

Semaine 8

Géométrie des masses :

Centre de masse

Exercices :

0 : calculer la position du cdm d'un demi cercle de rayon R et de masse m

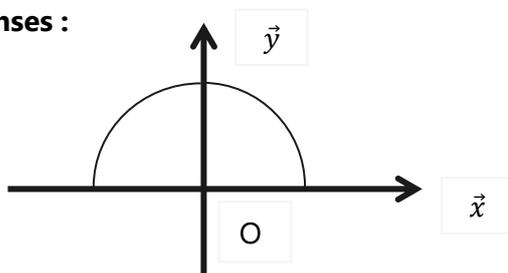
1 : calculer la position du cdm d'un demi disque homogène de rayon R et de masse m

2 : calculer la position du cdm d'un cône plein homogène de rayon de base R, de hauteur H et de masse m

3 : calculer la position du cdm d'une pyramide pleine homogène de base carrée, de côté a et de hauteur H portée par \vec{z} .

Réponses :

0 :



Par symétrie, on peut dire que : $\overrightarrow{OG} \Big|_{y_G}^0$ Soit M un point quelconque du solide : $\overrightarrow{OM} \Big|_{y_M}^{x_M} \Big|_0$

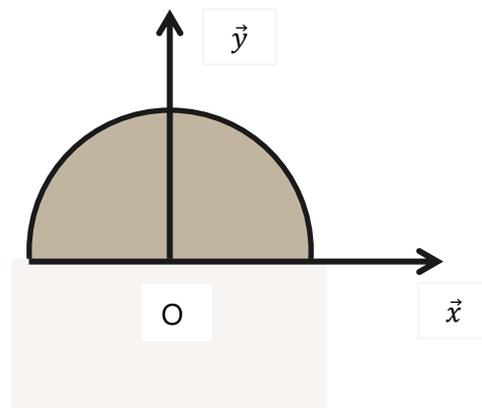
$$m \cdot y_G = \int y_M \cdot dm, \text{ avec } dm = \rho \cdot dl, \rho = \frac{m}{\pi \cdot R}, dl = R d\theta \text{ (coordonnées cylindriques)},$$

En coordonnées cylindriques : $\overrightarrow{OM} = R \cdot \vec{e}_r$, donc $y_M = R \cdot \sin\theta$

$$m \cdot y_G = \frac{m}{\pi \cdot R} \int R \cdot \sin\theta \cdot R d\theta, y_G = \frac{R}{\pi} \int_0^\pi \sin\theta \cdot d\theta$$

$$y_G = \frac{2}{\pi} R$$

1 :



Par symétrie, on peut dire que : $\overrightarrow{OG} \Big|_{y_G}^0$ Soit M un point quelconque du solide : $\overrightarrow{OM} \Big|_{y_M}^{x_M} \Big|_0$

$$m \cdot y_G = \int y_M \cdot dm, \text{ avec } dm = \rho \cdot dS, \rho = \frac{2m}{\pi \cdot R^2}, dS = r dr d\theta \text{ (coordonnées cylindriques)},$$

En coordonnées cylindriques : $\overrightarrow{OM} = r \cdot \vec{e}_r$, donc $y_M = r \cdot \sin\theta$

$$m \cdot y_G = \frac{2m}{\pi \cdot R^2} \iint r \cdot \sin\theta \cdot r dr d\theta, r \text{ et } \theta \text{ sont indépendants car les bornes d'intégration de } r \text{ (de } 0 \text{ à } R)$$

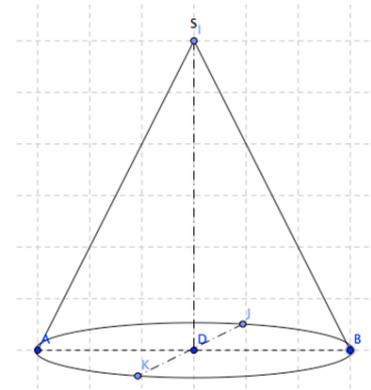
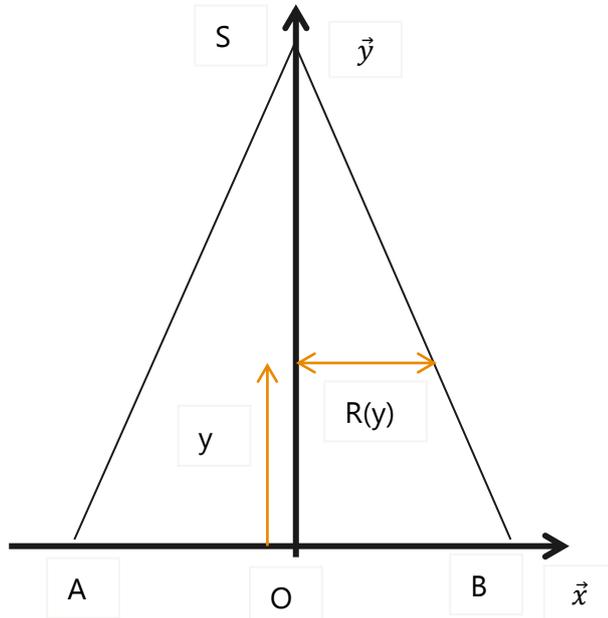
ne dépendent pas de θ , et les bornes d'intégration de θ (de 0 à π) ne dépendent pas de r .

L'intégrale double se transforme donc en la multiplication de deux intégrales simples :

$$m \cdot y_G = \frac{2m}{\pi \cdot R^2} \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta \cdot d\theta$$

$$y_G = \frac{2}{\pi \cdot R^2} \frac{R^3}{3} * 2 = \frac{4}{3\pi} R$$

2 :



Par symétrie, on peut dire que : $\vec{OG} \begin{matrix} 0 \\ y_G \\ 0 \end{matrix}$. Soit M un point quelconque du solide : $\vec{OM} \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}$

$m \cdot y_G = \int y \cdot dm$, avec $dm = \rho \cdot dV$, $\rho = \frac{m}{V}$, $dV = r dr d\theta dy$ (coordonnées cylindriques),

$$V = \int dV = \iiint r dr d\theta dy$$

Les variables r et z sont liées donc les intégrales sont imbriquées : $R(y) = R(1 - \frac{y}{H})$

$$V = \int_0^H \left[\int_0^{R(y)} r dr \right] dy \cdot \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi \int_0^H \frac{R(y)^2}{2} dy = \pi R^2 \int_0^H \left(1 - \frac{y}{H}\right)^2 dy = \pi R^2 \left[-\frac{H}{3} \left(1 - \frac{y}{H}\right)^3 \right]_0^H$$

$$V = \frac{\pi R^2 H}{3}$$

Donc :

$$m \cdot y_G = \frac{3m}{\pi R^2 H} \int y \cdot dV = \frac{3m}{\pi R^2 H} \iiint y \cdot r \cdot dr \cdot d\theta \cdot dy$$

$$y_G = \frac{3}{\pi R^2 H} \int_0^H \left[\int_0^{R(y)} r dr \right] y dy \cdot \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{3}{\pi R^2 H} 2\pi \int_0^H \frac{R(y)^2}{2} y dy = \frac{3 \cdot R^2}{R^2 H} \int_0^H \left(1 - \frac{y}{H}\right)^2 y dy$$

$$y_G = \frac{3}{H} \int_0^H \left(y - 2 \frac{y^2}{H} + \frac{y^3}{H^2} \right) dy$$

$$y_G = \frac{3}{H} \left[\frac{y^2}{2} - 2 \frac{y^3}{3H} + \frac{y^4}{4H^2} \right]_0^H = \frac{H}{4}$$

$$3 : z_G = \frac{H}{4}, V = \frac{H \cdot a^2}{3}$$

Semaine 9

Matrices d'inertie :

Cours introductif à la matrice d'inertie

Exercices :

1 : calculer la matrice d'inertie d'une barre homogène de longueur $2L$ et de masse m en son centre O dans le repère $R(O; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ lié à la barre tel que la barre soit portée par $(O; \vec{x})$

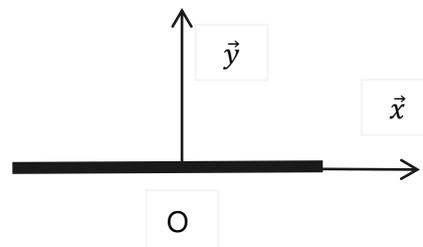
2 : calculer la matrice d'inertie d'un demi disque homogène de rayon R et de masse m en son cdm G dans le repère $R(O; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ lié au solide tel que \vec{OG} soit porté par $(O; \vec{y})$

3: calculer la matrice d'inertie d'un cône homogène de rayon R , de hauteur H et de masse m au centre de sa base O dans le repère $R(O; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ lié au solide tel que \vec{OG} soit porté par $(O; \vec{z})$, puis en K tel que $\vec{OK} = R \cdot \vec{x}$

4 : calculer la matrice d'inertie d'une pyramide pleine homogène de base carrée, de côté a et de hauteur H portée par \vec{z} au centre O de sa base.

