# 1 Géométrie des masses

## 1.1 Barycentre

Le barycentre $G$ d'un solide $(S)$ est défini par :

$$\boxed{\boxed{\overrightarrow{OG} = \frac{\iiint_{M\in S} \overrightarrow{OM}\mathrm{d}m}{\displaystyle\iiint_{M\in S} \mathrm{d}m}}}$$

Équation vectorielle qui donne par projection sur les axes du repère et en posant $m = \displaystyle\iiint_{M\in S} \mathrm{d}m$ :

$$\boxed{\boxed{x_G = \frac{\iiint_{M\in S} x\mathrm{d}m}{m}}} \qquad \boxed{\boxed{y_G = \frac{\iiint_{M\in S} y\mathrm{d}m}{m}}} \qquad \boxed{\boxed{z_G = \frac{\iiint_{M\in S} z\mathrm{d}m}{m}}}$$

Équation vectorielle qui donne par une première dérivation $\left(\dfrac{d^{(R)}}{dt}\ldots\right)$ :

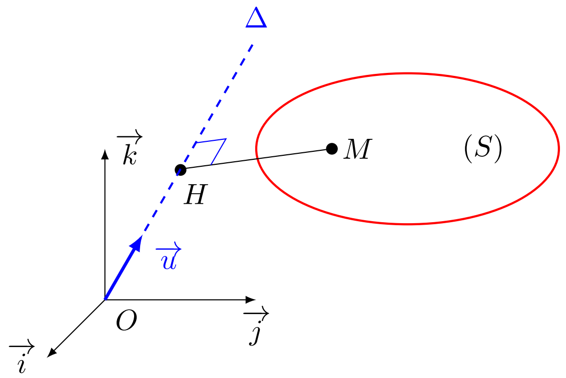
$$\boxed{\boxed{\overrightarrow{v_{(G)_{S/R}}} = \frac{\iiint_{M\in S} \overrightarrow{v_{(M)_{S/0}}}\mathrm{d}m}{m}}}$$

Équation vectorielle qui donne par une seconde dérivation $\left(\dfrac{d^{2(R)}}{dt^2}\ldots\right)$ :

$$\boxed{\boxed{\overrightarrow{a_{(G)_{S/R}}} = \frac{\iiint_{M\in S} \overrightarrow{a_{(M)_{S/0}}}\mathrm{d}m}{m}}}$$

**Remarque : Le barycentre n'est pas forcément confondu avec le centre de gravité !**

## 1.2 Moments d'inertie




Soit un solide $(S)$ de masse $m$ et $M$ le point courant de $(S)$. On note $(x,y,z)$ les coordonnées du point $M$ dans le repère $\mathcal{R}(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On définit :

1. Le moment d'inertie polaire au point $O$.
   $I_O = \iiint_{M\in S}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}m$
   $I_O = \iiint_{M\in S} r^2\mathrm{d}m$ , avec $r$ la distance du point $M$ au pôle $O$.
2. Le moment d'inertie par rapport à :
   (a) l'axe $(O,\vec{i})$ :
   $I_{(O,\vec{i})} = \iiint_{M\in S}(y^2+z^2)\mathrm{d}m.$
   $I_{(O,\vec{i})} = \iiint_{M\in S} r^2\mathrm{d}m = A$, avec $r$ la distance du point à l'axe $(O,\vec{i})$.
   (b) l'axe $(O,\vec{j})$ :
   $I_{(O,\vec{j})} = \iiint_{M\in S}(x^2+z^2)\mathrm{d}m = \iiint_S r^2\mathrm{d}m = B.$
   $I_{(O,\vec{j})} = \iiint_{M\in S} r^2\mathrm{d}m = B$, avec $r$ la distance du point à l'axe $(O,\vec{j})$.
   (c) l'axe $(O,\vec{j})$ :
   $I_{(O,\vec{k})} = \iiint_{M\in S}(x^2+y^2)\mathrm{d}m.$
   $I_{(O,\vec{k})} = \iiint_{M\in S} r^2\mathrm{d}m = C$, avec $r$ la distance du point à l'axe $(O,\vec{k})$.
3. Le moment d'inertie par rapport à :
   (a) plan $(O,\vec{i},\vec{j})$ :
   $I_{(O,\vec{i},\vec{j})} = \iiint_{M\in S}(z^2)\mathrm{d}m.$
   $I_{(O,\vec{i},\vec{j})} = \iiint_{M\in S} r^2\mathrm{d}m = C'$, avec $r$ la distance du point au plan $(O,\vec{i},\vec{j})$.
   (b) plan $(O,\vec{j},\vec{k})$ :
   $I_{(O,\vec{j},\vec{k})} = \iiint_{M\in S}(x^2)\mathrm{d}m.$
   $I_{(O,\vec{j},\vec{k})} = \iiint_{M\in S} r^2\mathrm{d}m = A'$, avec $r$ la distance du point au plan $(O,\vec{j},\vec{k})$.
   (c) plan $(O,\vec{k},\vec{i})$ :

