sin\theta_e = \frac{2C}{LF} \theta_e,$$

On trace ces deux fonctions entre  $-\frac{\pi}{2}$  et  $\frac{\pi}{2}$  : on obtient la solution à l'intersection de la sinusoïde et de la droite.

Résolution graphique :



3 cas apparaissent suivant la pente de la droite :

**Cas 1** : pente faible

$$\frac{2C}{LF} \cdot \frac{\pi}{2} < \sin \frac{\pi}{2}, \text{ donc } F > \frac{\pi C}{L},$$

Position d'équilibre :  $\theta_e = 0$

**Cas 3** : pente forte

$$\frac{2C}{LF} \geq 1 \text{ (pente de la tangente à l'origine de la fonction sinus), donc } \frac{2C}{L} \geq F,$$

Position d'équilibre :  $\theta_e = 0$

**Cas 2** : entre les 2 !

$$\frac{2C}{L} < F \leq \frac{\pi C}{L},$$

Positions d'équilibre :  $\theta_{e1} = 0, \theta_{e2} = -\theta_{e3}$  avec  $\sin \theta_{e2} = \frac{2C}{LF} \theta_{e2}$

Stabilité des positions d'équilibre :

$$\frac{d^2 E_p}{d\theta^2} = 4C - 2LF \cos \theta, \text{ étude du signe de } 4C - 2LF \cos \theta_e,$$

$\theta_e = 0$  :

$$4C - 2LF > 0 \Rightarrow F < \frac{2C}{L}, \text{ position stable dans le cas 3 uniquement}$$

$\theta_e = \theta_{e2}$  :

$$4C - 2LF \cos \theta_{e2} \stackrel{?}{>} 0, \quad \frac{2C}{LF} \stackrel{?}{>} \cos \theta_{e2},$$

or  $\frac{\pi}{2} > \theta_{e2} > 0$  donc  $\cos \theta_{e2}$  et  $\sin \theta_{e2} > 0$ ,

$$\frac{LF}{2C} \stackrel{?}{<} \frac{1}{\cos \theta_{e2}}, \quad \frac{2C}{LF} \theta_{e2} \cdot \frac{LF}{2C} \stackrel{?}{<} \frac{1}{\cos \theta_{e2}} \cdot \sin \theta_{e2}, \quad \theta_{e2} \stackrel{?}{<} \tan \theta_{e2} : \text{ vrai pour } \frac{\pi}{2} > \theta_{e2} > 0$$

Donc les positions  $\theta_{e2}$  et  $\theta_{e3}$  sont stables.

Conclusion :

Valeur de F	Positions d'équilibre	stabilité
$\frac{2C}{L} \geq F$	$\theta_e = 0$	stable
$\frac{2C}{L} < F \leq \frac{\pi C}{L}$	$\theta_e = 0$	instable
	$\theta_{e2}$ et $\theta_{e3}$	stable
$F > \frac{\pi C}{L}$	$\theta_e = 0$	instable

Interprétation : effort faible, barre droite ; force critique :  $\frac{2C}{L}$ , la barre flambe ; au-delà de  $\frac{\pi C}{L}$  il n'y a plus de position d'équilibre stable : rupture.

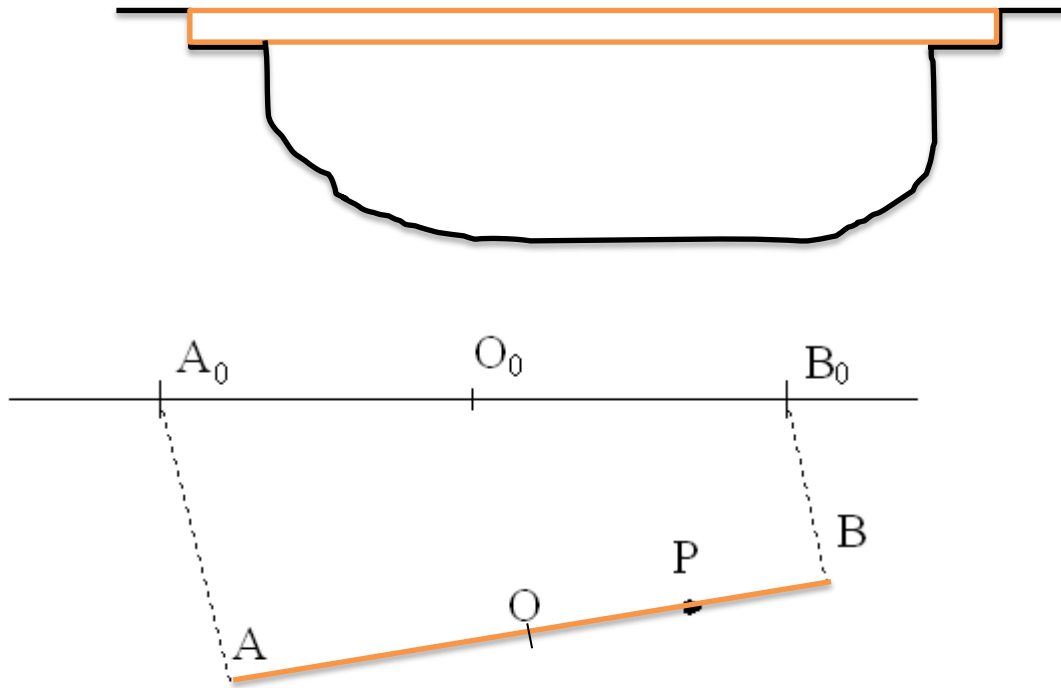


## Le pont

Le système représenté ici est le modèle (très simplifié) d'un pont sur deux appuis A et B (longueur  $2L$ , masse  $M$ ), parcouru par une forte charge\* (vitesse quasi nulle) de masse  $m$ , tel que  $OP = s (= cste)$ .

Les appuis sur la berge sont modélisés par des ressorts de raideur  $k$  et de longueur à vide nulle entre  $A_0$  et A d'une part, et entre  $B_0$  et B d'autre part.

\* : pour tester les ponts, on utilise des camions remplis de pierres.

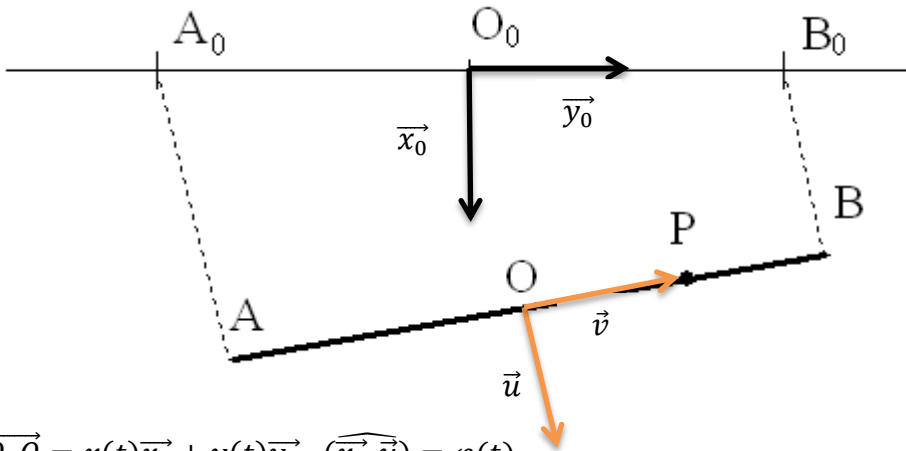


$$A_0O_0 = O_0B_0 = AO = OB = L$$

Déterminer les positions d'équilibre ainsi que leur stabilité en fonction du paramètre  $s$ .

