Livre 2

Semaine 5

Principe fondamental de la dynamique PFD

appliqué au point et aux systèmes de points matériels

1 : Rappel sur les frottements de Coulomb

2 : méthodologie pour traiter un problème de dynamique du point

-mise en place d'un repère par sous ensemble cinématique

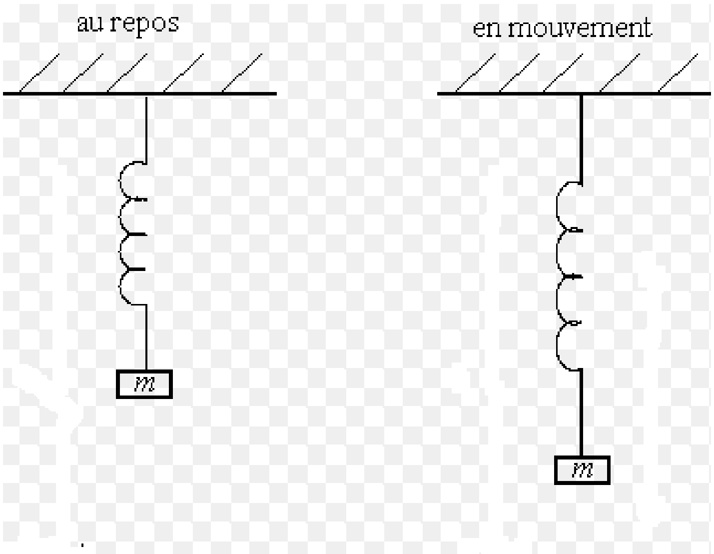
-mise en place du paramétrage (permet de passer d'un repère à l'autre soit par un rotation, soit par une translation)

-isolement du système étudié : on ne redessine QUE le système isolé, on répertorie les efforts extérieurs au système (efforts de contact et efforts à distance), c'est le bilan des actions mécaniques extérieures (**BAME**). On obtient $\overrightarrow{F_{ext/S}}\ et\ \overrightarrow{M_{C(F_{ext/S})}}$.

-Bilan des quantités d'accélération (**BQA**) : on calcule la résultante dynamaique et/ou le moment dynamique. On obtient $m.\overrightarrow{a_{(G)S/R_0}}\ et\ \overrightarrow{N_{C(S/R_0)}}$.

-application du PFD : Torseur des efforts extérieurs = torseur dynamique (mouvement par rapport à un repère fixe R_0). On obtient deux équations vectorielles : l'équation de la résultante ($\overrightarrow{F_{ext/S}} = m.\overrightarrow{a_{(G)S/R_0}}$) pour trouver la loi temporelle d'efforts et/ou de paramètres de translation, et l'équation de moment ($\overrightarrow{M_{C(F_{ext/S})}} = \overrightarrow{N_{C(S/R_0)}}$) pour trouver la loi temporelle de moments et/ou de paramètres de rotation.

Application : étude d'un oscillateur : mouvement de m au cours du temps



vidéo montrant la résolution : https://www.youtube.com/watch?v=QYT1A0jP7vc

PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA DYNAMIQUE

1. Plan incliné avec ou sans frottement

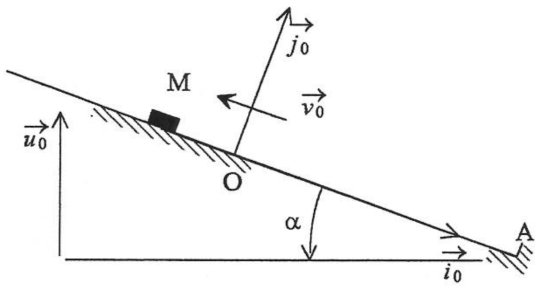
Un palet modélisé par un point matériel (M, m) glisse sur un plan incliné d'un angle α par rapport à la direction horizontale.

Le mouvement s'effectue sur l'axe $(O, \overrightarrow{i_0})$ et, pour $t_0 = 0$, les conditions initiales sont les suivantes :

$$\overrightarrow{OM}(t_0) = \overrightarrow{OM_0} = \overrightarrow{0}$$
$$\overrightarrow{v(M)}(t_0) = \overrightarrow{v_0} = v_0\,\overrightarrow{t_0}$$

$\overrightarrow{t_0}$ étant la direction suivant laquelle est lancé ce « palet ». Suivant les cas, nous aurons :

$$\overrightarrow{t_0} = \overrightarrow{i_0} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{t_0} = -\overrightarrow{i_0}$$



1) Montrer que, s'il y a glissement, le mouvement observé est uniformément varié et que, lorsque le facteur de frottement f est non nul, la valeur de l'accélération dépend du sens du déplacement. Se placer dans les cas suivants :

1.1) glissement avec frottement, vers le bas,
1.2) glissement avec frottement, vers le haut,
1.3) glissement sans frottement.