$I_{(O,\overrightarrow{k},\overrightarrow{i})} = \iiint_{M\in S}(y^2)\mathrm{d}m.$

$I_{(O,\overrightarrow{k},\overrightarrow{i})} = \iiint_{M\in S} r^2\mathrm{d}m = B'$, avec $r$ la distance du point au plan $(O,\overrightarrow{k},\overrightarrow{i})$.

4. Ces moments vérifient les relations suivantes :
   - $A + A' = B + B' = C + C' = I_O$
   - $A' + B' + C' = I_O$
   - $A + B + C = 2I_O$
   - $A = B' + C'$
   - $B = A' + C'$
   - $C = A' + B'$

**Tous ces moments d'inertie sont de la forme** $\iiint_{M\in S} r^2\mathrm{d}m$ **et s'expriment en** $\mathrm{kg.m}^2$ **et sont** $\geq 0$**. Seuls les moments d'inertie autour d'axes ont une réalité physique.**

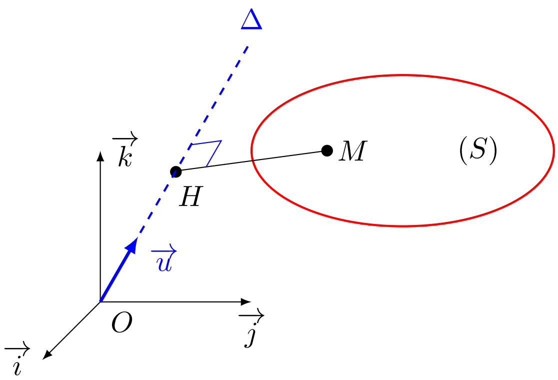
## 1.3 Produits d'inertie

On définit les produits d'inertie :

- $D = \iiint_{M\in S}(yz)\mathrm{d}m$
- $E = \iiint_{M\in S}(xz)\mathrm{d}m$
- $F = \iiint_{M\in S}(yx)\mathrm{d}m$

**Tous ces produits d'inertie s'expriment en** $\mathrm{kg.m}^2$ **et peuvent être positifs, nuls ou négatifs.**

### 1.4 Moment d'inertie par rapport à un axe quelconque




Soit un solide $(S)$ de masse $m$ et $M$ le point courant de $(S)$. On note $(x,y,z)$ les coordonnées du point $M$ dans le repère $\mathcal{R}(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
Soit $\vec{u} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k}$ un vecteur unitaire de la droite $\Delta$.
L'inertie de $S$ autour de l'axe $(O,\vec{u})$
$I_{S/(O,\vec{u})} = \iiint_{M\in S} \|\overrightarrow{MH}\|^2 \mathrm{d}m$

$$I_{S/(O,\vec{u})} = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 - 2D\gamma\beta - 2E\alpha\gamma - 2F\alpha\beta$$

$$I_{S/(O,\vec{u})} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \end{bmatrix}_{\mathcal{R}} \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{\mathcal{R}} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}_{\mathcal{R}}$$

$$\boxed{I_{S/(O,\vec{u})} = [\vec{u}]^t_{\mathcal{R}}\,[I_O(S)]_{\mathcal{R}}\,[\vec{u}]_{\mathcal{R}}}$$