## Correction :

Repères et paramétrage :



$$\vec{O_0O} = x(t)\vec{x}_0 + y(t)\vec{y}_0, \quad (\vec{x}_0, \vec{u}) = \varphi(t),$$

Il y a 3 paramètres de position indépendants.

Bilan des efforts : poids du pont en O, poids du camion en P, ressort en A, ressort en B

Toutes les forces dérivent d'un potentiel donc on peut appliquer le théorème de Lejeune Dirichlet.

$$E_p = \frac{1}{2}k \cdot \overline{A_0A}^2 + \frac{1}{2}k \cdot \overline{B_0B}^2 - \overline{O_0O} \cdot M\vec{g} - \overline{O_0P} \cdot m\vec{g} + cte,$$

$$\overline{A_0A} = \begin{pmatrix} x + L\sin\varphi \\ y + L(1 - \cos\varphi) \end{pmatrix}_{R_0}, \quad \overline{B_0B} = \begin{pmatrix} x - L\sin\varphi \\ y - L(1 - \cos\varphi) \end{pmatrix}_{R_0}$$

$$E_p = k(x^2 + y^2 + 2L^2(1 - \cos\varphi)) - xMg - (x - s \cdot \sin\varphi)mg + cte,$$

Position d'équilibre :

$$\frac{\partial E_p}{\partial x} = 2kx - (M + m)g; \quad \frac{\partial E_p}{\partial y} = 2ky; \quad \frac{\partial E_p}{\partial \varphi} = 2kL^2\sin\varphi + smg\cos\varphi$$

A l'équilibre :

$$\left(\frac{\partial E_p}{\partial x}\right)_e = 2kx_e - (M + m)g = 0; \quad \left(\frac{\partial E_p}{\partial y}\right)_e = 2ky_e = 0; \quad \left(\frac{\partial E_p}{\partial \varphi}\right)_e = 2kL^2\sin\varphi_e + smg\cos\varphi_e = 0$$

$$y_e = 0; \quad x_e = \frac{(M+m)g}{2k}; \quad \varphi_e = \text{atan}\left(\frac{-smg}{2kL^2}\right),$$

On en profite pour vérifier par notre sens physique que la solution trouvée n'est pas idiote.

Stabilité :

$$[J_e] = \begin{bmatrix} 2k & 0 & 0 \\ 0 & 2k & 0 \\ 0 & 0 & 2kL^2\cos\varphi_e - smg\sin\varphi_e \end{bmatrix}$$

Valeurs propres :

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2k > 0; \quad \lambda_3 = 2kL^2\cos\varphi_e - smg\sin\varphi_e,$$

Signe de  $2kL^2\cos\varphi_e - smg\sin\varphi_e$  ?

$$2kL^2\cos\varphi_e - smg\sin\varphi_e \stackrel{?}{\gtrsim} 0$$

$$\text{or } -\frac{\pi}{2} < \varphi_e < \frac{\pi}{2} \text{ donc } \cos\varphi_e > 0$$

$$\text{on en déduit que : } 2kL^2 \stackrel{?}{\gtrsim} smg \cdot \tan\varphi_e$$

$$\text{or } 2kL^2\sin\varphi_e + smg\cos\varphi_e = 0 \text{ ou } \tan\varphi_e = \frac{-smg}{2kL^2}$$

$$\text{en remplaçant : } 2kL^2 \stackrel{?}{\gtrsim} smg \cdot \frac{-smg}{2kL^2}$$

$$(2kL^2)^2 \stackrel{?}{\gtrsim} -(smg)^2 \text{ est vrai}$$

Donc la position d'équilibre est stable.

## Chapitre 5 : positions d'équilibre et stabilité des équilibres des systèmes dissipatifs Théorème de Liapounov

### Stabilité d'un équilibre dans le cas où des forces ne dérivent pas d'un potentiel

(méthode locale de linéarisation)

#### Principe

**Prérequis** : connaissance d'une position d'équilibre, à partir des équations fournies par le PFS ou le PFD.

**Méthode** : on suppose, a priori, que l'équilibre est stable. L'objectif est de vérifier cette hypothèse.

$q_i$   
sont les paramètres de position

$q_{ie}$   
sont les valeurs des paramètres à l'équilibre

Un équilibre est dit « dynamique » lorsque la position se stabilise pour une vitesse **constante**.

On effectue alors un changement de variable afin de se placer près de la position d'équilibre :

$1 \leq i \leq a$      $a$  paramètres de position restant proches des valeurs à l'équilibre

$$\varepsilon_i = q_i - q_{ie} \qquad \dot{\varepsilon}_i = \dot{q}_i \qquad \ddot{\varepsilon}_i = \ddot{q}_i$$

$a < i \leq n$      $n - a$  paramètres pour lesquels la vitesse reste proche de la valeur à l'équilibre

$$\dot{\varepsilon}_i = \dot{q}_i - \dot{q}_{ie} \qquad \ddot{\varepsilon}_i = \ddot{q}_i$$

Initialement, les paramètres prennent pour valeurs

$$q_{i0} \qquad \dot{q}_{i0}$$

qui sont des valeurs supposées proches de la position d'équilibre dynamique.

Comme le mouvement est supposé stable, les paramètres de position et les vitesses (dérivées des paramètres de position) restent proches des valeurs à l'équilibre (petits mouvements oscillatoires autour de la position d'équilibre).

$\varepsilon_i, \dot{\varepsilon}_i, \ddot{\varepsilon}_i$  sont des infiniment petits du 1er ordre

On réalise alors le changement de variable dans les équations de mouvement, que l'on « linéarise » en ne conservant que les termes du premier ordre.

On obtient :

$$[M]\ddot{\underline{\varepsilon}} + [C]\dot{\underline{\varepsilon}} + [K]\underline{\varepsilon} = \underline{0}$$

avec

$$\underline{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \dots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}; \quad [M], [C], [K] : \text{matrices } n \times n \text{ constantes}$$

Le système d'équations différentielles est à présent linéaire. La solution de tout système linéaire est du type :

$$\underline{\varepsilon} = \underline{z} e^{\lambda t}$$

On obtient un système de  $n$  équations :

$$([M]\lambda^2 + [C]\lambda + [K])\underline{z} e^{\lambda t} = \underline{0}$$

*Solution évidente* :  $\underline{z} = \underline{0}$ , mais contrairement à l'idée de « petits mouvements » autour d'une position d'équilibre. Cette *solution évidente* n'est unique que si le déterminant du système d'équations différentielles est non nul. S'il est nul – les équations sont alors liées – il existe alors d'autres solutions au système.

L'équation

$$\det \left( [M] \lambda^2 + [C] \lambda + [K] \right) = 0$$

correspond au polynôme caractéristique  $P(\lambda)$  du système. Il admet  $2n$  racines complexes conjuguées.

### Théorème de Liapounov (énoncé sans démonstration)

Si toutes les racines de  $P(\lambda)$  ont leur partie réelle négative, alors l'équilibre est stable.

Si au moins une des racines de  $P(\lambda)$  a sa partie réelle positive, alors l'équilibre est instable.

Sinon, on ne peut pas conclure...