2) Considérons le glissement avec frottement sur un plan faiblement incliné : $\alpha < \varphi$. Déterminer la durée Δt du mouvement ainsi que la distance parcourue.
Se placer dans les cas suivants :

2.1) $\overrightarrow{t_0} = \overrightarrow{i_0}$
2.2) $\overrightarrow{t_0} = -\overrightarrow{i_0}$

3) Considérons le glissement avec frottement sur un plan fortement incliné : $\alpha > \varphi$. Le plan est illimité vers le haut et possède un obstacle A, situé dans sa partie inférieure, contre lequel le point M terminera sa course.
Déterminer la durée du mouvement ainsi que la distance parcourue, en distinguant les deux cas suivants :

3.1) $\overrightarrow{t_0} = \overrightarrow{i_0}$
3.2) $\overrightarrow{t_0} = -\overrightarrow{i_0}$

Préciser, dans le second cas, la vitesse du point M lorsque celui-ci passe à nouveau au point O.

---

2. Mouvement de libération d'une particule

Une particule matérielle (M, m) se déplace sur un axe fixe $(O, \overrightarrow{i_0})$ sous l'action d'une force : $\overrightarrow{F} = m a e^{-kt}\,\overrightarrow{i_0}$, a et k sont des constantes positives.
Etudier le mouvement de la particule. Tracer les lois du mouvement $\ddot{x}(t)$, $\dot{x}(t)$ et $x(t)$ pour les conditions initiales suivantes :

1) $\dot{x}(t_0 = 0) = 0$ et $x(t_0) = 0$
2) $\dot{x}(t_0) = 1$ m/s et $x(t_0) = 0$
3) $\dot{x}(t_0) = -1$ m/s et $x(t_0) = 0$

Dans les trois cas, l'effet de la force appliquée, au sens du principe fondamental de la dynamique, est-il le même ?

---

3. Force de frottement proportionnelle à v^n

Une particule matérielle (M, m) parcourt l'axe fixe $(O, \overrightarrow{i_0})$. Son abscisse est notée $x(t)$. A l'instant initial $t_0 = 0$, elle est en O et sa vitesse vaut $\overrightarrow{v_0} = v_0\,\overrightarrow{i_0}$. Elle est alors soumise à l'action d'une force unique

$$\overrightarrow{F} = -m k_n v^n\,\overrightarrow{i_0}$$

où $v = \dot{x}(t)$ représente la vitesse et k_n un coefficient constant positif.

PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA DYNAMIQUE

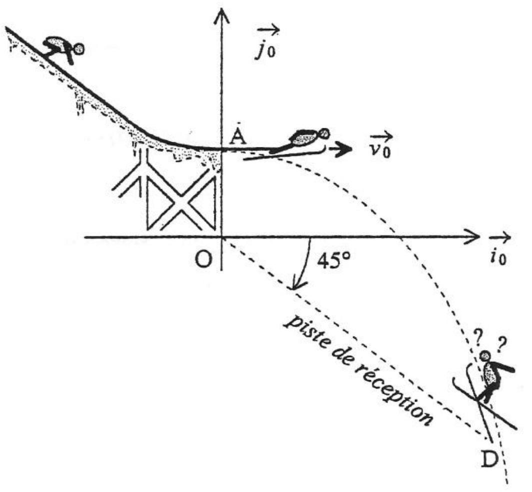
Déterminer la loi des espaces de la particule pour $n = 1$.
Déterminer la loi des espaces de la particule pour $n = 2$.
Déterminer la loi des espaces de la particule pour n entier positif > 2.

---

4. Saut à skis

La vitesse $\overrightarrow{v_0}$ du skieur noté M au moment où il quitte le tremplin peut être considérée comme horizontale et atteint une valeur d'environ 25 m/s, soit 90 km/h. Déterminer la longueur OD du saut, moyennant les modélisations suivantes :
La résistance de l'air est négligée. La seule force qui s'exerce sur le skieur durant le saut est alors son propre poids.
La résistance de l'air est proportionnelle à la vitesse. Pour un skieur donné (masse m), cette condition peut s'écrire :

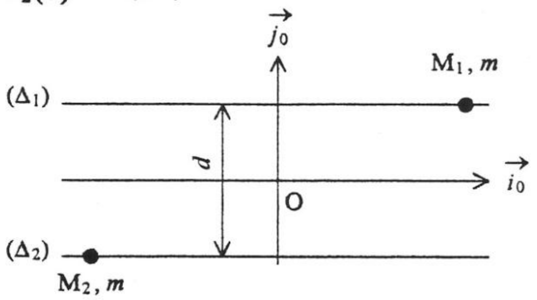
$$\overrightarrow{F_{\text{air/M}}} = -km\,\vec{v}$$



Notations : $\overrightarrow{v_0} = v_0\,\vec{i_0}$ en A, $\overrightarrow{OA} = h\,\vec{j_0}$.
Valeurs numériques :
$v_0 = 25$ m/s, $h = 8$ m, $k = 0{,}4$ SI.