Réponses :

1:



Le solide possède un axe de symétrie de révolution $(O; \vec{x})$ donc la matrice est diagonale et $B=C$

$$A = \int (y^2 + z^2) dm, \text{ avec } y = z = 0 \text{ car le solide est filaire donc } A=0$$

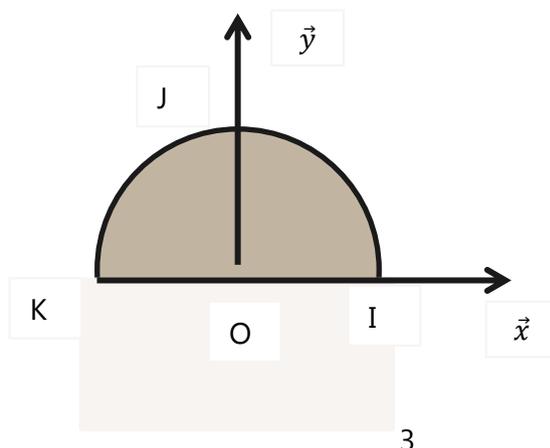
$$B = \int (x^2 + z^2) dm, \text{ avec } dm = \rho dx, \rho = \frac{m}{2L}$$

$$B = \frac{m}{2L} \int_{-L}^L x^2 dx = \frac{mL^2}{3} = C,$$

$$[I_{(O,S)}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mL^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mL^2}{3} \end{pmatrix}_R$$

2 :

$$OG = \frac{4R}{3\pi}$$



Le solide possède deux plans de symétrie : $(O; \vec{x}; \vec{y})$ et $(O; \vec{z}; \vec{y})$ donc la matrice est diagonale.

C'est un solide surfacique donc $z=0$

Calculons la matrice d'inertie en O pour commencer

$$A = \int (y^2) dm; dm = \rho \cdot dS; \rho = \frac{2m}{\pi R^2}; dS = r dr d\theta; y = r \sin\theta$$

$$A = \frac{2m}{\pi R^2} \iint (r \sin\theta)^2 r dr d\theta = \frac{2m}{\pi R^2} \int_0^R r^3 dr \int_0^\pi (\sin\theta)^2 d\theta$$

$$A = \frac{2m}{\pi R^2} \int_0^R r^3 dr \int_0^\pi \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} d\theta = \frac{2m}{\pi R^2} \frac{R^4}{4} \frac{\pi}{2} = \frac{mR^2}{4}$$

Or pour le quart de disque (OIJ): $A = B = \frac{mR^2}{8}$

Donc pour le demi disque : $B = \frac{mR^2}{4}$ (2 quarts de disque !)

$$C = \int (x^2 + y^2) dm = A + B = \frac{mR^2}{2}$$

Remarque :

On pouvait commencer par C (plus facile)

$$C = \int (x^2 + y^2) dm = \int r^2 dm = \frac{2m}{\pi R^2} \int_0^R r^3 dr \int_0^\pi d\theta = \frac{mR^2}{2}$$

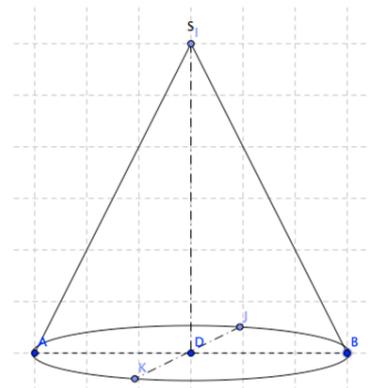
Puis on remarque que $C = A + B$ avec $A = B$

Matrice d'inertie en G : on applique Huygens

$$[I_{(G,S)}] = [I_{(O,S)}] - \begin{pmatrix} m \left(\frac{4R}{3\pi}\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m \left(\frac{4R}{3\pi}\right)^2 \end{pmatrix}_R$$

3 :

$(O; \vec{z})$ est un axe de symétrie de révolution donc la matrice d'inertie du cône calculée en O est diagonale et $A=B$



$$[I_{(O,S)}] = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_R$$

Calcul de C

$$C = \int (x^2 + y^2) dm, dm = \rho dV, \rho = \frac{m}{V}, V = \frac{\pi R^2 H}{3}, dV = r dr d\theta dz, x^2 + y^2 = r^2$$

Les variables r et z sont liées donc les intégrales sont imbriquées : $R(z) = R(1 - \frac{z}{H})$

$$C = \rho \int_0^H \left[\int_0^{R(z)} r^3 dr \right] dz \cdot \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi\rho \int_0^H \frac{R(z)^4}{4} dz = \frac{3mR^2}{2H} \int_0^H \left(1 - \frac{z}{H}\right)^4 dz$$

$$C = \frac{3mR^2}{2H} \left[-\frac{H}{5} \left(1 - \frac{z}{H}\right)^5 \right]_0^H = \frac{3mR^2}{10}$$

Calcul de A :

$$A = \int (z^2 + y^2) dm, \text{ par symétrie } \int y^2 dm = \int x^2 dm = \frac{C}{2}$$

Donc $A = \int z^2 dm + \frac{C}{2}$, on pose $K = \int z^2 dm$

$$K = \rho \int_0^H \left[\int_0^{R(z)} r dr \right] z^2 dz \cdot \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi\rho \int_0^H \frac{R(z)^2}{2} z^2 dz = \frac{3m}{H} \int_0^H \left(1 - \frac{z}{H}\right)^2 z^2 dz$$

$$K = \frac{3m}{H} \int_0^H \left(z^2 - \frac{2z^3}{H} + \frac{z^4}{H^2} \right) dz = \frac{3m}{H} \left[\frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{2H} + \frac{z^5}{5H^2} \right]_0^H = \frac{mH^2}{10}$$

$$A = \frac{3mR^2}{20} + \frac{mH^2}{10}$$

En K : Huygens. On déplace de O à G (indice ') puis de G à K (indice '')

$$C' = C, B' = B - m \cdot \left(\frac{H}{4}\right)^2, A' = A - m \cdot \left(\frac{H}{4}\right)^2, D' = E' = F' = 0$$

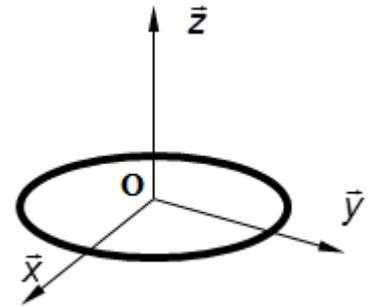
$$C'' = C' + m \cdot R^2, B'' = B' + m \cdot \left(\left(\frac{H}{4}\right)^2 + R^2\right), A'' = A' + m \cdot \left(\frac{H}{4}\right)^2$$

$$4 : A = B = \frac{M}{20} \left(a^2 + \frac{3H^2}{4} \right); C = \frac{M \cdot a^2}{10}$$

Autres exercices :

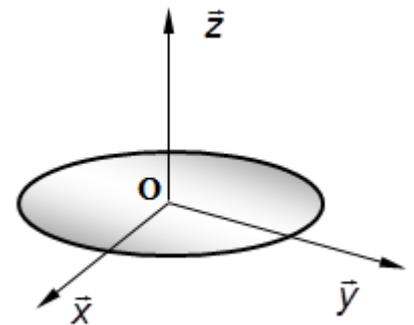
Anneau homogène de rayon R.

$$[I_S]_O = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} mR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & mR^2 \end{bmatrix}_{O,R_S}$$



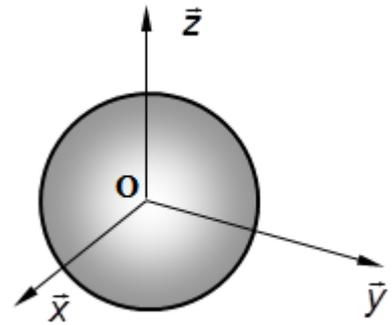
Disque homogène de rayon R.

$$[I_S]_O = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} mR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} mR^2 \end{bmatrix}_{O,R_S}$$



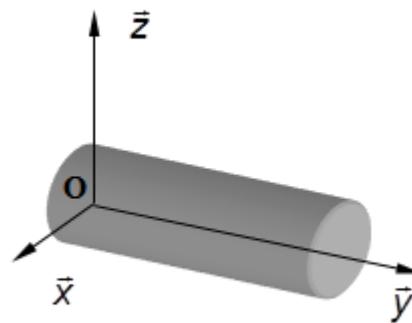
Sphère pleine homogène (boule) de rayon R .

$$[I_S]_O = \begin{bmatrix} \frac{2}{5}mR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5}mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5}mR^2 \end{bmatrix}_{O,R_S}$$



Cylindre homogène de rayon R et de longueur H .

$$[I_S]_O = \begin{bmatrix} \frac{1}{12}m(3R^2 + 4H^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12}m(3R^2 + 4H^2) \end{bmatrix}_{O,R_S}$$



Semaine 10

Révisions, questions, DS ou CC3

Semaine 11

Méthodologie dynamique du solide

A : Toute étude dynamique d'un système commence par le choix d'un repère de référence galiléen.