### Remarque : philosophie de Liapounov en guise de démonstration

Les solutions sont de la forme

$$\underline{\varepsilon} = \underline{z} e^{\lambda t}$$

Ainsi

$$\varepsilon_1 = z_{11} e^{\lambda_1 t} + z_{12} e^{\lambda_2 t} + \dots$$

La position d'équilibre est stable ssi  $\lim_{t \rightarrow \infty} (\varepsilon_i) = 0$

$$\lambda_i = a_i + i \beta_i$$

$$\varepsilon_1 = e^{a_1 t} \left( a_1 \cos(\beta_1 t) + b_1 \sin(\beta_1 t) \right) + \dots$$

$$\underbrace{-(|a_1| + |b_1|) \leq \quad \leq (|a_1| + |b_1|)}_{\text{condition de stabilité}}$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{a_1 t} = \begin{cases} +\infty & \text{si } a_1 \text{ est positif} \\ 0 & \text{si } a_1 \text{ est négatif} \\ 1 & \text{si } a_1 \text{ est nul} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{instable} \\ \text{stable} \\ ??? \end{cases}$$

**Rappel sur la linéarisation** (développement limité au premier ordre)

$$\text{lorsque } a \rightarrow 0 \begin{cases} \cos a \simeq 1 \\ \sin a \simeq a \end{cases}$$

Aux abords de l'équilibre, on ne garde que les termes du 1<sup>er</sup> ordre :

$$\varepsilon_i \quad \dot{\varepsilon}_i \quad \ddot{\varepsilon}_i$$

Mais on supprime les deuxième, troisième... ordres

$$\varepsilon_i \varepsilon_j \simeq 0 \quad \dot{\varepsilon}_i \dot{\varepsilon}_j \simeq 0 \quad \dot{\varepsilon}_i^2 \simeq 0$$

Pour plus d'informations :

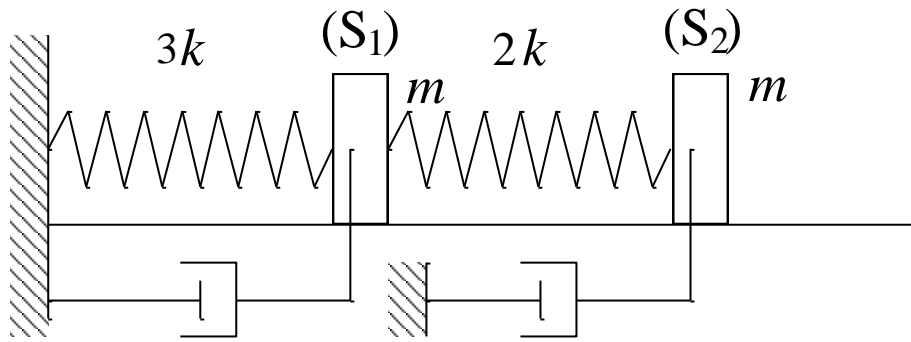
[https://www.youtube.com/channel/UC\\_c2uH-uoRP52EZZeB9q4A](https://www.youtube.com/channel/UC_c2uH-uoRP52EZZeB9q4A)

### Exercice 1

Un système déjà vu précédemment se compose de deux masses ponctuelles  $S_1$  et  $S_2$  (masses identiques  $m$ ) reliées par deux ressorts, de longueur à vide  $l_1$  et  $l_2$  et de raideurs  $3k$  et  $2k$ .

Hypothèse : les frottements entre le sol et les solides  $S_1$  et  $S_2$  sont de type visqueux : opposés et proportionnels à la vitesse du solide (coefficient de frottement visqueux :  $c$ )

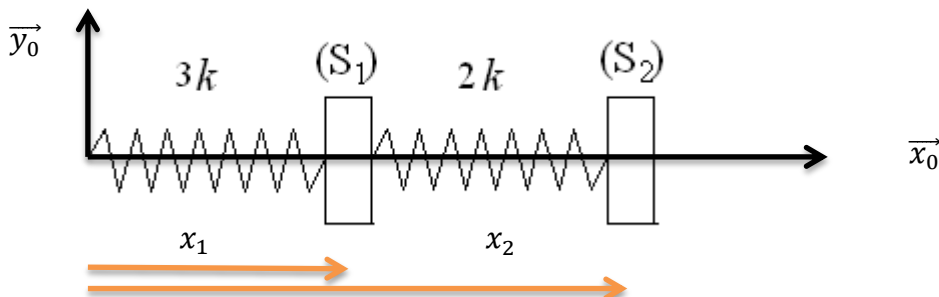
Déterminez les positions d'équilibre et vérifiez la stabilité.



### Solution :

Bilan des forces intérieures et extérieures : 2 ressorts, les 2 réactions au support (sans frottement sec), les deux poids, les deux frottements visqueux : toutes les forces ne dérivent pas d'un potentiel

Repères et paramétrage :

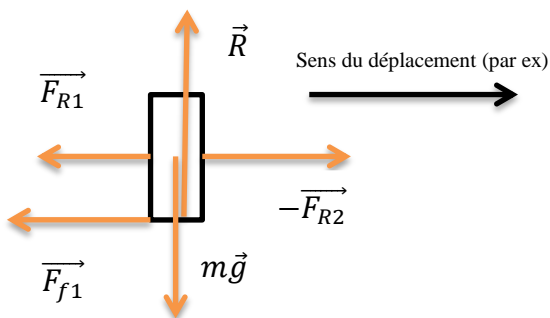


Pour trouver les positions d'équilibre, on doit écrire les équations du mouvement :

Lié à  $x_1$  :

$$\sum \vec{F}_{ext \rightarrow S_1} \cdot \vec{x}_0 = m \vec{a}_{G_1} \cdot \vec{x}_0$$

On isole  $S_1$

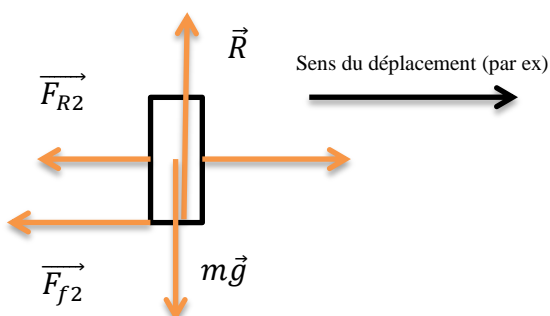


$$-3k(x_1 - l_1) + 2k(x_2 - x_1 - l_2) - c\dot{x}_1 = m\ddot{x}_1$$

Lié à  $x_2$  :

$$\sum \vec{F}_{ext \rightarrow S_2} \cdot \vec{x}_0 = m \vec{a}_{G_2} \cdot \vec{x}_0$$

On isole  $S_2$



$$-2k(x_2 - x_1 - l_2) - c\dot{x}_2 = m\ddot{x}_2$$

A l'équilibre, le système est immobile (équilibre statique ici) donc  $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = \ddot{x}_1 = \ddot{x}_2 = 0$

D'où :  $x_{1e} = l_1, x_{2e} = l_1 + l_2$

Stabilité :

On suppose a priori que cette position d'équilibre est stable.