5.1 *Résultantes et moments, cinétiques et dynamiques, mouvement de translation*

Deux points matériels M_1 et M_2, de masse m, se déplacent sur deux droites parallèles (Δ_1) et (Δ_2) distantes de d. λ étant une constante réelle exprimée en m/s^3, les lois horaires respectives sont $x_1(t) = \lambda t^3$ et $x_2(t) = -\lambda t^3$.



☐ **1** - Déterminer les caractéristiques cinétiques et dynamiques du système matériel $(\Sigma) = \{M_1, M_2\}$.

☐ **2** - Vérifier que, dans ce cas particulier, le moment cinétique et le moment dynamique se conservent.

5.2 *Résultantes et moments, cinétiques et dynamiques, mouvement de rotation*

Un point matériel (M, m) est animé d'un mouvement de rotation autour d'un point fixe O.

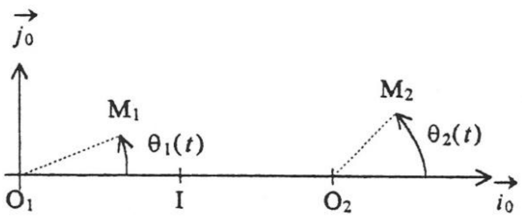
☐ **1** - Exprimer la résultante cinétique et la résultante dynamique en fonction de la masse m, du rayon r de sa trajectoire circulaire, du paramètre du mouvement θ et de ses dérivées.

☐ **2** - Exprimer de la même façon le moment cinétique et le moment dynamique au point O.

5.3 *Système de deux points matériels en rotation,*

Deux points matériels (M_1, m) et (M_2, m) sont animés d'un mouvement de rotation uniforme autour des points fixes O_1 et O_2.

Nous poserons $O_1M_1 = O_2M_2 = r$ et nous noterons I le milieu de O_1O_2. La distance O_1O_2 a pour valeur $3r$.



Nous traiterons les trois cas suivants :

☐ **1** - Les mouvements des points sont identiques : $\theta_1(t) = \theta_2(t) = \theta(t)$.

☐ **2** - Les mouvements sont symétriques par rapport à l'axe $(I, \vec{j_0})$: $\theta_1(t) = \pi - \theta_2(t)$.

☐ **3** - Les mouvements des points sont symétriques par rapport à I :

$$\theta_1(t) = \theta_2(t) - \pi$$

Calculer, dans chaque cas, pour le système matériel $(\Sigma) = \{M_1, M_2\}$:

— la résultante cinétique,

— la résultante dynamique,

— le moment cinétique au point I

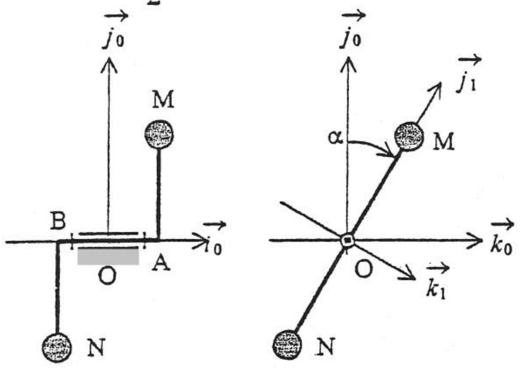
— le moment dynamique au point I

EXO 6 : *Un rotor trés déséquilibré*

Emparons-nous d'un vélo, otons la chaîne, soulevons le cadre et faisons tourner rapidement le pédalier. Nous ressentons des vibrations que nous allons décrire.

La schématisation retenue est la suivante. Le pédalier est un rotor assimilé à un ensemble de deux masses identiques quasi ponctuelles notées M et N. Le paramètre du mouvement est l'angle $\alpha(t)$. Nous posons :

$\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OB} = \frac{l}{2}\vec{i_0}$ $\qquad \overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{BN} = R\vec{j_1}$



☐ **1** - Exprimer les vitesses et les accélérations des points M et N. En déduire les expressions de la résultante cinétique, de la résultante dynamique, du moment cinétique ainsi que du moment dynamique en O.

☐ **2** - Ecrire les équations du principe fondamental de la dynamique. Compte tenu de l'équation de moment en O projetée sur la direction $\vec{i_0}$, simplifier les équations de moment en projection sur les deux autres directions de R_0. Conclure.