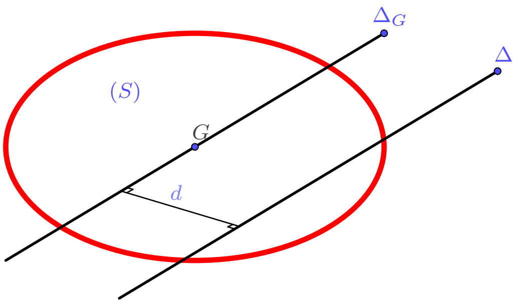
Avec $\left[I_{O(S)}\right]_{\mathcal{R}}$ la matrice d'inertie du solide $S$ calculée au point $O$ dans le repère $\mathcal{R}$

$$\boxed{\left[I_{O(S)}\right]_{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{\mathcal{R}}}$$

$$\boxed{\left[I_{O(S)}\right]_{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} \iiint_{M\in S}(y^2+z^2)\mathrm{d}m & -\iiint_{M\in S}(yx)\mathrm{d}m & -\iiint_{M\in S}(xz)\mathrm{d}m \\ -\iiint_{M\in S}(yx)\mathrm{d}m & \iiint_{M\in S}(x^2+z^2)\mathrm{d}m & -\iiint_{M\in S}(yz)\mathrm{d}m \\ -\iiint_{M\in S}(xz)\mathrm{d}m & -\iiint_{M\in S}(yz)\mathrm{d}m & \iiint_{M\in S}(x^2+y^2)\mathrm{d}m \end{bmatrix}_{\mathcal{R}}}$$

## 1.5 Théorèmes de Huygens

### 1.5.1 Théorème de Huygens pour les moments d'inertie



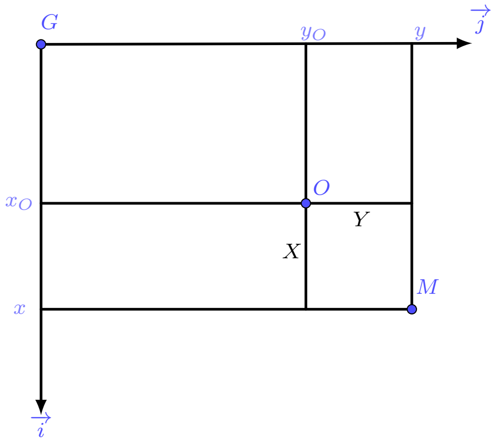

Soit un solide $S$ de masse $m$ et deux droites parallèles $\Delta$ et $\Delta_G$ ($\Delta_G$ passant par $G$) distantes de $d$.
La relation liant $I_\Delta$ et $I_{\Delta_G}$ est :

$$\boxed{I_\Delta = I_{\Delta_G} + md^2}$$

Remarque : Pour une direction donnée $\overrightarrow{u}$, le moment d'inertie est minimal autour de la droite passant par le barycentre $G$

$$\boxed{\left.\begin{array}{c}\forall O\\ \forall \overrightarrow{u}\end{array}\right\} I_{S/(O,\overrightarrow{u})} \geq I_{S/(G,\overrightarrow{u})}}$$

### 1.5.2 Théorème de Huygens pour les produits d'inertie




$$F_O = \iiint_{M\in S} (XY)\mathrm{d}m$$
$$F_O = \iiint_{M\in S} (x-x_O)(y-y_O)\mathrm{d}m$$
$$F_O = \iiint_{M\in S} ((xy)-(xy_O)-(x_Oy)+(x_Oy_O))\mathrm{d}m$$

$$F_O = \iiint_{M\in S} xy\mathrm{d}m - y_O\iiint_{M\in S} x\mathrm{d}m - x_O\iiint_{M\in S} y\mathrm{d}m + x_Oy_O\iiint_{M\in S} \mathrm{d}m$$

$$\boxed{F_O = F_G + mx_Oy_O}$$

### 1.5.3 Théorème de Huygens pour la matrice d'inertie

Soit $(S)$ un solide de masse $m$ et de barycentre $G$.