Changement de variable :

$\varepsilon_1 = x_1 - x_{1e} = x_1 - l_1$  ;  $\varepsilon_2 = x_2 - x_{2e} = x_2 - l_1 - l_2$ ,

On réinjecte ses variables dans les équations de mouvement :

$$\begin{cases} -3k\varepsilon_1 + 2k(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) - c\dot{\varepsilon}_1 = m\ddot{\varepsilon}_1 \\ -2k(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) - c\dot{\varepsilon}_2 = m\ddot{\varepsilon}_2 \end{cases}$$

Linéarisation : le système est déjà linéaire

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\varepsilon}_1 \\ \ddot{\varepsilon}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}_1 \\ \dot{\varepsilon}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5k & -2k \\ -2k & 2k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La solution de ce système est de la forme :

$$\varepsilon_1 = Z_1 e^{\lambda t}, \varepsilon_2 = Z_2 e^{\lambda t}$$

Donc  $\dot{\varepsilon}_1 = Z_1 \lambda e^{\lambda t}, \dot{\varepsilon}_2 = Z_2 \lambda e^{\lambda t}, \ddot{\varepsilon}_1 = Z_1 \lambda^2 e^{\lambda t}, \ddot{\varepsilon}_2 = Z_2 \lambda^2 e^{\lambda t}$

On réinjecte dans notre système d'équations, on simplifie par  $e^{\lambda t} (>0)$  et on factorise :

$$\begin{bmatrix} m\lambda^2 + c\lambda + 5k & -2k \\ -2k & m\lambda^2 + c\lambda + 2k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Une solution évidente est  $Z_1 = Z_2 = 0$  donc  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$  : immobilité du système, impossible de tester sa stabilité.

Une autre solution existe si :  $\det \begin{bmatrix} m\lambda^2 + c\lambda + 5k & -2k \\ -2k & m\lambda^2 + c\lambda + 2k \end{bmatrix} = 0$

On pose  $A = m\lambda^2 + c\lambda + 5k$

$\det = A(A - 3k) - 4k^2 = A^2 - 3kA - 4k^2 = 0$  ;  $\Delta = 9k^2 + 16k^2 = 25k^2$ ,

$A_1 = \frac{3k+5k}{2} = 4k$  ;  $A_2 = \frac{3k-5k}{2} = -k$ ,

**Pour  $A_1$  :**

$4k = m\lambda^2 + c\lambda + 5k$  ;  $m\lambda^2 + c\lambda + k = 0$  ;  $\Delta = c^2 - 4mk$  de signe inconnu

Cas 1 :  $\Delta \geq 0$  :

$$\lambda_1 = \frac{-c + \sqrt{\Delta}}{2m} < 0 ; \lambda_2 = \frac{-c - \sqrt{\Delta}}{2m} < 0$$

Cas 2 :  $\Delta < 0$

$$\lambda_1 = \frac{-c + i\sqrt{-\Delta}}{2m}, R_e(\lambda_1) < 0 ; \lambda_2 = \frac{-c - i\sqrt{-\Delta}}{2m}, R_e(\lambda_2) < 0$$

**Pour  $A_2$  :**

$-k = m\lambda^2 + c\lambda + 5k$  ;  $m\lambda^2 + c\lambda + 6k = 0$  ;  $\Delta = c^2 - 24mk$  de signe inconnu

Cas 1 :  $\Delta \geq 0$  :

$$\lambda_1 = \frac{-c + \sqrt{\Delta}}{2m} < 0 ; \lambda_2 = \frac{-c - \sqrt{\Delta}}{2m} < 0$$

Cas 2 :  $\Delta < 0$

$$\lambda_1 = \frac{-c + i\sqrt{-\Delta}}{2m}, R_e(\lambda_1) < 0 ; \lambda_2 = \frac{-c - i\sqrt{-\Delta}}{2m}, R_e(\lambda_2) < 0$$

Conclusion :

Les parties réelles des 4 racines sont négatives, donc d'après Liapounov la position d'équilibre est stable.

## Exercice 2 : reprise de la pale de turbine (p22)

Trouver les positions d'équilibre et déterminer leur stabilité.

### Solution :

Equations du mouvement déjà trouvées :

$$\dot{\varphi} = cte \text{ donc } \varphi(t) = \Omega \cdot t + \varphi_0$$

$$(m + M)\ddot{z} + m(L\ddot{\theta}\cos\theta - L\dot{\theta}^2\sin\theta) = -Kz(t) - b(\dot{z} + L\dot{\theta}\cos\theta)$$

$$\ddot{\theta} \cdot I_p + \Omega^2 \sin\theta \cos\theta \cdot I_p + Lm(\ddot{z}\cos\theta + \Omega^2(R + L\cos\theta)\sin\theta + L\ddot{\theta}) = -C\theta - bL(\dot{z}\cos\theta + L\dot{\theta})$$

Toutes les forces ne dérivant pas d'un potentiel (il y a des frottements), on utilise la méthode de Liapounov *Positions d'équilibre dynamique* (car le système est en mouvement : rotation à vitesse constante  $\dot{\varphi} = cte$ )

Donc :

$$\dot{\varphi}_e = \Omega = cte, \theta_e = cte, z_e = cte, \dot{\theta}_e = \ddot{\theta}_e = \dot{z}_e = \ddot{z}_e = 0$$

On réinjecte dans les équations de mouvement :

$$\begin{cases} 0 = -Kz_e \\ \Omega^2 \sin\theta_e \cos\theta_e \cdot I_p + Lm\Omega^2(R + L\cos\theta_e)\sin\theta_e = -C\theta_e \end{cases}$$

Une solution évidente est :  $z_e = 0$  et  $\theta_e = 0$ . Physiquement, il est peu probable qu'il existe une autre position d'équilibre.

*Etude de la stabilité de cette position d'équilibre :*

Ce système comporte 3 paramètres de position, dont un est fixé :  $\dot{\varphi}_e = \Omega = cte$

Pour étudier la stabilité de cette position d'équilibre, on va donc faire varier  $\theta$  autour de  $\theta_e$  et  $z$  autour de  $z_e$ .

Changement de variable :

$$\begin{cases} \varepsilon_z = z - z_e = z \\ \varepsilon_\theta = \theta - \theta_e = \theta \end{cases}; \begin{cases} \dot{\varepsilon}_z = \dot{z} \\ \dot{\varepsilon}_\theta = \dot{\theta} \end{cases}; \begin{cases} \ddot{\varepsilon}_z = \ddot{z} \\ \ddot{\varepsilon}_\theta = \ddot{\theta} \end{cases}$$

On réinjecte dans les équations de mouvement et on linéarise :

$$\begin{cases} (m + M)\ddot{\varepsilon}_z + mL\ddot{\varepsilon}_\theta = -K\varepsilon_z - b(\dot{\varepsilon}_z + L\dot{\varepsilon}_\theta) \\ \ddot{\varepsilon}_\theta \cdot I_p + \Omega^2 \varepsilon_\theta \cdot I_p + Lm(\ddot{\varepsilon}_z + \Omega^2(R + L)\varepsilon_\theta + L\ddot{\varepsilon}_\theta) = -C\varepsilon_\theta - bL(\dot{\varepsilon}_z + L\dot{\varepsilon}_\theta) \end{cases}$$

Ou sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} (m + M) & mL \\ Lm & I_1 + mL^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\varepsilon}_z \\ \ddot{\varepsilon}_\theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b & bL \\ bL & bL^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}_z \\ \dot{\varepsilon}_\theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & C + \Omega^2 I_p + \Omega^2(R + L)Lm \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_z \\ \varepsilon_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La solution de ce système est :

$$\begin{cases} \varepsilon_z = A \cdot e^{\lambda t} \\ \varepsilon_\theta = B \cdot e^{\lambda t} \end{cases}$$

Il ne reste « plus » qu'à réinjecter cette solution dans le système et analyser le signe de la partie réelle des quatre  $\lambda$  trouvés.

NB : cette étude n'est pas présentée ici. Elle ne peut se faire que numériquement.

## Chapitre 6 : l'art de la linéarisation

### Etude des petits mouvements

Les équations du mouvement sont en général très complexes (système d'équations différentielles non linéaires). On ne sait donc généralement pas les résoudre à la main.

**But de l'étude :** trouver la position de fonctionnement du mécanisme : c'est une position d'équilibre dynamique (si elle existe !).