B : Ensuite, il faut fixer, à chaque sous ensemble cinématique constituant le système, un repère.

C : Les paramètres de position –translation ou rotation- apparaissent alors : ils permettent de passer d'un repère à un autre.

D : Une dernière étape consiste à déterminer les éventuelles relations entre les paramètres de position afin de déterminer le nombre de paramètres indépendants.

Lorsque l'on isole un système, on redessine **UNIQUEMENT** le système isolé ; on remplace les contacts avec les solides non isolés par les torseurs des efforts de liaison, sans oublier les torseurs des actions à distance (la gravité par exemple). Ceci débouche sur le **BAME** : bilan des actions mécaniques extérieures.

Ensuite on effectue le **BQA** : bilan des quantités d'accélération ; on détermine la résultante dynamique et/ou le moment dynamique.

Les équations du PFD permettent d'obtenir deux types d'équations : les équations de mouvement (évolution temporelle d'un paramètre de position) et les équations d'efforts (évolution temporelle d'une force ou d'un moment).

Le PFD –égalité entre le torseur des efforts extérieurs avec le torseur dynamique- fournit deux équations vectorielles : l'équation de la résultante (permet de déterminer une force ou une translation) et l'équation de moment (permet de déterminer un moment ou une rotation).

Conseil (pas obligatoire, mais pratique) **pour le calcul du moment dynamique** en un point $M \in S/R_0$. On se pose la question suivante : « est ce que $M \in S$ est fixe dans R_0 ? »

Si oui : $\overrightarrow{N_{M \in S/R_0}} = \left. \frac{d\overrightarrow{L_{M \in S/R_0}}}{dt} \right|_{R_0}$, $\overrightarrow{L_{M \in S/R_0}} = [I_{(M,S)}]_{R_S} \cdot \overrightarrow{\Omega_{R_S/R_0}}$

Sinon :

$\overrightarrow{N_{M \in S/R_0}} = \overrightarrow{N_{G \in S/R_0}} + \overrightarrow{MG} \wedge m \cdot \overrightarrow{a_{G \in S/R_0}}$, $\overrightarrow{N_{G \in S/R_0}} = \left. \frac{d\overrightarrow{L_{G \in S/R_0}}}{dt} \right|_{R_0}$, $\overrightarrow{L_{G \in S/R_0}} = [I_{(G,S)}]_{R_S} \cdot \overrightarrow{\Omega_{R_S/R_0}}$

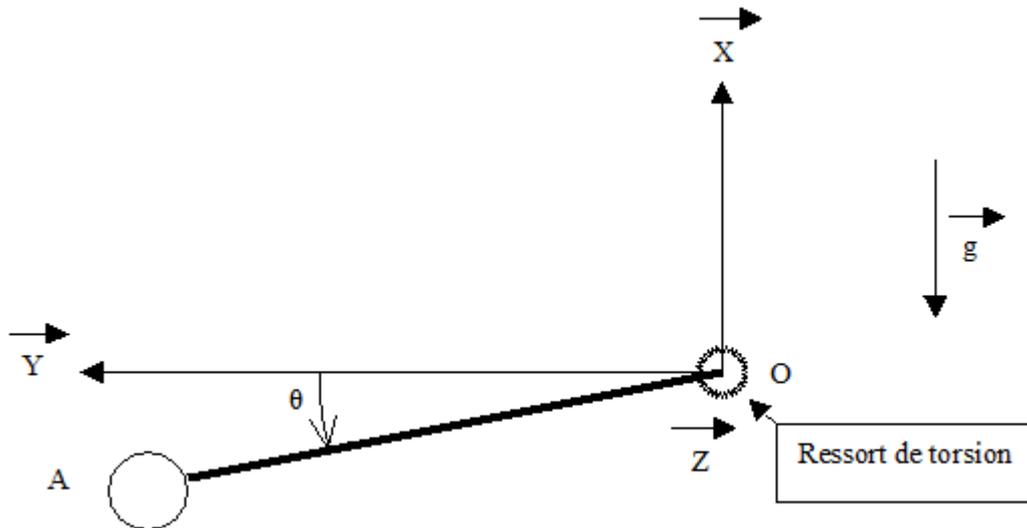
NB : le théorème de Huygens permet de passer la matrice d'inertie calculée au cdm G à n'importe quel autre point de (S), et inversement.

Résumé calcul du moment dynamique : <https://www.youtube.com/watch?v=fvn1ZE8RdQc>

Application du PFD sur un exemple

Un solide (S) de cdm G est composé d'une barre (1) OA homogène (longueur L , masse m , moment d'inertie suivant (O, \vec{Z}) : $mL^2/3$) et d'une masse ponctuelle (2) en A de masse m également.

(S) est en liaison pivot d'axe (O, \vec{Z}) avec le bâti, et un ressort de torsion (de raideur $C > 0$) a tendance à ramener (S) horizontalement sur (O, \vec{Y}) , c'est-à-dire à la position $\theta = 0$.



Le PFD va nous donner accès à la loi horaire $\theta(t)$ et aux efforts dynamiques au sein de la liaison pivot en O.

Vidéo montrant la résolution :

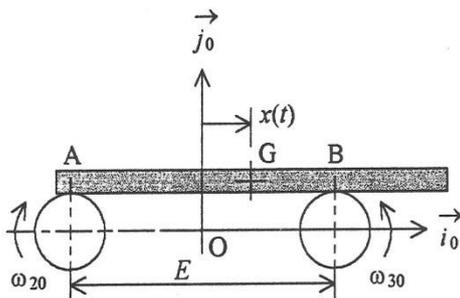
https://www.youtube.com/watch?v=_QWhYSAPRqE

Principe fondamental de la dynamique

1 *Un curieux oscillateur*

Nous disposons de deux rouleaux (2) et (3) et d'une barre rigide (1), solide de faible épaisseur, de longueur L et de masse m . Les rouleaux tournent à une vitesse élevée — la barre glisse en A et B.

Posons $\vec{AB} = E \vec{i}_0$, E : cste et $\vec{OG} \cdot \vec{i}_0 = x(t)$.



Nous serons amenés à considérer différents sens de rotation pour les rouleaux (2) et (3).

□ 1 - Présenter le bilan des forces extérieures appliquées sur la barre et le bilan des quantités d'accélération de cette barre. Les torseurs correspondants seront déterminés au point A. En déduire les équations du principe fondamental de la dynamique.

□ 2 - Nous considérons le cas où $\omega_{20} < 0$ et $\omega_{30} < 0$. Ecrire les relations traduisant le glissement avec frottement en A et B. Déterminer la loi de mouvement $x(t)$, pour les conditions initiales suivantes : à $t_0 = 0$, $x(t_0) = x_0$ et $\dot{x}(t_0) = 0$.

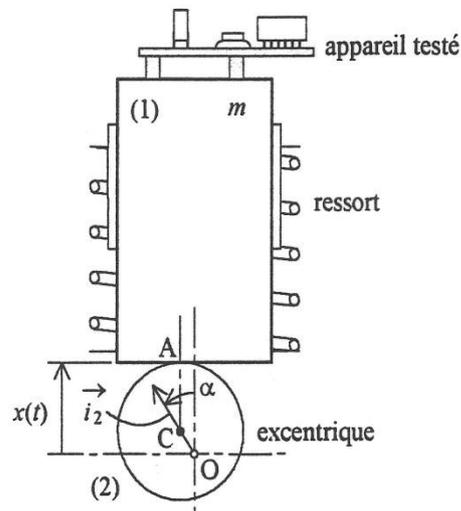
□ 3 - Même question, avec $\omega_{20} > 0$ et $\omega_{30} < 0$.