Soit $O$ un point quelconque avec $\overrightarrow{GO} = \begin{bmatrix} x_O \\ y_O \\ z_O \end{bmatrix}_{\mathcal{R}}$

$$\boxed{\left[I_{O(S)}\right]_{\mathcal{R}} = \left[I_{G(S)}\right]_{\mathcal{R}} + m\begin{bmatrix} y_O^2+z_O^2 & -x_Oy_O & -x_Oz_O \\ -x_Oy_O & x_O^2+z_O^2 & -y_Oz_O \\ -x_Oz_O & -y_Oz_O & x_O^2+y_O^2 \end{bmatrix}_{\mathcal{R}}}$$

# 2 Principe fondamental pour un solide indéformable $(S)$

## 2.1 Définitions

— La quantité de mouvement d'un solide indéformable $(S)$ dans son mouvement par rapport à $R$ (unité : $kg.m.s^{-1}$) :

$$\boxed{\overrightarrow{p_{(S/R)}} = \iiint_{M\in S} \overrightarrow{v_{(M)_{S/R}}}\mathrm{d}m = m\overrightarrow{v_{(G)_{S/R}}}}$$

— La quantité d'accélération d'un solide indéformable $(S)$ dans son mouvement par rapport à $R$ (unité : $kg.m.s^{-2}$) :

$$\boxed{\overrightarrow{D_{(S/R)}} = \iiint_{M\in S} \overrightarrow{a_{(M)_{S/R}}}\mathrm{d}m = m\overrightarrow{a_{(G)_{S/R}}}}$$

— Le moment cinétique en C d'un solide indéformable $(S)$ dans son mouvement par rapport à $R$ (unité : $kg.m^2.s^{-1}$) :

$$\boxed{\overrightarrow{L_{C_{(S/R)}}} = \iiint_{M\in S} \overrightarrow{CM} \wedge \overrightarrow{v_{(M)_{S/R}}}\mathrm{d}m}$$

— Le moment dynamique en C d'un solide indéformable $(S)$ dans son mouvement par rapport à un $R$ (unité : $kg.m^2.s^{-2}$) :

$$\boxed{\overrightarrow{N_{C_{(S/R)}}} = \iiint_{M\in S} \overrightarrow{CM} \wedge m\overrightarrow{a_{(M)_{S/R}}}\mathrm{d}m}$$

## 2.2 Torseur cinétique

On appelle torseur cinétique d'un solide indéformable $(S)$ dans son mouvement par rapport à un repère $R$ le torseur suivant :

$$\left\{\mathcal{L}_{(S/R)}\right\} = \left\{ \begin{array}{ccc} \overrightarrow{p_{(S/R)}} & | & \overrightarrow{L_{C_{(S/R)}}} \end{array} \right\}_C$$

on vérifie bien que :

— la résultante du torseur, $\overrightarrow{p_{(S/R)}}$, est indépendante du point de réduction $C$,

— le moment du torseur calculé au point $C$, $\overrightarrow{L_{C_{(S/R)}}}$, évolue selon la relation : $\overrightarrow{L_{B_{(S/R)}}} = \overrightarrow{L_{A_{(S/R)}}} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{p_{(S/R)}}$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{L_{B_{(S/R)}}} &= \iiint_{M\in S} \overrightarrow{BM} \wedge \overrightarrow{v_{(M)_{S/R}}}\mathrm{d}m \\
&= \iiint_{M\in S} (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}) \wedge \overrightarrow{v_{(M)_{S/R}}}\mathrm{d}m \\
&= \overrightarrow{BA} \wedge \iiint_{M\in S} m\overrightarrow{v_{(M)_{S/R}}}\mathrm{d}m + \iiint_{M\in S} \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{v_{(M)_{S/R}}}\mathrm{d}m \\
&= \overrightarrow{L_{A_{(S/R)}}} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{p_{(S/R)}}
\end{aligned}$$