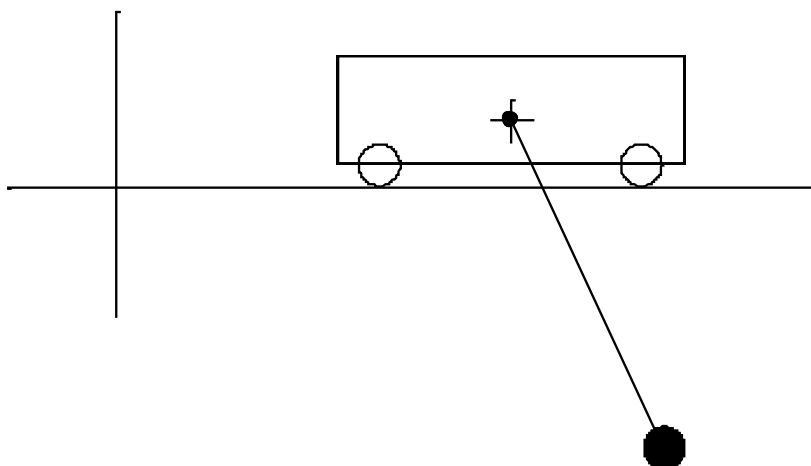
Passée la phase de mise en route, on s'intéresse au régime permanent : on linéarise alors les équations du mouvement autour de cette position ; on étudie les petits mouvements autour de cet équilibre.

Cette méthode permet d'intégrer les équations du mouvement et de déterminer les fréquences propres du système (capitales pour prévoir les phénomènes de résonance : voir « Pont de Tacoma » sur Moodle).

### Exemple : chariot de grue

#### Objectif

Déterminer les fréquences d'oscillation du système en fonction de  $L$  (la longueur du câble) et de  $m_2$  (la masse soulevée), ainsi que les variations de la vitesse d'avance du chariot en vue d'un choix de motorisation.



Conditions initiales : le chariot possède une vitesse initiale :

$$\begin{aligned} b(0) &= 0 & \dot{b}(0) &= v_0 \quad (2 \text{ m s}^{-1}) \\ \varphi(0) &= \pi/100 & \dot{\varphi}(0) &= 0 \text{ rad s}^{-1} \end{aligned}$$

Hypothèse : on néglige la masse du câble ( $m_3 = 0$ )

A.N :  $F = 0N$ ,

$1 \leq L \leq 20m$ ,

$m_1 = 500 \text{ kg}$ ,

$0 \leq m_2 \leq 1000 \text{ kg}$ .

**Réponse :**



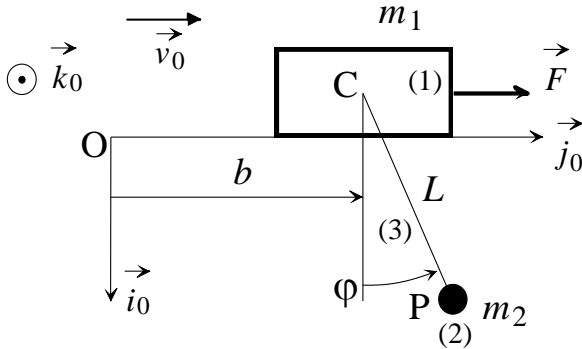
# S5 Enm. Énergie mécanique

José Bruned, Erwan Contal, Guillaume Helbert

Version 22/10/2019



Système paramétré :



Equations du mouvement :

$$(m_1 + m_2)\ddot{b} + m_2L(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi) = F$$

$$m_2L\dot{b}\dot{\varphi}\cos\varphi + m_2\ddot{\varphi}L^2 = -Lg.\sin\varphi m_2,$$

Positions d'équilibre **dynamiques** (car le chariot est en mouvement suivant  $\vec{j}_0$ )

$$\varphi_e = cte, \dot{b}_e = v_0; \dot{\varphi}_e = \ddot{\varphi}_e = \ddot{b}_e = 0,$$

$0 = F_e$ : pas de frottements donc aucune force pour entretenir le mouvement,

$$0 = -Lg.\sin\varphi_e m_2, \varphi_{e1} = 0, \varphi_{e2} = \pi,$$

Intuitivement,  $\varphi_{e1}$  stable,  $\varphi_{e2}$  instable (se démontre par Lejeune Dirichlet)

Petits mouvements autour de la position d'équilibre dynamique stable :

$$\begin{aligned} \varepsilon_\varphi &= \varphi - \varphi_e = \varphi; \dot{\varepsilon}_b = \dot{b} - \dot{b}_e = \dot{b} - v_0 \\ \left[ \begin{array}{l} (m_1 + m_2)\ddot{\varepsilon}_b + m_2L(\ddot{\varepsilon}_\varphi \cos\varepsilon_\varphi - \dot{\varepsilon}_\varphi^2 \sin\varepsilon_\varphi) = 0 \\ m_2L\dot{\varepsilon}_b \dot{\varepsilon}_\varphi \cos\varepsilon_\varphi + m_2\dot{\varepsilon}_b L^2 = -Lgm_2.\sin\varepsilon_\varphi \end{array} \right. \end{aligned}$$

On linéarise :

$$\left[ \begin{array}{l} (m_1 + m_2)\ddot{\varepsilon}_b + m_2L\ddot{\varepsilon}_\varphi = 0 \\ m_2L\dot{\varepsilon}_b + m_2\dot{\varepsilon}_\varphi L^2 + Lgm_2\varepsilon_\varphi = 0 \end{array} \right.$$

Solution de la forme :

$$\varepsilon_\varphi = z_1.e^{\lambda t}, \varepsilon_b = z_2.e^{\lambda t}$$

On réinjecte dans les équations du mouvement linéarisées :

$$\left[ \begin{array}{cc} m_2L\lambda^2 & (m_1 + m_2)\lambda^2 \\ L^2\lambda^2 + Lg & L\lambda^2 \end{array} \right] \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dét=0;

$$\begin{aligned} [m_2L^2 - (m_1 + m_2)L^2]\lambda^4 - (m_1 + m_2)Lg\lambda^2 &= 0 \\ \lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = i\sqrt{\frac{(m_1 + m_2)g}{m_1L}}, \lambda_4 = -i\sqrt{\frac{(m_1 + m_2)g}{m_1L}} \end{aligned}$$

Pulsation propre :  $\omega = \sqrt{\frac{(m_1 + m_2)g}{m_1L}}$

$$\begin{cases} \varepsilon_\varphi = a_1 + a_2t + A_3e^{i\omega t} + A_4e^{-i\omega t} = a_1 + a_2t + a_3\cos(\omega t) + a_4\sin(\omega t) \\ \varepsilon_b = b_1 + b_2t + B_3e^{i\omega t} + B_4e^{-i\omega t} = b_1 + b_2t + b_3\cos(\omega t) + b_4\sin(\omega t) \end{cases}$$

**Détermination des coefficients  $a_i$  et  $b_i$ :**

Conditions initiales:

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_\varphi = a_2 - a_3\omega\sin(\omega t) + a_4\omega\cos(\omega t) & \ddot{\varepsilon}_\varphi = -a_3\omega^2\cos(\omega t) - a_4\omega^2\sin(\omega t) \\ \dot{\varepsilon}_b = b_2 - b_3\omega\sin(\omega t) + b_4\omega\cos(\omega t) & \ddot{\varepsilon}_b = -b_3\omega^2\cos(\omega t) - b_4\omega^2\sin(\omega t) \end{cases}$$