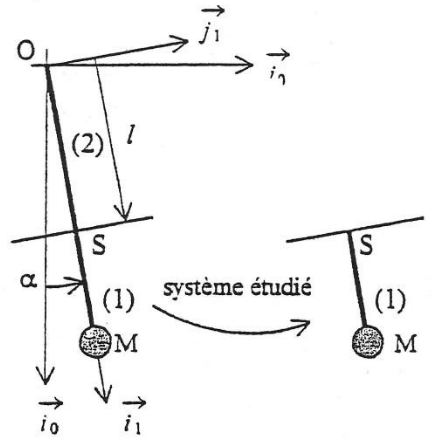
EXO 7 : *Oscillations forcés d'un pendule*

Un pendule est constitué d'une tige rigide de masse négligeable, de longueur L articulée en O par rapport à un référentiel R_0 fixe (galiléen) à l'extrémité de laquelle se situe une masse ponctuelle (M, m). La liaison articulation est sans frottement. Un moteur exerce sur la tige un couple $\overrightarrow{C_m} = C_m\vec{k_0}$ de façon à ce que l'ensemble admette la loi de mouvement $\alpha(t) = \alpha_0 \cos(\omega t)$ avec α_0 petit.

Nous posons $\overrightarrow{OM} = L\vec{i_1}$. Nous allons calculer les efforts de cohésion à l'intérieur de la tige. Pour cela, nous imaginons une coupure de cette tige en une section (S) située à la distance l du point O et notons (1) la partie SM et (2) la partie OM.

☐ **1** - Exprimer la vitesse et l'accélération du point M. En déduire les expressions du torseur cinétique et du torseur dynamique en S.

☐ **2** - Ecrire les équations du principe fondamental de la dynamique appliqué à l'ensemble $(1+M)$.



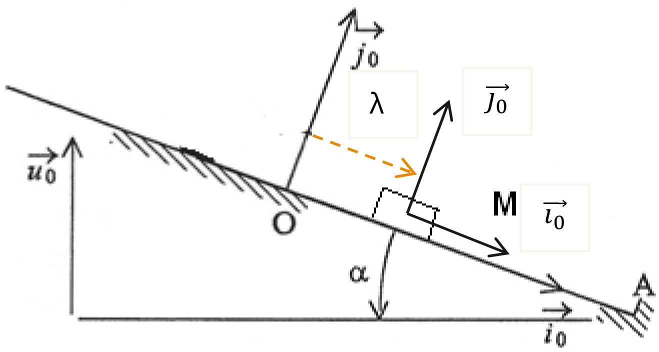
☐ **3** - Discuter de l'évolution du torseur caractéristique de la liaison encastrement 2/1 en fonction de la pulsation et de la position de la section (S).

☐ **4** - Donner l'expression du moment C_m et des actions de la liaison articulation 0/1.

Solution :

Exo 1 :

Mise en place des repères et du paramétrage :



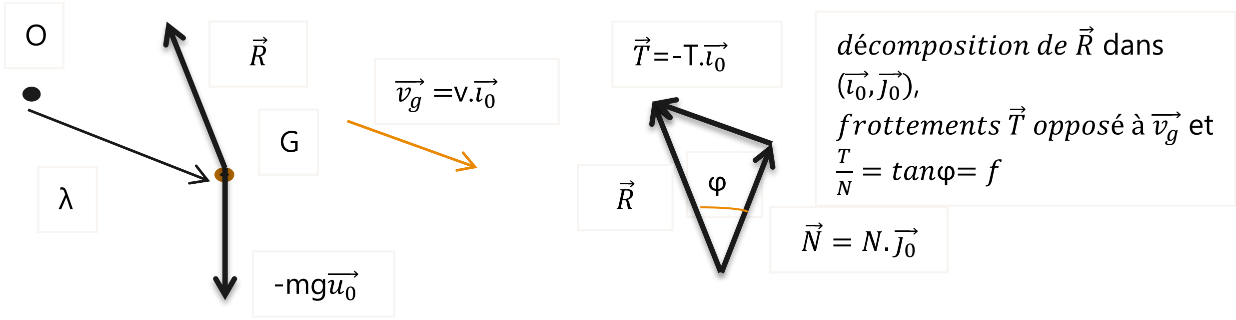
Repères : $R_0(0,\vec{\imath_0},\vec{\jmath_0},\vec{k_0}), R_1(M,\vec{\imath_0},\vec{\jmath_0},\vec{k_0})$

Paramètre de position pour passer de R_0 à R_1 : $\lambda(t)$ avec $\overrightarrow{OM} = \lambda.\vec{\imath_0}$

1-1 : repères et paramètres étant en place, on peut appliquer le PFD.