## 2.3 Torseur dynamique

On appelle torseur dynamique de l'ensemble de points matériels $(S)$ dans son mouvement par rapport à un repère $R$ le torseur suivant :

$$\{\mathcal{N}_{(S/R)}\} = \left\{ \begin{array}{c|c} \overrightarrow{D_{(S/R)}} & \overrightarrow{N_{C_{(S/R)}}} \end{array} \right\}_C$$

on vérifie bien que :

— la résultante du torseur, $\overrightarrow{D_{(S/R)}}$, est indépendante du point d'évaluation $C$,

— le moment du torseur calculé au point $C$, $\overrightarrow{N_{C_{(S/R)}}}$, évolue selon la relation : $\overrightarrow{N_{B_{(S/R)}}} = \overrightarrow{N_{A_{(S/R)}}} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{D_{(S/R)}}$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{N_{B_{(1/R)}}} &= \iiint_{M\in S} \overrightarrow{BM} \wedge \overrightarrow{a_{(M)_{S/R}}} \mathrm{d}m \\
&= \iiint_{M\in S} (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}) \wedge \overrightarrow{a_{(M)_{S/R}}} \mathrm{d}m \\
& \overrightarrow{BA} \wedge \iiint_{M\in S} \overrightarrow{a_{(M)_{S/R}}} \mathrm{d}m + \iiint_{M\in S} \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{a_{(M)_{S/R}}} \mathrm{d}m \\
&= \overrightarrow{N_{A_{(S/R)}}} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{D_{(S/R)}}
\end{aligned}$$

## 2.4 Relations entre $\left\{\mathcal{N}_{(S/R)}\right\}$ et $\left\{\mathcal{L}_{(S/R)}\right\}$

— Relation entre les résultantes

$$\begin{aligned}
\frac{d^{(R)}}{dt}(\overrightarrow{p_{(S/R)}}) &= \frac{d^{(R)}}{dt}(m\overrightarrow{v_{(G)_{S/R}}}) \\
&= m\frac{d^{(R)}}{dt}(\overrightarrow{v_{(G)_{S/R}}}) \\
&= m\overrightarrow{a_{(M)_{S/R}}} \\
&= \overrightarrow{D_{(S/R)}}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\boxed{\overrightarrow{D_{(S/R)}} = \frac{d^{(R)}}{dt}(\overrightarrow{p_{(S/R)}})}}$$

— Relation entre les moments

$$\begin{aligned}
\frac{d^{(R)}}{dt}(\overrightarrow{L_{C_{(S/R)}}}) &= \frac{d^{(R)}}{dt}(\iiint_{M\in S}\overrightarrow{CM}\wedge\overrightarrow{v_{(M)_{S/R}}})\mathrm{d}m \\
&= \iiint_{M\in S}(\frac{d^{(R)}}{dt}(\overrightarrow{CM}\wedge m\overrightarrow{v_{(M)_{S/R}}}))\mathrm{d}m \\
&= \iiint_{M\in S}(\frac{d^{(R)}}{dt}(\overrightarrow{CM})\wedge\overrightarrow{v_{(M)_{S/R}}}\mathrm{d}m) + \iiint_{M\in S}(\overrightarrow{CM}\wedge\frac{d^{(R)}}{dt}(\overrightarrow{v_{(M)_{S/R}}})\mathrm{d}m) \\
&= \iiint_{M\in S}(\frac{d^{(R)}}{dt}(\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OM})\wedge\overrightarrow{v_{(M)_{S/R}}}\mathrm{d}m) + \iiint_{M\in S}\overrightarrow{CM}\wedge\overrightarrow{a_{(M)_{S/R}}}\mathrm{d}m \\
&= \iiint_{M\in S}((\frac{d^{(R)}}{dt}(\overrightarrow{OM}) - \frac{d^{(R)}}{dt}(\overrightarrow{OC}))\wedge\overrightarrow{v_{(M)_{S/R}}}\mathrm{d}m) + \overrightarrow{N_{C_{(S/R)}}} \\
&= \iiint_{M\in S}((\overrightarrow{v_{(M)_{S/R}}} - \overrightarrow{v_{(C)_{/R}}})\wedge\overrightarrow{v_{(M)_{S/R}}}\mathrm{d}m) + \overrightarrow{N_{C_{(S/R)}}} \\
&= \iiint_{M\in S}(\overrightarrow{v_{(M)_{S/R}}}\wedge\overrightarrow{v_{(M)_{S/R}}}\mathrm{d}m) - \iiint_{M\in S}(\overrightarrow{v_{(C)_{/R}}})\wedge\overrightarrow{v_{(M)_{S/R}}}\mathrm{d}m) + \overrightarrow{N_{C_{(S/R)}}} \\
&= -\overrightarrow{v_{(C)_{/R}}}\wedge\overrightarrow{p_{(S/R)}} + \overrightarrow{N_{C_{(S/R)}}}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\boxed{\overrightarrow{N_{C_{(S/R)}}} = \frac{d^{(R)}}{dt}(\overrightarrow{L_{C_{(S/R)}}}) + \overrightarrow{v_{(C)_{/R}}}\wedge\overrightarrow{p_{(S/R)}}}}$$