$\dot{\varepsilon}_b = \dot{b} - v_0$  donc  $\varepsilon_b = b(t) - v_0t + k$ , on prend  $k = 0$ ,

$\varepsilon_b(0) = 0 = b_1 + b_3$ ;  $\dot{b}(0) = v_0 = \dot{\varepsilon}_b(0) + v_0$ , donc  $\dot{\varepsilon}_b(0) = 0 = b_2 + b_4\omega$ ,

$\varphi(0) = \frac{\pi}{100} = \varepsilon_\varphi(0) = a_1 + a_3$ ;  $\dot{\varepsilon}_\varphi(0) = 0 = a_2 + a_4\omega$ ,

On réinjecte les solutions dans les équations des petits mouvements (une suffit car elles sont liées :  $\det=0$ ):

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_b + \varepsilon_\varphi L + g\varepsilon_\varphi &= 0, \\ -b_3 \omega^2 \cos(\omega t) - b_4 \omega^2 \sin(\omega t) + L[-a_3 \omega^2 \cos(\omega t) - a_4 \omega^2 \sin(\omega t)] + g[a_1 + a_2 t + a_3 \cos(\omega t) + \\ a_4 \sin(\omega t)] &= 0, \\ -b_3 \omega^2 - La_3 \omega^2 + ga_3 &= 0, -b_4 \omega^2 + L\omega^2 + ga_4 = 0, ga_1 = 0, ga_2 = 0, \end{aligned}$$

**Résolution du système de 8 équations à 8 inconnues:**

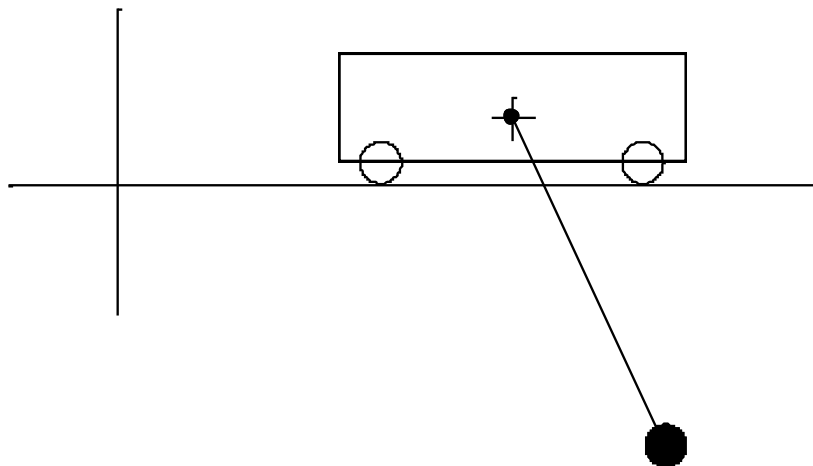
$$\begin{aligned} a_1 = a_2 = a_4 &= 0, a_3 = \frac{\pi}{100}, \\ b_4 = L = -b_1, b_3 &= \frac{(g - L\omega^2)}{\omega^2} \frac{\pi}{100} = \frac{-b_2}{\omega} \end{aligned}$$

Solution:

$$\left[ \begin{aligned} \varepsilon_\varphi &= \frac{\pi}{100} \cos(\omega t) \\ \varepsilon_b &= L[\sin(\omega t) - 1] + \frac{(g - L\omega^2)}{\omega^2} \frac{\pi}{100} [\cos(\omega t) - \omega t] \end{aligned} \right.$$

$$\text{Variation de la vitesse : } \dot{b} = \dot{\varepsilon}_b + v_0 = v_0 - \frac{(g - L\omega^2)}{\omega^2} \frac{\pi}{100} \omega [\sin(\omega t) + 1] + L \omega \cos(\omega t)$$

**Reprenons le même exercice, mais en prenant en compte cette fois-ci les frottements.**



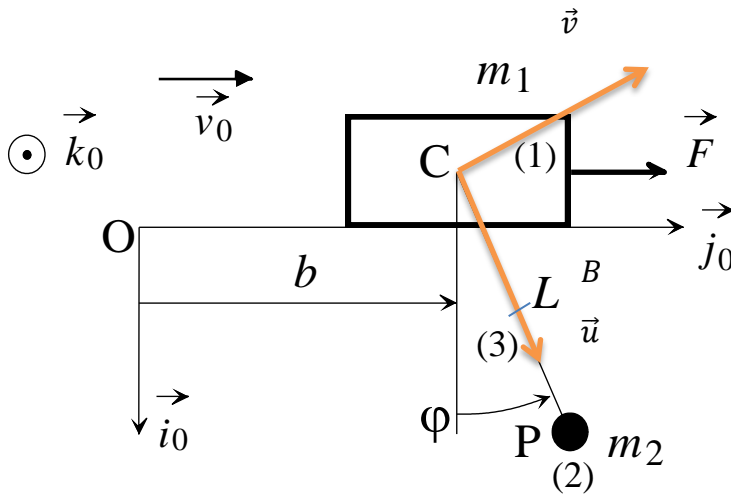
Notre système diffère du précédent sur certains points : le chariot (1) de masse  $m_1$  glisse horizontalement sur le bras de la grue (coefficient de frottement bras-chariot :  $f$ ). Et des frottements aérodynamiques agissent sur (P) :  $\vec{F}_{air/2} = -k \vec{v}(P)_{2/0}$   $k$  étant une *constante positive*

Déterminer les fréquences d'oscillation du système en fonction de  $L$  (la longueur du câble) et de  $m_2$  (la masse soulevée) lorsque la vitesse d'avance du chariot se stabilise à  $v_0$ .

A. N. :  $m_1 = 500$  kg,  $m_2 = 1000$  kg,  $L = 10$  m,  $v_0 = 2$  m/s,  $k = 60$  N.s/m,  $f = 0.3$

**Solution :**

Repères et paramétrages :



Equations du mouvement :

**Equation liée à  $b(t)$  :**

Paramètre de translation suivant  $\vec{j}_0$  positionnant (1)U(2)U(3) :

$$(m_1 + m_2)\overrightarrow{a_G} \cdot \vec{j}_0 = \overrightarrow{F_{ext/(1U2U3)}} \cdot \vec{j}_0$$

Calcul de  $(m_1 + m_2)\overrightarrow{a_G} \cdot \vec{j}_0$  :

$$(m_1 + m_2)\overrightarrow{a_G} \cdot \vec{j}_0 = (m_1\overrightarrow{a_C} + m_2\overrightarrow{a_P}) \cdot \vec{j}_0 ;$$

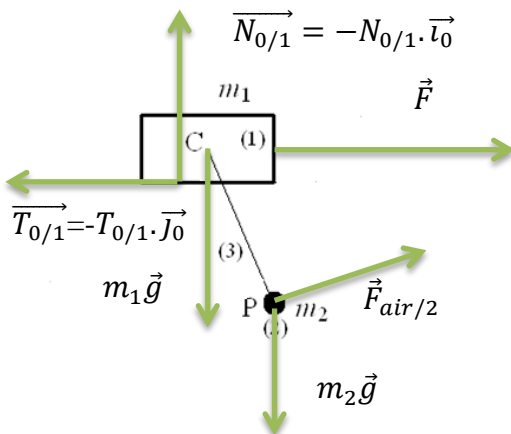
$$\overrightarrow{a_C} \cdot \vec{j}_0 = \ddot{b},$$

$$\overrightarrow{OP} = cte \cdot \vec{i}_0 + b \cdot \vec{j}_0 + L \cdot \vec{u}, \quad \overrightarrow{v_{PE2/0}} = \dot{b}\vec{j}_0 + L\dot{\varphi}\vec{v}, \quad \overrightarrow{a_{PE2/0}} = \ddot{b}\vec{j}_0 + L\ddot{\varphi}\vec{v} - L\dot{\varphi}^2\vec{u},$$

$$\overrightarrow{a_{PE2/0}} \cdot \vec{j}_0 = \ddot{b} + L(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi),$$