□ 4 - Même question, avec $\omega_{20} < 0$ et $\omega_{30} > 0$.

2 *Banc de test*

La fabrication des appareils s'accompagne d'une série de tests d'endurance en vue de leur qualification.

Le schéma ci-dessous représente un dispositif permettant de tester leur tenue aux vibrations.



Il comprend essentiellement un support (1) guidé en translation par rapport à un référentiel galiléen (0) et sur lequel est installé l'appareil. La rotation de l'excentrique engendre des vibrations. Nous allons étudier quelques aspects de ce dispositif.

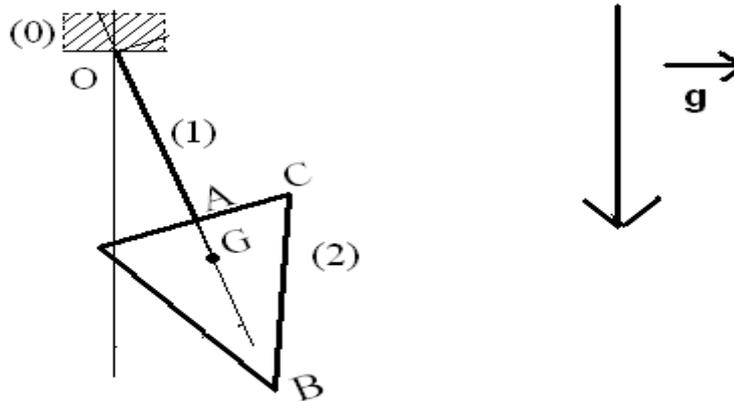
□ 1 - Exprimer la loi de mouvement du support $x(t)$ en fonction du paramètre d'entrée $\alpha = \omega t$ ($\omega = cste$) et de l'excentricité e : $\vec{OC} = e \vec{i}_2$. En déduire l'expression de la vitesse et de l'accélération du support, lorsque nous supposons que le contact en A entre (1) et (2) est établi.

□ 2 - Nous notons F_0 l'effort développé par le ressort lorsque $\alpha = \pi$ [2π] et k la raideur de celui-ci. Exprimer l'effort exercé par le ressort pour une position quelconque de l'ensemble.

□ 3 - Appliquer le principe fondamental de la dynamique au support (1). En déduire la valeur de la composante normale au contact N_{21} . Représenter l'évolution de cet effort en fonction de ωt pour différentes valeurs de ω .

3. Un pendule

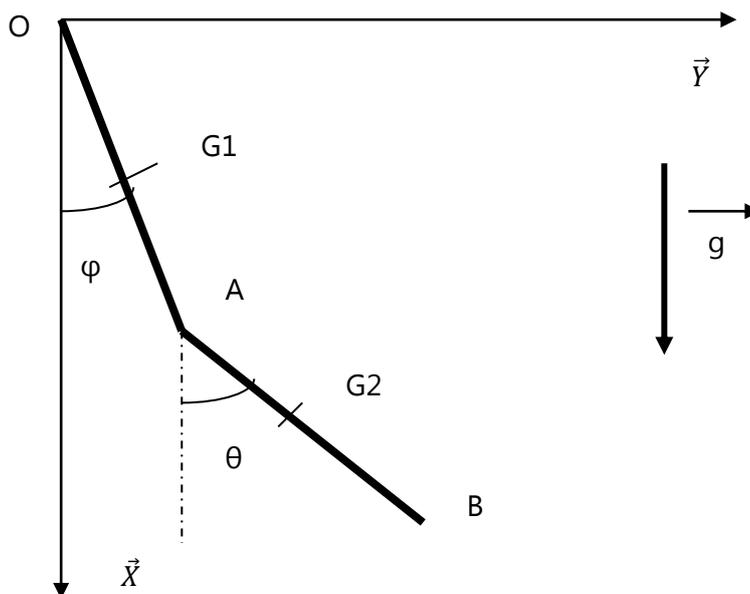
... est constitué d'une barre OA notée (1), de longueur H ($OA = H$) et de masse m , et d'un cône noté (2), de hauteur H ($AB = H$), de rayon de base R ($AC = R$), et de masse m . La liaison entre ces deux solides est un encastrement au point A. (S) (ensemble $\{(1),(2)\}$) est en liaison pivot en O par rapport au bâti (0). G cdm de (1) et(2), $OG = a$.



Ecrire les équations du PFD appliqué à (S)

4 : un double pendule...

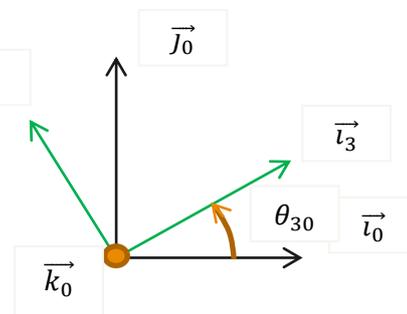
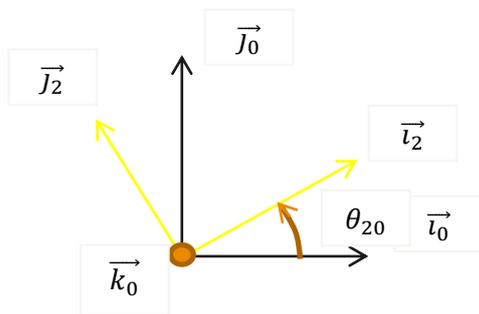
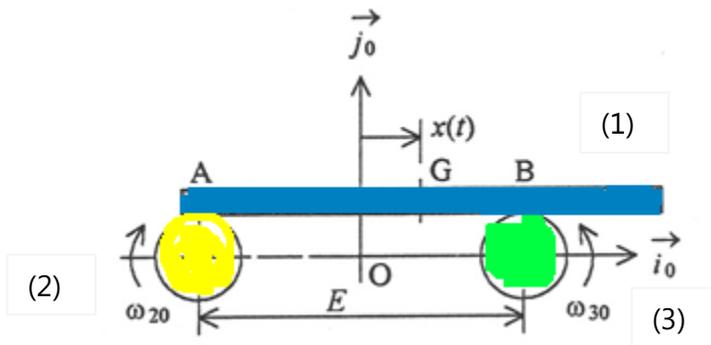
... est constitué de deux barres identiques OA (paramétrée par l'angle φ) et AB (paramétrée par l'angle θ) : longueur L , masse m , moment d'inertie **au centre de la barre** par rapport à l'axe Z : $\frac{mL^2}{12}$. Ces barres sont articulées en O et A (liaison pivot selon Z). Ecrire l'équation des moments en A en isolant (2) puis en O en isolant (1)U(2), en projection sur \vec{Z} à chaque fois.



Semaine 12

Solutions :

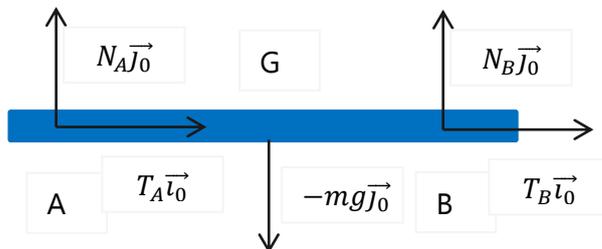
1 : repères, paramétrages



$$\vec{OG} = x(t) \cdot \vec{i}_0 + a \cdot \vec{j}_0$$

1-1 BAME

On isole (1)



Avec N_A et $N_B > 0$, T_A et T_B algébriques, $\frac{|T_A|}{N_A} = \frac{|T_B|}{N_B} = f$

BQA : $m \cdot \vec{a}_{G \in 1/0} = m\ddot{x} \cdot \vec{i}_0$, $\vec{N}_{G \in 1/0} = \vec{0} = \vec{N}_{A \in 1/0}$

$$\vec{AG} = \left(\frac{E}{2} + x\right) \vec{i}_0, \vec{AB} = E \cdot \vec{i}_0$$

Equation résultante :

$$\begin{cases} T_A + T_B = m\ddot{x} \\ N_A + N_B - mg = 0 \end{cases}$$

Equation de moment en A :

$$N_B \cdot E - mg \cdot \left(\frac{E}{2} + x\right) = 0$$

$$\begin{cases} T_A + T_B = m\ddot{x} \\ N_A = mg \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{E}\right) \\ N_B = mg \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{E}\right) \end{cases} \quad \text{et} \quad \frac{|T_A|}{N_A} = \frac{|T_B|}{N_B} = f$$