On isole le palais (on ne dessine **QUE** le palais. Le solide est considéré comme ponctuel donc M=G

BAME



Remarque : la droite d'action de $\vec{R}$ passe par G car le palais ne bascule pas : $\sum \overrightarrow{M_G} = \vec{0}$

BQA :

$\overrightarrow{OG} = \lambda\vec{\imath_0}$, $\overrightarrow{v_G} = \dot{\lambda}\vec{\imath_0}$, $\overrightarrow{a_G} = \ddot{\lambda}\vec{\imath_0}$

PFD : équation de la résultante

$\vec{R}$-mg$\vec{u_0}$=m. $\overrightarrow{a_G}$

En projection sur $\vec{\imath_0}$: -T+mg.sinα=m. $\ddot{\lambda}$

En projection sur $\vec{\jmath_0}$: N-mg.cosα=0

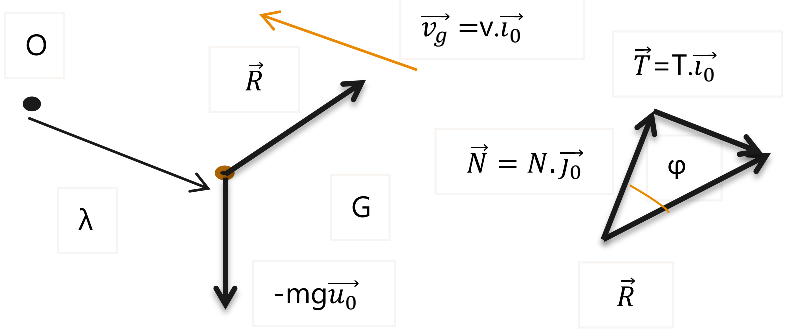
D'où :

N=mg.cosα donc T=f mg.cosα

m. $\ddot{\lambda}$=- f mg.cosα +mg.sinα donc $\ddot{\lambda}$=g(sinα- f cosα)=cte : le mouvement est uniformément varié

1-2 : repères et paramètres étant en place, on peut appliquer le PFD. On isole le palais (on ne dessine **QUE** le palais. Le solide est considéré comme ponctuel donc M=G

BAME



décomposition de $\vec{R}$ dans $(\vec{\imath_0},\vec{\jmath_0})$,
frottements $\vec{T}$ *opposé* à $\vec{v_g}$ et $\frac{T}{N} = tan\varphi = f$

Remarque : λ est algébrique, on le dessine positif (alors que le palais remonte) afin d'éviter toute erreur de signe lors des projections.

BQA :

$\overrightarrow{OG} = \lambda\vec{\imath_0}$, $\vec{v_G} = \dot{\lambda}\vec{\imath_0}$, $\vec{a_G} = \ddot{\lambda}\vec{\imath_0}$

PFD : équation de la résultante

$\vec{R}$-mg$\vec{u_0}$=m. $\vec{a_G}$

En projection sur $\vec{\imath_0}$: T+mg.sinα=m. $\ddot{\lambda}$

En projection sur $\vec{\jmath_0}$: N-mg.cosα=0

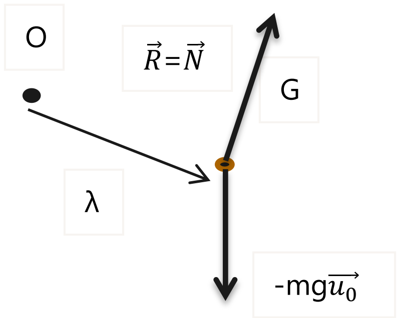
D'où :

N=mg.cosα donc T=f mg.cosα

m. $\ddot{\lambda}$= f mg.cosα +mg.sinα donc $\ddot{\lambda}$=g(sinα+ f cosα)=cte : le mouvement est uniformément varié et l'accélération dépend du sens du déplacement.

1-3 : repères et paramètres étant en place, on peut appliquer le PFD. On isole le palais (on ne dessine **QUE** le palais. Le solide est considéré comme ponctuel donc M=G

BAME



BQA :

$\overrightarrow{OG} = \lambda\vec{\imath_0}$, $\vec{v_G} = \dot{\lambda}\vec{\imath_0}$, $\vec{a_G} = \ddot{\lambda}\vec{\imath_0}$

PFD : équation de la résultante

$\vec{R}$-mg$\vec{u_0}$=m. $\vec{a_G}$

En projection sur $\vec{\imath_0}$: mg.sinα=m. $\ddot{\lambda}$

En projection sur $\vec{\jmath_0}$: N-mg.cosα=0

D'où :

N=mg.cosα

m. $\ddot{\lambda}$=mg.sinα donc $\ddot{\lambda}$=gsinα=cte : le mouvement est uniformément varié

2 : on reprend les résultats de la question 1

2-1 : $\ddot{\lambda}$=g(sinα- f cosα)

On intègre : $\dot{\lambda}(0)=v_0$

$\dot{\lambda}(t)$=g(sinα- f cosα).t+v_0

$\dot{\lambda}(\Delta t)$=g(sinα- f cosα). Δt +v_0=0 d'où : $\Delta t = \frac{-v_0}{\text{g(sinα− f cosα)}} > 0$ car $f = tan$φ> tanα