— Cas particuliers :

Trois cas particuliers apparaissent souvent dans les calculs :

— le point $C$ est fixe dans $R$,

— $\overrightarrow{v_{(C)/R}}$ et $\overrightarrow{v_{(G)_{S/R}}}$ sont colinéaires,

— A et G sont confondus.

Dans ces cas la relation devient :

$$\boxed{\boxed{\overrightarrow{N_{C_{(S/R)}}} = \frac{d^{(R)}}{dt}(\overrightarrow{L_{C_{(S/R)}}})}}$$

### 2.5 Calcul pratique du moment cinétique d'un solide indéformable

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{L_{C_{(S/R)}}} &= \iiint_{M\in S} \overrightarrow{CM} \wedge \overrightarrow{v_{(M)_{S/R}}} \mathrm{d}m \\
&= \iiint_{M\in S} \overrightarrow{CM} \wedge (\overrightarrow{v_{(O_S)_{S/R}}} + \overrightarrow{\Omega_{S/0}} \wedge \overrightarrow{O_S M}) \mathrm{d}m \\
&= m\overrightarrow{CG} \wedge \overrightarrow{v_{(O_S)_{S/R}}} + \iiint_{M\in S} \overrightarrow{CM} \wedge (\overrightarrow{\Omega_{S/0}} \wedge \overrightarrow{O_S M}) \mathrm{d}m \\
&= m\overrightarrow{CG} \wedge \overrightarrow{v_{(O_S)_{S/R}}} + m\overrightarrow{CO_S} \wedge (\overrightarrow{\Omega_{S/0}} \wedge \overrightarrow{O_S G}) + \iiint_{M\in S} \overrightarrow{O_S M} \wedge (\overrightarrow{\Omega_{S/0}} \wedge \overrightarrow{O_S M}) \mathrm{d}m \\
&= m\overrightarrow{CG} \wedge \overrightarrow{v_{(O_S)_{S/R}}} + m\overrightarrow{CO_S} \wedge (\overrightarrow{\Omega_{S/0}} \wedge \overrightarrow{O_S G}) + \left[I_{O(S)}\right]_{\mathcal{R}} \overrightarrow{\Omega_{S/0}}
\end{aligned}$$

### 2.6 Enoncé

— il existe une chronologie, façon de mesurer le temps,

— il existe un repère « fixe », « absolu », galiléen $R_0$

tels que pour tout ensemble $S$ de points matériels :

$$\boxed{\boxed{\left\{\mathcal{N}_{(S/R_0)}\right\} = \left\{\mathcal{T}_{(ext/S)}\right\}}}$$

Nota bene :*On nomme principe physique une loi physique apparente qu'aucune expérience n'a invalidée jusque-là bien qu'elle n'ait pas été démontrée, et joue un rôle voisin de celui d'un postulat en mathématiques.*