1-2 $\omega_{20} < 0$ donc $T_A > 0$; $\omega_{30} < 0$ donc $T_B > 0$ (les frottements sont opposés à la vitesse de glissement)

$m\ddot{x} = fmg$, donc $\ddot{x} = fg$, $\dot{x} = fgt$, $x = \frac{1}{2}fgt^2 + x_0$. Vrai tant que (1) est en contact avec (2)

1-3 $\omega_{20} > 0$ donc $T_A < 0$; $\omega_{30} < 0$ donc $T_B > 0$

$m\ddot{x} = 2fmg \frac{x}{E}$, donc $\ddot{x} - 2fg \frac{x}{E} = 0$, $x = \frac{x_0}{2}(e^{\omega t} + e^{-\omega t})$ avec $\omega = \sqrt{\frac{2fg}{E}}$, Vrai tant que (1) est en contact avec (2)

1-4 $\omega_{20} < 0$ donc $T_A > 0$; $\omega_{30} > 0$ donc $T_B < 0$

$m\ddot{x} = -2fmg \frac{x}{E}$, donc $\ddot{x} + 2fg \frac{x}{E} = 0$, $x = x_0 \cdot \cos(\omega t)$ avec $\omega = \sqrt{\frac{2fg}{E}}$, oscillateur !

2-1: $\vec{OA} = e \cdot \vec{i}_2 + R \cdot \vec{i}_0$, $x(t) = e \cdot \cos(\omega t) + R$, $\dot{x} = -e\omega \cdot \sin(\omega t)$, $\ddot{x} = -e\omega^2 \cdot \cos(\omega t)$

2-2 : $\vec{F}_R = -k(L+x)\vec{i}_0$, $L = cte$, $F_0 = k(L+R-e)$ d'où $L = e - R + \frac{F_0}{k}$

$$\text{donc } \vec{F}_R = -\left(F_0 + ke(1 + \cos(\omega t))\right)\vec{i}_0$$

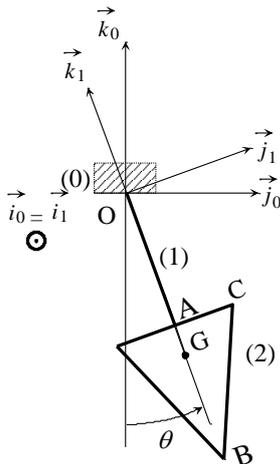
2-3 : PFD, équation de la résultante en projection sur \vec{i}_0 ,

$$m\ddot{x} = N_{21} - \left(F_0 + ke(1 + \cos(\omega t))\right) \text{ d'où } N_{21} = -me\omega^2 \cdot \cos(\omega t) + F_0 + ke(1 + \cos(\omega t))$$

Semaine 13

3 : pendule

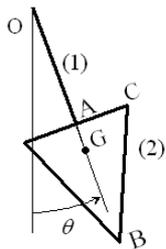
Repères-paramétrage :



Le paramètre de position $\theta(t)$ est un paramètre de rotation autour de (O, \vec{i}_1) , il positionne (1) et (2).

BAME

On isole (1) et (2) :



Bilan des efforts :

$$\text{liaison pivot en O : } \{Pivot_{0/1}\} = \begin{pmatrix} X & 0 \\ Y & M \\ Z & N \end{pmatrix}_{(0,R_1)} \quad (\text{mouvement plan donc } X=M=N=0)$$

pois en G : $\{Poids\} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -mg & 0 \end{pmatrix}_{(G,R_0)} \quad m = m_1 + m_2$

Equation des moments :

Le point de calcul des moments doit être sur (O, \vec{i}_1) , sinon Y et Z vont apparaître dans l'équation (inconnues de liaison). On choisit donc le point O.

$$\vec{M}_O \cdot \vec{i}_1 = \vec{N}_{O \in (1 \cup 2)} \cdot \vec{i}_1$$

Calcul de $\vec{M}_O \cdot \vec{i}_1$: $\vec{M}_O \cdot \vec{i}_1 = 0 + (\vec{OG} \wedge -mg\vec{k}_0) \cdot \vec{i}_1 = -amg \cdot \sin\theta$

BQA : calcul de $\vec{N}_{O \in (1 \cup 2)} \cdot \vec{i}_1$:

$$\vec{N}_{O \in (1 \cup 2)} = \vec{N}_{O \in 2} + \vec{N}_{O \in 1}$$

Le point $O \in (1)$ est fixe dans R_0 donc : $\vec{N}_{O \in 1} = \left. \frac{d\vec{L}_{O \in 1}}{dt} \right|_{R_0}$; et

$$\vec{L}_{O \in 1} = [I_{(O, S_1)}] \cdot [\Omega_{S_1/O}] = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{R_1} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{R_1} = A_1 \dot{\theta} \vec{i}_1, \quad \vec{N}_{O \in 1} = A_1 \ddot{\theta} \vec{i}_1$$

Le point $O \in (2)$ est fixe dans R_0 donc : $\vec{N}_{O \in 2} = \left. \frac{d\vec{L}_{O \in 2}}{dt} \right|_{R_0}$;

$$\vec{L}_{O \in 2} = [I_{(O, S_2)}] \cdot [\Omega_{S_2/O}] = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{R_1} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{R_1} = A_2 \dot{\theta} \vec{i}_1, \quad \vec{N}_{O \in 2} = A_2 \ddot{\theta} \vec{i}_1$$

Equation du moment sur \vec{i}_1 :

$$(A_1 + A_2)\ddot{\theta} = -amg \cdot \sin\theta \quad (\text{équation de mouvement : décrit l'évolution temporelle de } \theta(t))$$

Equation de la résultante :

BQA : $\vec{d}_{S/O} = m \cdot \vec{a}_{G \in S/O}, \vec{OG} = -a \cdot \vec{k}_1, \vec{v}_{G \in S/O} = a \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{j}_1, \vec{a}_{G \in S/O} = a \cdot \ddot{\theta} \cdot \vec{j}_1 + a \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \vec{k}_1$

En projection sur \vec{j}_1 : $m \cdot a \cdot \ddot{\theta} = Y - mg \cdot \sin\theta$

En projection sur \vec{k}_1 : $m \cdot a \cdot \dot{\theta}^2 = Z - mg \cdot \cos\theta$

$$\begin{cases} Y = m \cdot a \cdot \ddot{\theta} + mg \cdot \sin\theta \\ Z = m \cdot a \cdot \dot{\theta}^2 + mg \cdot \cos\theta \end{cases} ; \text{équations d'effort de liaison : } Y(t) \text{ et } Z(t)$$

4 : un double pendule...

En isolant (2) : $\frac{mL^2}{3} \ddot{\theta} + \frac{mL^2}{2} [\ddot{\phi} \cdot \cos(\theta - \phi) + \dot{\phi}^2 \cdot \sin(\theta - \phi)] = -mg \frac{L}{2} \sin\theta$

Avec $\vec{OG}_2 = L\vec{u}_1 + \frac{L}{2}\vec{u}_2, \vec{a}_{G_2 \in 2/O} = L\ddot{\phi}\vec{v}_1 - L\dot{\phi}^2\vec{u}_1 + \frac{L}{2}\ddot{\theta}\vec{v}_2 - \frac{L}{2}\dot{\theta}^2\vec{u}_2$

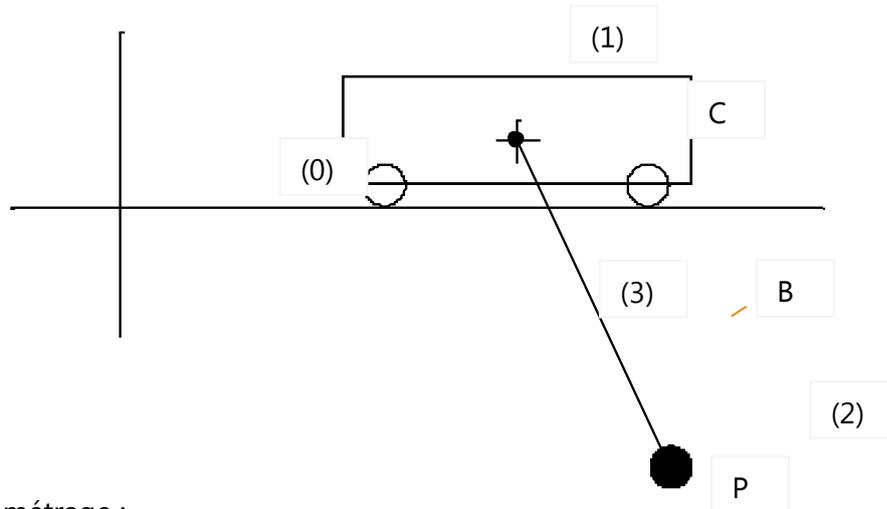
En isolant (1)U(2) :

$$\begin{aligned} \frac{mL^2}{3} \ddot{\theta} + \frac{mL^2}{2} [\ddot{\phi} \cdot \cos(\theta - \phi) + \dot{\phi}^2 \cdot \sin(\theta - \phi)] + \frac{4mL^2}{3} \ddot{\phi} + \frac{mL^2}{2} [\ddot{\theta} \cdot \cos(\theta - \phi) - \dot{\theta}^2 \cdot \sin(\theta - \phi)] \\ = -mg \frac{L}{2} (\sin\theta + 3\sin\phi) \end{aligned}$$