On intègre : $\lambda(0)$=0

$\lambda(t)=\frac{1}{2}$g(sinα- f cosα).t²+$v_0.t$

Distance parcourue : $\lambda(\Delta t)=\frac{1}{2}$g(sinα- f cosα). Δt^2+$v_0.\Delta t$

$\lambda(\Delta t)=\frac{1}{2}.\frac{{v_0}^2}{\text{g(sinα− f cosα)}}$ - $\frac{{v_0}^2}{\text{g(sinα− f cosα)}}$=$-\frac{1}{2}.\frac{{v_0}^2}{\text{g(sinα− f cosα)}}$ (> 0 car $f = tan$φ> tanα)

2-2 : $\ddot{\lambda}$=g(sinα+ f cosα)

On intègre : $\dot{\lambda}(0)=-v_0$

$\dot{\lambda}(t)$=g(sinα+ f cosα).t-v_0

$\dot{\lambda}(\Delta t)$=g(sinα+ f cosα). Δt -v_0=0 d'où : $\Delta t = \frac{v_0}{\text{g(sinα+f cosα)}} > 0$

On intègre : $\lambda(0)$=0

$\lambda(t)=\frac{1}{2}$g(sinα+ f cosα).t²-$v_0.t$

Distance parcourue : $\lambda(\Delta t)=\frac{1}{2}$g(sinα + f cosα). Δt^2-$v_0.\Delta t$

$\lambda(\Delta t)=\frac{1}{2}.\frac{{v_0}^2}{\text{g(sinα+ f cosα)}}$ - $\frac{{v_0}^2}{\text{g(sinα+f cosα)}}$=$-\frac{1}{2}.\frac{{v_0}^2}{\text{g(sinα+ f cosα)}} < 0$

3 : on reprend les résultats de la question 2.

3-1 : Soit t_2l'instant où M arrive en A. Distance OA connue.

$\lambda(t_2)=\frac{1}{2}$g(sinα- f cosα).t_2^2 +$v_0.t_2$=OA

Donc $\frac{1}{2}$g(sinα- f cosα).t_2^2 +$v_0.t_2$-OA=0, Δ=$v_0^2 + 4.OA.\frac{1}{2}$g(sinα- f cosα)

Donc $t_2 = \frac{-v_0+\sqrt{\Delta}}{\text{g(sinα− f cosα)}}$ seule racine positive.

3-2 : Soit t_3l'instant où M arrive en A, t_4l'instant où M repasse en O, t_5l'instant où M s'arrête.
Distance OA connue.

Pendant la phase montante : résultats 2-2

$\dot{\lambda}(t_5)$=g(sinα+ f cosα). t_5-v_0 d'où $t_5 = \frac{v_0}{\text{g(sinα+ f cosα)}}$

Distance parcourue : OB

$\lambda(t_5)=\frac{1}{2}$g(sinα+ f cosα).t_5^2 -$v_0.t_5$=-$\frac{v_0^2}{\text{2g(sinα+ f cosα)}}$ <0 : M remonte

Après t_5, M redescend donc résultat de 2-1

$\ddot{\lambda}$=g(sinα- f cosα)

On intègre : $\dot{\lambda}(t_5)$=0 donc

$\dot{\lambda}(t)$=g(sinα- f cosα).(t-t_5)

On intègre : $\lambda(t_5)$=-$\frac{v_0^2}{\text{g(sinα+ f cosα)}}$

Donc $\lambda(t)=\frac{1}{2}$g(sinα- f cosα).(t-t_5)²-$\frac{v_0^2}{\text{g(sinα+ f cosα)}}$

Détermination de t_4 : M repasse en O

Donc $\lambda(t_4)=\frac{1}{2}$g(sinα- f cosα).(t_4-t_5)²-$\frac{v_0^2}{\text{g(sinα+ f cosα)}}$=0

D'où $t_4 = \sqrt{\frac{2.v_0^2}{\text{g}^2(\sin^2\alpha - \text{f}^2\cos^2\alpha)}} + t_5$

Vitesse de M quand il repasse en O :

$\dot{\lambda}(t_4)$=g(sinα- f cosα).(t_4-t_5)= g(sinα- f cosα). $\sqrt{\frac{2.v_0^2}{\text{g}^2(\sin^2\alpha - \text{f}^2\cos^2\alpha)}}$

EXO 2 : on prendra pour les courbes a=2, k=4

PFD : $\vec{F}$=m. $\overrightarrow{a_M}$

$a.e^{-kt}.\overrightarrow{\iota_0} = \overrightarrow{a_M}$, on pose $\overrightarrow{OM} = x(t).\overrightarrow{\iota_0}$