Calcul de  $\overrightarrow{F_{ext/(1U2U3)}} \cdot \vec{j}_0$  :

On isole (1)U(2)U(3)



$$\overrightarrow{F_{ext/(1U2U3)}} \cdot \vec{j}_0 = F - T_{0/1} + \vec{F}_{air} \cdot \vec{i}_0 = F - T_{0/1} - k(b + L\dot{\varphi}\cos\varphi)$$

Problème :  $T_{0/1}$  inconnu

$$\frac{T_{0/1}}{N_{0/1}} = f, T_{0/1} = f \cdot N_{0/1}$$

**Détermination de  $N_{0/1}$  :**

$$(m_1 + m_2)\overrightarrow{a_G} \cdot \vec{i}_0 = \overrightarrow{F_{ext/(1U2U3)}} \cdot \vec{i}_0$$

$$(m_1 + m_2)\overrightarrow{a_G} \cdot \vec{i}_0 = -Lm_2(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi)$$

$$\overrightarrow{F_{ext/(1U2U3)}} \cdot \vec{l}_0 = (m_1 + m_2)g - N_{0/1} + kL\dot{\varphi}\sin\varphi$$

D'où  $N_{0/1} = (m_1 + m_2)g + kL\dot{\varphi}\sin\varphi + Lm_2(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi)$

Equation liée à  $b(t)$  :

$$(m_1 + m_2)\ddot{b} + m_2L(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi) = F - k(\dot{b} + L\dot{\varphi}\cos\varphi) - f[(m_1 + m_2)g + kL\dot{\varphi}\sin\varphi + Lm_2(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi)]$$

Equation liée à  $\varphi(t)$  :

$$\overrightarrow{M_C} \cdot \vec{k}_0 = \overrightarrow{N_{CE(2U3)}} \cdot \vec{k}_0$$

Calcul de  $\overrightarrow{M_C} \cdot \vec{k}_0$

$$\overrightarrow{M_C} \cdot \vec{k}_0 = \left( \overrightarrow{CP} \wedge (m_2g\vec{l}_0 - k\vec{v}_{PE2}) \right) \cdot \vec{k}_0 = -Lgm_2 \cdot \sin\varphi - kL(\dot{b}\cos\varphi + L\dot{\varphi})$$

Calcul de  $\overrightarrow{N_{CE(2U3)}} \cdot \vec{k}_0$

$$\overrightarrow{N_{CE(2U3)}} \cdot \vec{k}_0 = \overrightarrow{N_{CE2}} \cdot \vec{k}_0 = (\ddot{b}\cos\varphi + L\ddot{\varphi})Lm_2,$$

Equation liée à  $\varphi(t)$  :

$$(\ddot{b}\cos\varphi + L\ddot{\varphi})m_2 = -gm_2 \cdot \sin\varphi - k(\dot{b}\cos\varphi + L\dot{\varphi})$$

Position d'équilibre dynamique en fonction de  $v_0$  :

$$\varphi_e = cte, \dot{b}_e = v_0; \dot{\varphi}_e = \ddot{\varphi}_e = \ddot{b}_e = 0,$$

$$\begin{cases} 0 = F_e - kv_0 - f[(m_1 + m_2)g] \\ 0 = -gm_2 \cdot \sin\varphi_e - k(v_0\cos\varphi_e) \\ \begin{cases} F_e = kv_0 + fg(m_1 + m_2) \\ \varphi_e = \text{atan} \frac{-kv_0}{gm_2} \end{cases} \end{cases}$$

Petits mouvements autour de la position d'équilibre dynamique stable :

$$\varepsilon_\varphi = \varphi - \varphi_e; \dot{\varepsilon}_b = \dot{b} - v_0$$

$$(m_1 + m_2)\dot{\varepsilon}_b + m_2L(\dot{\varepsilon}_\varphi\cos(\varepsilon_\varphi + \varphi_e) - \varepsilon_\varphi^2\sin(\varepsilon_\varphi + \varphi_e)) = F_e - k(\dot{\varepsilon}_b + v_0 + L\dot{\varepsilon}_\varphi\cos(\varepsilon_\varphi + \varphi_e)) - f[(m_1 + m_2)g + kL\dot{\varepsilon}_\varphi\sin(\varepsilon_\varphi + \varphi_e) + Lm_2(\ddot{\varphi}\sin(\varepsilon_\varphi + \varphi_e) + \varepsilon_\varphi^2\cos(\varepsilon_\varphi + \varphi_e))],$$

$$m_2\dot{\varepsilon}_b\cos(\varepsilon_\varphi + \varphi_e) + m_2\dot{\varepsilon}_\varphi L = -gm_2 \cdot \sin(\varepsilon_\varphi + \varphi_e) - k((\dot{\varepsilon}_b + v_0)\cos(\varepsilon_\varphi + \varphi_e) + L\dot{\varepsilon}_\varphi),$$

Développement limité au premier ordre :

$$\begin{cases} \sin(\varepsilon_\varphi + \varphi_e) = \sin\varepsilon_\varphi\cos\varphi_e + \cos\varepsilon_\varphi\sin\varphi_e \sim \sin\varphi_e + \varepsilon_\varphi\cos\varphi_e \\ \cos(\varepsilon_\varphi + \varphi_e) = \cos\varphi_e\cos\varepsilon_\varphi - \sin\varepsilon_\varphi\sin\varphi_e \sim \cos\varphi_e - \varepsilon_\varphi\sin\varphi_e \end{cases}$$

On linéarise :

$$(m_1 + m_2)\dot{\varepsilon}_b + m_2L\dot{\varepsilon}_\varphi\cos\varphi_e =$$

$$F_e - k(\dot{\varepsilon}_b + v_0 + L\dot{\varepsilon}_\varphi\cos\varphi_e) - f[(m_1 + m_2)g + kL\dot{\varepsilon}_\varphi\sin\varphi_e + Lm_2\dot{\varepsilon}_\varphi\sin\varphi_e],$$

$$m_2\dot{\varepsilon}_b\cos\varphi_e + m_2\dot{\varepsilon}_\varphi L = -gm_2 \cdot (\sin\varphi_e + \varepsilon_\varphi\cos\varphi_e) - k(\dot{\varepsilon}_b\cos\varphi_e + v_0(\cos\varphi_e - \varepsilon_\varphi\sin\varphi_e) + L\dot{\varepsilon}_\varphi),$$

On remplace  $F_e$  par sa valeur : les constantes s'annulent.

$$\begin{cases} (m_1 + m_2)\dot{\varepsilon}_b + m_2L\dot{\varepsilon}_\varphi\cos\varphi_e = -k(\dot{\varepsilon}_b + L\dot{\varepsilon}_\varphi\cos\varphi_e) - f[kL\dot{\varepsilon}_\varphi\sin\varphi_e + Lm_2\dot{\varepsilon}_\varphi\sin\varphi_e] \\ m_2\dot{\varepsilon}_b\cos\varphi_e + m_2\dot{\varepsilon}_\varphi L = -gm_2 \cdot \varepsilon_\varphi\cos\varphi_e - k(\dot{\varepsilon}_b\cos\varphi_e - v_0\varepsilon_\varphi\sin\varphi_e + L\dot{\varepsilon}_\varphi) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} m_2L\cos\varphi_e + fLm_2\sin\varphi_e & (m_1 + m_2) \\ m_2L & m_2\cos\varphi_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}_\varphi \\ \dot{\varepsilon}_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f + kL\cos\varphi_e + fkL\sin\varphi_e & k \\ kL & k\cos\varphi_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}_\varphi \\ \dot{\varepsilon}_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ gm_2\cos\varphi_e & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_\varphi \\ \varepsilon_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Solution de la forme :

$$\varepsilon_\varphi = z_1 \cdot e^{\lambda t}, \varepsilon_b = z_2 \cdot e^{\lambda t}$$