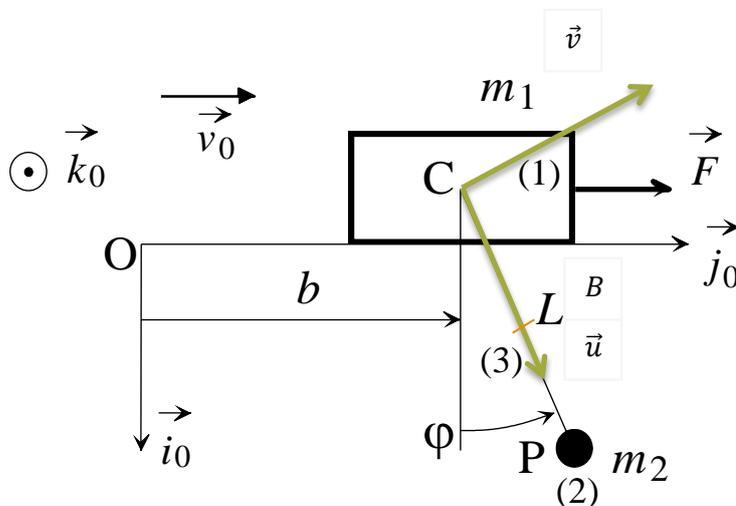
Pour ceux qui veulent aller plus loin...

Le chariot de grue (mouvement horizontal)

Un chariot de grue (1) (cdm C, masse m_1) se déplace sur un bras fixe horizontal (0) (frottements négligés). Une charge (P) ponctuelle (2) (point P, masse m_2) se balance au bout d'un câble modélisé par une barre (3) (longueur L , masse m_3 , cdm B) en liaison pivot sans frottement avec (1) en C. Une force F horizontale constante tracte (1) vers la droite.



Repères et paramétrage :



Paramètres de position : $b(t) = \overrightarrow{OC} \cdot \vec{j}_0$, $\varphi(t) = (\vec{j}_0, \vec{u})$,

Calculer les équations suivantes :

$$(1) : (m_1 + m_2 + m_3) \overrightarrow{a_G} \cdot \vec{j}_0 = \overrightarrow{F}_{\text{ext}/(1U2U3)} \cdot \vec{j}_0$$

$$(2) : \overrightarrow{M_C} \cdot \vec{k}_0 = \overrightarrow{N_{CE(2U3)}} \cdot \vec{k}_0$$

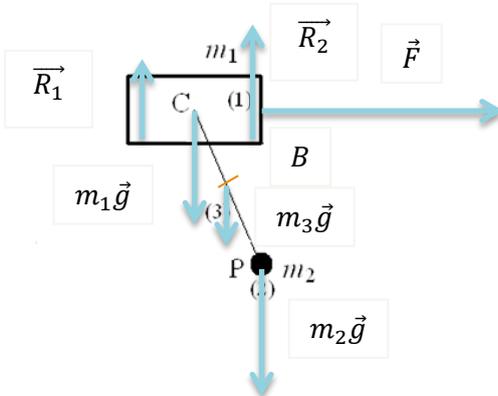
Solution :

Equation (1) :

BAME :

Calcul de $\overrightarrow{F_{ext/(1U2U3)}} \cdot \vec{J}_0$:

On isole (1)U(2)U(3)



\vec{R}_1 et \vec{R}_2 réactions des roues sur (1), $m_i \vec{g}$ les 3 poids et \vec{F} force de traction, donc :

$$\overrightarrow{F_{ext/(1U2U3)}} \cdot \vec{J}_0 = F$$

BQA :

Calcul de $(m_1 + m_2 + m_3) \overrightarrow{a_G} \cdot \vec{J}_0$:

$$(m_1 + m_2 + m_3) \overrightarrow{a_G} \cdot \vec{J}_0 = (m_1 \overrightarrow{a_C} + m_2 \overrightarrow{a_P} + m_3 \overrightarrow{a_B}) \cdot \vec{J}_0 ;$$

$$\overrightarrow{a_C} \cdot \vec{J}_0 = \ddot{b},$$

$$\overrightarrow{OP} = cte. \vec{t}_0 + b. \vec{J}_0 + L. \vec{u}, \quad \overrightarrow{v_{PE2}} = \dot{b} \vec{J}_0 + L \dot{\varphi} \vec{v}, \quad \overrightarrow{a_{PE2/0}} = \ddot{b} \vec{J}_0 + L \ddot{\varphi} \vec{v} - L \dot{\varphi}^2 \vec{u},$$

$$\overrightarrow{a_{PE2/0}} \cdot \vec{J}_0 = \ddot{b} + L(\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi),$$

$$\overrightarrow{OB} = cte. \vec{t}_0 + b. \vec{J}_0 + \frac{L}{2}. \vec{u}, \quad \overrightarrow{v_{BE3/0}} = \dot{b} \vec{J}_0 + \frac{L}{2} \dot{\varphi} \vec{v}, \quad \overrightarrow{a_{BE3/0}} = \ddot{b} \vec{J}_0 + \frac{L}{2} \ddot{\varphi} \vec{v} - \frac{L}{2} \dot{\varphi}^2 \vec{u},$$

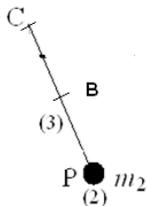
$$\overrightarrow{a_{BE3/0}} \cdot \vec{J}_0 = \ddot{b} + \frac{L}{2}(\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi),$$

$$\text{Equation liée à } b(t) : (m_1 + m_2 + m_3) \ddot{b} + \left(m_2 + \frac{m_3}{2}\right) L(\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi) = F$$

Equation (2) :

BAME

On isole (2)U(3) :



Calcul de $\overrightarrow{M_C} \cdot \vec{k}_0$

$$\overrightarrow{M_C} \cdot \vec{k}_0 = 0 + (\overrightarrow{CB} \wedge m_3 g \vec{t}_0 + \overrightarrow{CP} \wedge m_2 g \vec{t}_0) \cdot \vec{k}_0 = -Lg. \sin \varphi \left(m_2 + \frac{m_3}{2}\right)$$

Calcul de $\overrightarrow{N_{CE(2U3)}} \cdot \vec{k}_0$

$$\overrightarrow{N_{CE(2U3)}} \cdot \vec{k}_0 = \overrightarrow{N_{CE2}} \cdot \vec{k}_0 + \overrightarrow{N_{CE3}} \cdot \vec{k}_0,$$

$$\overrightarrow{N_{CE3}} \cdot \vec{k}_0 :$$

C€3 n'est pas fixe dans R_0 , donc on passe par le cdm de (3) : B

$$\overrightarrow{N_{CE3}} \cdot \overrightarrow{k_0} = \frac{d\overrightarrow{L_{BE3}}}{dt} \Big|_{R_0} \cdot \overrightarrow{k_0} = \frac{d(\overrightarrow{L_{BE3}} \cdot \overrightarrow{k_0})}{dt} \Big|_{R_0} \text{ car } \overrightarrow{k_0} \text{ fixe dans } R_0$$

$$\overrightarrow{L_{BE3}} = [I_{(B,S_3)}] \cdot [\Omega_{S_3/0}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_3 L^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_3 L^2}{12} \end{pmatrix}_{R_1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix}_{R_1} = \frac{m_3 L^2}{12} \dot{\varphi} \overrightarrow{k_0}$$

$$\overrightarrow{L_{BE3}} \cdot \overrightarrow{k_0} = \frac{m_3 L^2}{12} \dot{\varphi}, \overrightarrow{N_{BE3}} \cdot \overrightarrow{k_0} = \frac{m_3 L^2}{12} \ddot{\varphi}$$