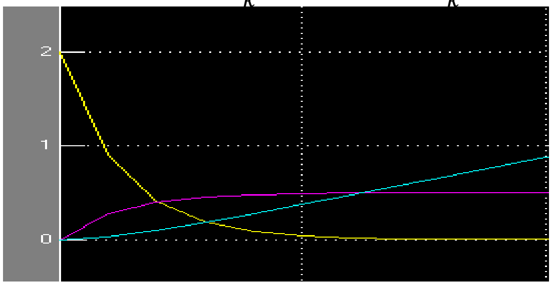
Donc $\overrightarrow{v_M} = \dot{x}.\overrightarrow{\iota_0}$ et $\overrightarrow{a_M} = \ddot{x}.\overrightarrow{\iota_0}$

On a : $\ddot{x} = a.e^{-kt}$

1 : $\dot{x}(0) = 0$ et $x(0) = 0$

On intègre : $\dot{x}(t) = \frac{-a}{k}.e^{-kt} + \frac{a}{k} = \frac{a}{k}(1 - e^{-kt})$

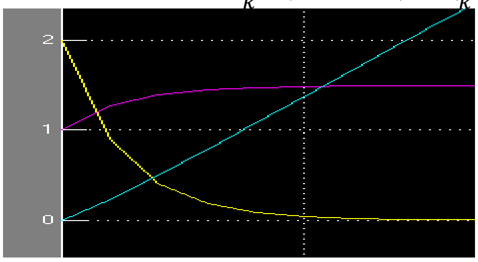
On intègre : $x(t) = \frac{a}{k^2}.(e^{-kt} - 1) + \frac{a}{k}.t, \lim_{t\to+\infty} = +\infty$



2 : $\dot{x}(0) = 1$ et $x(0) = 0$

On intègre : $\dot{x}(t) = \frac{-a}{k}.e^{-kt} + \frac{a}{k} + 1 = \frac{a}{k}(1 - e^{-kt}) + 1$

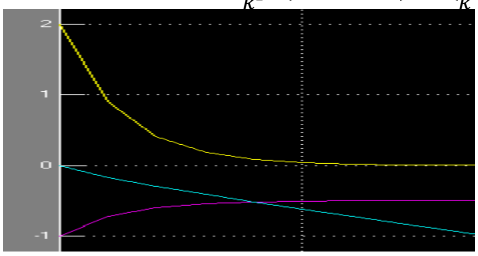
On intègre : $x(t) = \frac{a}{k^2}.(e^{-kt} - 1) + (\frac{a}{k} + 1).t, \lim_{t\to+\infty} = +\infty$



3 : $\dot{x}(0) = -1$ et $x(0) = 0$

On intègre : $\dot{x}(t) = \frac{-a}{k}.e^{-kt} + \frac{a}{k} - 1 = \frac{a}{k}(1 - e^{-kt}) - 1$

On intègre : $x(t) = \frac{a}{k^2}.(e^{-kt} - 1) + (\frac{a}{k} - 1).t, \lim_{t\to+\infty} = -\infty \; si \; \frac{a}{k} < 1, +\infty \; si \; \frac{a}{k} > 1, \frac{a}{k^2} \; si \; \frac{a}{k} = 1$



Conclusion : cas 1 et 2, la particule se libère. Cas 3, sens de libération fonction de $\frac{a}{k}$

EXO 3 :

PFD : $\vec{F}$=m. $\overrightarrow{a_M}$

$-k_n.\dot{x}^n.\overrightarrow{\iota_0} = \ddot{x}.\overrightarrow{\iota_0}$,

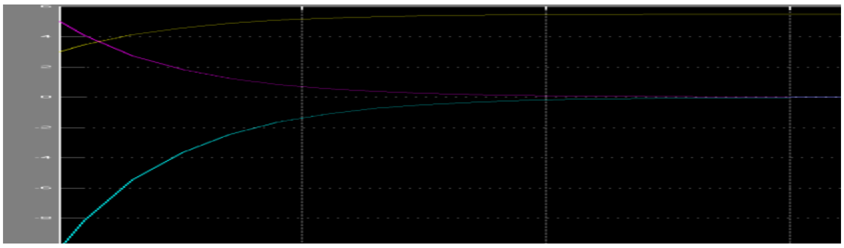
D'où l'équation de mouvement : $\ddot{x} + k_n.\dot{x}^n = 0$,

Pour n=1

$\ddot{x} + k_1.\dot{x} = 0, \frac{\ddot{x}}{\dot{x}} = -k_1, \ln\frac{\dot{x}}{A} = -k_1.t, \dot{x}(t) = v_0.e^{-k_1.t}, x(t) = x_0 + \frac{v_0}{k_1}(1 - e^{-k_1.t})$