On réinjecte dans les équations du mouvement linéarisées :

$$\begin{bmatrix} (m_2 L \cos \varphi_e + f L m_2 \sin \varphi_e) \lambda^2 + (f + k L \cos \varphi_e + f k L \sin \varphi_e) \lambda & (m_1 + m_2) \lambda^2 + k \lambda \\ m_2 L \lambda^2 + k L \lambda + g m_2 \cos \varphi_e & m_2 \cos \varphi_e \lambda^2 + k \cos \varphi_e \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dét=0;

$$[(m_2 L \cos \varphi_e + f L m_2 \sin \varphi_e) \lambda^2 + (f + k L \cos \varphi_e + f k L \sin \varphi_e) \lambda] \cdot [m_2 \cos \varphi_e \lambda^2 + k \cos \varphi_e \lambda] - [m_2 L \lambda^2 + k L \lambda + g m_2 \cos \varphi_e] \cdot [(m_1 + m_2) \lambda^2 + k \lambda] = 0$$

Résolution :

Polynôme de la forme  $a_1 \lambda^4 + a_2 \lambda^3 + a_3 \lambda^2 + a_4 \lambda + a_5 = 0$ , il possède 4 racines complexes conjuguées  $\lambda_1 = b_{12} + i c_{12} = \overline{\lambda_2}, \lambda_3 = b_{34} + i c_{34} = \overline{\lambda_4}$

Donc le polynôme peut s'écrire :

$$a_1 (\lambda - \lambda_1) (\lambda - \lambda_2) (\lambda - \lambda_3) (\lambda - \lambda_4) = 0$$

Il n'y a plus qu'à développer et à identifier !

Remarque : les pulsations propres du système sont  $c_{12}$  et  $c_{34}$

## Résumé de cours S5

### Formule du changement de repère de dérivation (ou formule de dérivation composée)

$$\frac{d^{(0)} \vec{U}}{dt} = \frac{d^{(1)} \vec{U}}{dt} + \vec{\Omega}_{1/0} \wedge \vec{U}$$

**Torseur cinétique** : torseur associé au champ de vitesses du solide S.

$$[L_{S/0}]_C = \left[ \vec{p}_{S/0} \mid \vec{L}_{S/0C} \right]_C \quad \vec{p}_{S/0} = m \vec{v}(G)_{S/0} \quad \vec{L}_{S/0C} = \int \vec{CP} \wedge \vec{v}(P)_{S/0} dm$$

**Torseur dynamique** : torseur associé au champ des accélérations du solide S.

$$[N_{S/0}]_C = \left[ \vec{D}_{S/0} \mid \vec{N}_{S/0C} \right]_C \quad \vec{D}_{S/0} = m \vec{a}(G)_{S/0} \quad \vec{N}_{S/0C} = \int \vec{CP} \wedge \vec{a}(P)_{S/0} dm$$

### Relation entre les résultantes cinétique et dynamique

$$\vec{D}(S/0) = \frac{d^{(0)} \vec{p}(S/0)}{dt}$$

### Relation entre les moments cinétique et dynamique

$$\vec{N}(S/0)_C = \frac{d^{(0)} \vec{L}(S/0)_C}{dt} + \vec{v}(C)_{/0} \wedge \vec{p}(S/0)$$

$$\vec{L}_{S/0C} = m \vec{CG} \wedge \vec{v}(O_S)_{S/0} + m \vec{CO}_S \wedge (\vec{\Omega}_{S/0} \wedge \vec{O}_S G) + [I_{O_S}] \vec{\Omega}_{S/0}$$

### PFD

$$[F_{ext/\Sigma}]_C = [N_{\Sigma/0}]_C$$

### Théorème de la résultante dynamique

$$\vec{F}_{ext/\Sigma} = \vec{D}_{\Sigma/0}$$

### Théorème du moment dynamique

$$\vec{M}_{ext/\Sigma C} = \vec{N}_{\Sigma/0C}$$

### Puissance

$$P(\text{actions extérieures}) = \vec{F}_{ext/S} \cdot \vec{v}(A)_{S/0} + \vec{M}_{ext/S A} \cdot \vec{\Omega}_{S/0}$$

La puissance des forces extérieures correspond au « comoment » du torseur des actions mécaniques extérieures et du torseur cinématique du solide.

$$P_{méc} = P_{ext} + P_{int}$$

## Energie potentielle

Puissance d'une force dérivant d'un potentiel :

$$P = - \frac{dE_{\text{pot}}}{dt}$$

Energie potentielle d'une force constante (poids ici)

$$E_{\text{pot}}(\text{poids}) = - \overrightarrow{\text{OG}} \cdot \overrightarrow{P} + cste$$

Energie potentielle d'un ressort de traction-compression

$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} k_x \delta_x^2 + cste$$

...d'un ressort de torsion

$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} k_\theta \delta_\theta^2 + cste$$

## Energie cinétique

$$E_{\text{cin}} = \frac{1}{2} m \overrightarrow{v(\text{O}_s)}_{S_0}^2 + m \overrightarrow{v(\text{O}_s)}_{S_0} \cdot (\overrightarrow{\Omega}_{S_0} \wedge \overrightarrow{\text{O}_s\text{G}}) + \frac{1}{2} \overrightarrow{\Omega}_{S_0} [I_{\text{O}_s}] \overrightarrow{\Omega}_{S_0}$$

## Théorème de l'énergie cinétique

$$P_{\text{ext}} + P_{\text{int}} = \frac{dE_{\text{cin}}}{dt}$$

Intégrale première de l'énergie (Si toutes les forces appliquées au système dérivent d'un potentiel)

$$E_{\text{pot}} + E_{\text{cin}} = cste$$

## Théorème de Lejeune Dirichlet - condition suffisante (forces conservatives)

### Première partie

Conditions d'application : le système  $\Sigma$  n'est soumis qu'à des forces dérivant d'un potentiel et donc indépendantes du temps. La position de  $\Sigma$  est définie par  $n$  paramètres notés  $q_i$  ( $i$  variant de 1 à  $n$ ).

Il y a position d'équilibre si cette position, définie par les paramètres à l'équilibre  $q_{ie}$ , correspond à un extremum de la fonction énergie potentielle.

$$\forall q_i, \left. \frac{\partial E_{\text{pot}}}{\partial q_i} \right|_{q_{ie}} = 0 \quad (\text{système de } n \text{ équations})$$

### Deuxième partie

L'équilibre est stable si la configuration de l'équilibre correspond à un minimum relatif de la fonction énergie potentielle.

## Théorème de Liapounov (forces non conservatives)

Si toutes les racines de  $P(\lambda)$  ont leur partie réelle négative, alors l'équilibre est stable.

Si au moins une des racines de  $P(\lambda)$  a sa partie réelle positive, alors l'équilibre est instable.

Sinon, on ne peut pas conclure...

C'était le mot de conclusion !