Par permutation circulaire dans le produit mixte :

$$(\overrightarrow{CB} \wedge m_3 \overrightarrow{a_{BE3/0}}) \cdot \overrightarrow{k_0} = (\overrightarrow{k_0} \wedge \frac{L}{2} \overrightarrow{u}) \cdot m_3 \overrightarrow{a_{BE3/0}} = \frac{L}{2} \vec{v} \cdot m_3 (\ddot{b} \overrightarrow{j_0} + \frac{L}{2} \dot{\varphi} \vec{v} - \frac{L}{2} \dot{\varphi}^2 \overrightarrow{u}) = \frac{L m_3}{2} (\ddot{b} \cos \varphi + \frac{L}{2} \ddot{\varphi})$$

$$\text{Donc } \overrightarrow{N_{CE3}} \cdot \overrightarrow{k_0} = \frac{L m_3}{2} \ddot{b} \cos \varphi + \frac{m_3 L^2}{3} \ddot{\varphi}$$

$$\overrightarrow{N_{CE2}} \cdot \overrightarrow{k_0} :$$

C€2 n'est pas fixe dans R_0 , donc on passe par le cdm de (2) : P

$$\overrightarrow{N_{CE2}} \cdot \overrightarrow{k_0} = (\overrightarrow{N_{PE2}} + \overrightarrow{CP} \wedge m_2 \overrightarrow{a_{PE2}}) \cdot \overrightarrow{k_0}$$

$$\overrightarrow{N_{PE2}} \cdot \overrightarrow{k_0} = \frac{d\overrightarrow{L_{PE2}}}{dt} \Big|_{R_0} \cdot \overrightarrow{k_0}, \overrightarrow{L_{PE2}} = [I_{(P,S_2)}] \cdot [\Omega_{S_2/0}], [I_{(P,S_2)}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{R_1} \text{ car P masse ponctuelle}$$

$$\text{Donc } \overrightarrow{N_{PE2}} \cdot \overrightarrow{k_0} = 0$$

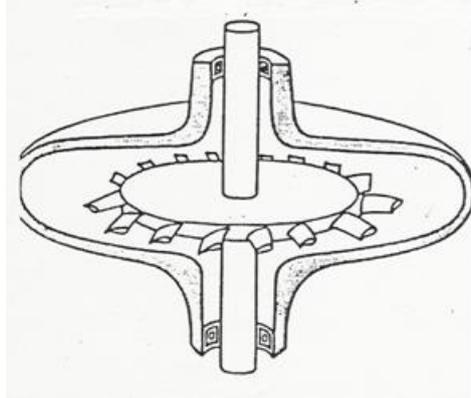
$$\overrightarrow{N_{CE2}} \cdot \overrightarrow{k_0} = (\overrightarrow{CP} \wedge m_2 \overrightarrow{a_{PE2}}) \cdot \overrightarrow{k_0} = (\ddot{b} \cos \varphi + L \ddot{\varphi}) L m_2$$

Equation liée à $\varphi(t)$:

$$\left(\frac{m_3}{2} + m_2\right) L \ddot{b} \cos \varphi + \left(\frac{m_3}{3} + m_2\right) \dot{\varphi} L^2 = -L g \cdot \sin \varphi \left(m_2 + \frac{m_3}{2}\right)$$

Pale de turbine

On se propose d'étudier l'allure des phénomènes de résonance qui pourraient se produire dans une structure de type machine tournante, en utilisant un modèle très simplifié.



Le rotor (1) de la machine est représenté par un solide de révolution. H désigne son centre de masse. On note M sa masse et I son moment d'inertie par rapport à son axe.

La liaison entre le stator et le rotor est de type **pivot glissant parfait** à laquelle se superpose une raideur axiale : le rotor peut se déplacer en translation verticale autour d'une position moyenne correspondant à H en O - le rappel vers cette position est schématisé par un ressort linéaire de raideur K et de longueur à vide nulle (l'écrasement du ressort en statique compense le poids de l'ensemble : on met à zéro longueur à vide et poids du système !)

Simultanément, un moteur exerce sur (1) un couple $C_m(t)$, imposant une rotation uniforme autour de l'axe du rotor vertical, de vitesse angulaire $\Omega = \dot{\varphi} = cte$ ($\Omega > 0$).

N solides identiques (P_k), appelés pales, sont reliés au rotor (1) de la machine, de façon identique, en des points A_k régulièrement répartis sur une circonférence, de centre H , et de rayon R .

Afin de modéliser la flexion des pales sous charge, on remplace la liaison encastrement avec le rotor par une liaison pivot d'axe orthoradial en A_k , couplé à un ressort de torsion de même axe au même point, de raideur C tel que la pale reste horizontale au repos.

Dans notre étude simplifiée, on considère (1) muni d'une seule pale (P) et le point A associé.

G est le centre de masse de (P), et $AG = L$ (*constante positive*)

On néglige le moment d'inertie de la pale autour de AG (deuxième axe ici), ce qui amène à prendre une matrice d'inertie en G sous une forme simple :

$$[I_{G,pale}] = \begin{bmatrix} I_P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_P \end{bmatrix}_{(G,R_{pale})}$$

Et on désigne par m la masse de la pale.

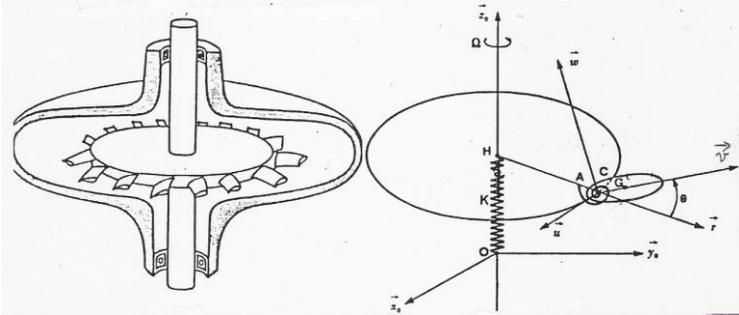
De plus, des forces dues à l'action du fluide s'opposent au mouvement de la pale (P) par rapport à R_0 . Cet ensemble de forces est considéré comme équivalent à une seule force continuellement appliquée en G :

$$\vec{F}_{fl} = -b \vec{v}(\mathbf{G})_{P/0}$$

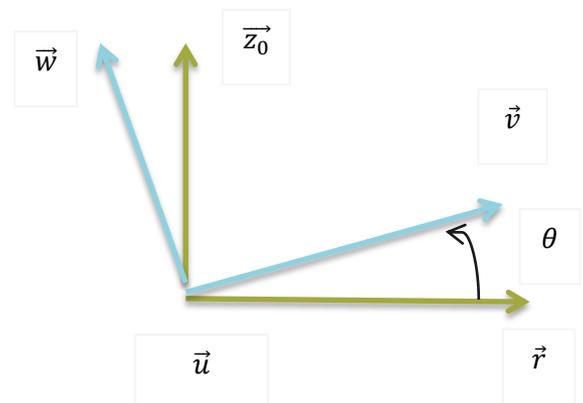
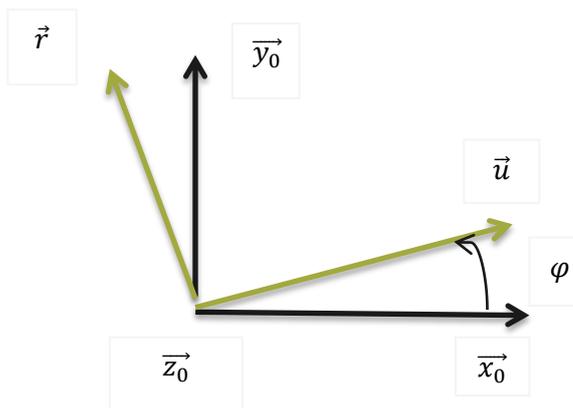
où b désigne une constante positive

Déterminer les équations du mouvement du système.

Mise en place des repères et du paramétrage :



$$\vec{OH} = z(t)\vec{z}_0, \vec{HA} = R\vec{r}, \vec{AG} = L\vec{v}$$



Calculer les équations suivantes :

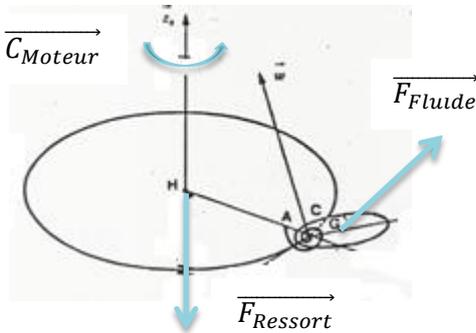
- (1) $(m + M)\vec{a}_B \cdot \vec{z}_0 = \overline{F_{ext/(PUR)}} \cdot \vec{z}_0$, avec B cdm de l'ensemble Pale + Rotor
- (2) $\vec{M}_A \cdot \vec{u} = \overline{N_{A\epsilon(P)}} \cdot \vec{u}$

Solution :

Equation (1) :

BAME : calcul de $\overrightarrow{F_{ext/(PUR)}} \cdot \overrightarrow{z_0}$

On isole (P)U(R) : bilan des efforts extérieurs (poids négligés)



$$\begin{aligned} \overrightarrow{F_{ext/(PUR)}} \cdot \overrightarrow{z_0} &= (\overrightarrow{F_{Ressort}} - b \overrightarrow{v_{GEP}}) \cdot \overrightarrow{z_0}, \\ \overrightarrow{F_{ext/(PUR)}} \cdot \overrightarrow{z_0} &= -Kz(t) - b(\dot{z} + L\dot{\theta} \cos\theta), \end{aligned}$$

BQA : calcul de $(m + M) \overrightarrow{a_B} \cdot \overrightarrow{z_0}$:

$$(m + M) \overrightarrow{a_{BE(PUR)/R_0}} \cdot \overrightarrow{z_0} = (m \overrightarrow{a_{GEP}} + M \overrightarrow{a_{HER}}) \cdot \overrightarrow{z_0}$$

$$\overrightarrow{a_{HER}} \cdot \overrightarrow{z_0} = \ddot{z},$$

$$\overrightarrow{OG} = z(t) \overrightarrow{z_0} + R \vec{r} + L \vec{v}, \quad \overrightarrow{v_{GEP}} = \dot{z} \overrightarrow{z_0} - R \Omega \vec{u} + L(\dot{\theta} \vec{w} - \Omega \cos\theta \vec{u}) = \dot{z} \overrightarrow{z_0} - \Omega(R + L \cos\theta) \vec{u} +$$

$$L \dot{\theta} \vec{w},$$

$$\overrightarrow{a_{GEP}} = \ddot{z} \overrightarrow{z_0} + \Omega \dot{\theta} L \sin\theta \vec{u} - \Omega^2(R + L \cos\theta) \vec{r} + L \ddot{\theta} \vec{w} + L \dot{\theta}(-\dot{\theta} \vec{v} + \Omega \sin\theta \vec{u}), \left(\frac{d\vec{w}}{dt} \right)_{R_0} = -\dot{\theta} \vec{v} +$$

$$\Omega \sin\theta \vec{u},$$

$$\overrightarrow{a_{GEP}} = \ddot{z} \overrightarrow{z_0} + 2\Omega \dot{\theta} L \sin\theta \vec{u} - \Omega^2(R + L \cos\theta) \vec{r} + L \ddot{\theta} \vec{w} - L \dot{\theta}^2 \vec{v},$$

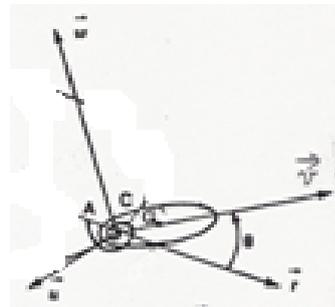
$$(m + M) \overrightarrow{a_{BE(PUR)/R_0}} \cdot \overrightarrow{z_0} = (m + M) \ddot{z} + m(L \ddot{\theta} \cos\theta - L \dot{\theta}^2 \sin\theta),$$

$$\text{Equation (1) : } (m + M) \ddot{z} + m(L \ddot{\theta} \cos\theta - L \dot{\theta}^2 \sin\theta) = -Kz(t) - b(\dot{z} + L \dot{\theta} \cos\theta)$$

Equation (2) :

BAME

On isole (P) : bilan des efforts extérieurs



Force du fluide en G

Pivot en A d'axe (A, \vec{u})

Ressort de torsion d'axe (A, \vec{u}) et de raideur C

$$\overrightarrow{M_A} \cdot \vec{u} = \overrightarrow{N_{AE(P)}} \cdot \vec{u}$$

Calcul de $\overrightarrow{M_A} \cdot \vec{u}$:

$$\overrightarrow{M_A} \cdot \vec{u} = 0 - C\theta + (\overrightarrow{AG} \wedge -b \overrightarrow{V_G}) \cdot \vec{u} = -C\theta - b(\vec{u} \wedge L \vec{v}) \cdot \overrightarrow{V_G} = -C\theta - bL \vec{w} \cdot (\dot{z} \overrightarrow{z_0} - \Omega(R + L \cos\theta) \vec{u} + L \dot{\theta} \vec{w}),$$

$$\overrightarrow{M_A} \cdot \vec{u} = -C\theta - bL(\dot{z} \cos\theta + L \dot{\theta})$$

BQA : calcul de $\overrightarrow{N_{A\epsilon(P)}} \cdot \vec{u}$:

$A\epsilon(P)$ n'est pas fixe dans R_0 donc on passe par le cdm de (P) : G

$$\overrightarrow{N_{A\epsilon(P)}} \cdot \vec{u} = \left(\overrightarrow{N_{G\epsilon(P)}} + \overrightarrow{AG} \wedge m \overrightarrow{a_{G\epsilon P}} \right) \cdot \vec{u},$$

$$\overrightarrow{N_{G\epsilon(P)}} \cdot \vec{u} = \left. \frac{d\overrightarrow{L_{G\epsilon(P)}}}{dt} \right|_{R_0} \cdot \vec{u},$$

$$\overrightarrow{L_{G\epsilon(P)}} = [I_{(G,P)}] \cdot [\Omega_{P/0}] = \begin{pmatrix} I_P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_P \end{pmatrix}_{R_p} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \Omega \sin \theta \\ \Omega \cos \theta \end{pmatrix}_{R_p} = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \cdot I_P \\ 0 \\ \Omega \cos \theta \cdot I_P \end{pmatrix}_{R_p},$$

$\overrightarrow{N_{G\epsilon(P)}} \cdot \vec{u}$: pour effectuer ce calcul simplement, on dérive et on projette en même temps !

On remarque que $\left. \frac{d\vec{u}}{dt} \right|_{R_0} \cdot \vec{u} = 0$, et $\vec{w} \cdot \vec{u} = 0$

$$\text{D'où } \overrightarrow{N_{G\epsilon(P)}} \cdot \vec{u} = \ddot{\theta} \cdot I_P + \Omega \cos \theta \cdot I_P \left(\left. \frac{d\vec{w}}{dt} \right|_{R_0} \cdot \vec{u} \right) = \ddot{\theta} \cdot I_P + \Omega^2 \sin \theta \cos \theta \cdot I_P$$

$$\begin{aligned} \left(\overrightarrow{AG} \wedge m \overrightarrow{a_{G\epsilon P}} \right) \cdot \vec{u} &= (\vec{u} \wedge L \vec{v}) \cdot m \overrightarrow{a_{G\epsilon P}} \\ &= Lm \vec{w} \cdot (\ddot{z} \vec{z}_0 + 2\Omega \dot{\theta} L \sin \theta \vec{u} - \Omega^2 (R + L \cos \theta) \vec{r} + L \ddot{\theta} \vec{w} - L \dot{\theta}^2 \vec{v}) \\ \left(\overrightarrow{AG} \wedge m \overrightarrow{a_{G\epsilon P}} \right) \cdot \vec{u} &= Lm (\ddot{z} \cos \theta + \Omega^2 (R + L \cos \theta) \sin \theta + L \ddot{\theta}) \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \overrightarrow{N_{A\epsilon(P)}} \cdot \vec{u} = \ddot{\theta} \cdot I_P + \Omega^2 \sin \theta \cos \theta \cdot I_P + Lm (\ddot{z} \cos \theta + \Omega^2 (R + L \cos \theta) \sin \theta + L \ddot{\theta})$$

Equation (2) :

$$\ddot{\theta} \cdot I_P + \Omega^2 \sin \theta \cos \theta \cdot I_P + Lm (\ddot{z} \cos \theta + \Omega^2 (R + L \cos \theta) \sin \theta + L \ddot{\theta}) = -C\theta - bL (\ddot{z} \cos \theta + L \ddot{\theta})$$

Semaine 14

Révisions, questions, DS ou CC3