Donc $x(t) \in [x_0; x_0 + \frac{v_0}{k_1}]$

Pour $x_0 = 3, v_0 = 5, k_2 = 2$



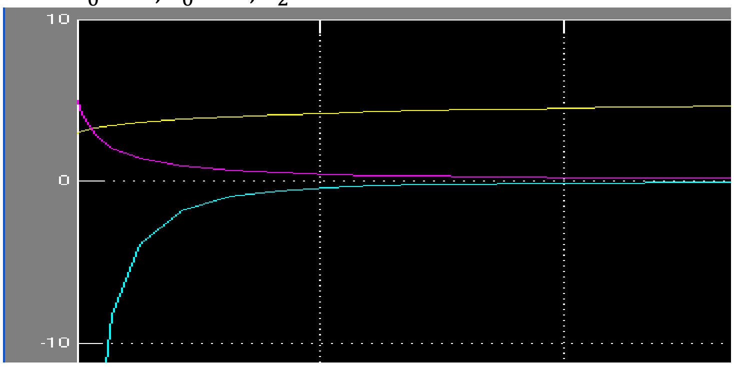
Pour n=2

$\ddot{x} + k_2.\dot{x}^2 = 0$, $\frac{\ddot{x}}{\dot{x}^2} = -k_2$, on pose y = $\dot{x}$, $\frac{\dot{y}}{y^2} = -k_2, on\ intègre : \frac{-1}{y} + \frac{1}{v_0} = -k_2.t$

D'où $\dot{x} = \frac{1}{\frac{1}{v_0}+k_2.t}\ et\ x = x_0 + \frac{1}{k_2}\ln(1 + k_2.v_0.t)$

Donc $x(t) \in [x_0; +\infty[$

Pour $x_0 = 3, v_0 = 5, k_2 = 2$



Pour n>2

$\ddot{x} + k_2.\dot{x}^n = 0$, $\frac{\ddot{x}}{\dot{x}^n} = -k_2$, on pose y = $\dot{x}$, $\frac{\dot{y}}{y^n} = -k_2, on\ intègre : \frac{y^{1-n}}{1-n} + \frac{{v_0}^{1-n}}{1-n} = -k_2.t$

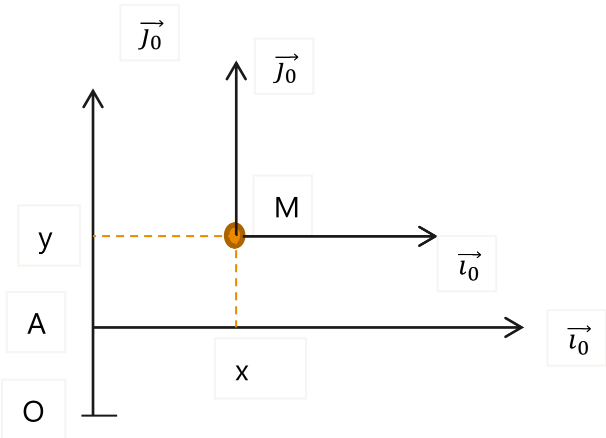
D'où $\dot{x} = [(n-1).k_2.t - {v_0}^{1-n}]^{\frac{1}{1-n}}\ et\ x = x_0 + \frac{1}{k_2(n-2)}[(n-1)k_2.t - {v_0}^{1-n}]^{\frac{2-n}{1-n}}$

Donc $x(t) \in [x_0; +\infty[$

EXO 4 :

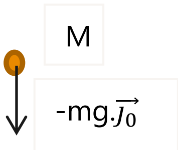
Résistance de l'air négligée :

Repères et paramétrage :



$R_0(A, \vec{\imath_0}, \vec{\jmath_0}, \vec{k_0}), R_1(M, \vec{\imath_0}, \vec{\jmath_0}, \vec{k_0}), \overrightarrow{AM} = x.\vec{\imath_0} + y.\vec{\jmath_0}$

BAME :



BQA : Vecteur position : $\overrightarrow{AM} = x.\overrightarrow{\iota_0} + y.\overrightarrow{J_0}$
D'où $\overrightarrow{v_M} = \dot{x}\overrightarrow{\iota_0} + \dot{y}\overrightarrow{J_0}$ et $\overrightarrow{a_M} = \ddot{x}\overrightarrow{\iota_0} + \ddot{y}\overrightarrow{J_0}$

PFD : $\vec{F}$=m. $\overrightarrow{a_M}$
$-mg.\overrightarrow{J_0} = m\overrightarrow{a_M}$,
Donc $-g.\overrightarrow{J_0} = \ddot{x}\overrightarrow{\iota_0} + \ddot{y}\overrightarrow{J_0}$
On intègre : $\dot{x}(t) = v_0$ et $\dot{y}(t) = -gt$; $x(t) = v_0 t$ et $y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + h$
Recherche du point D intersection de la piste (y=-x) avec
la trajectoire de M ($y = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0}\right)^2 + h$) : donc $-x = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0}\right)^2 + h$
$\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0}\right)^2 - x - h = 0$, Δ=1+$\frac{2hg}{v_0^2}$, $x = \frac{1+\sqrt{1+\frac{2hg}{v_0^2}}}{\frac{g}{v_0^2}} = \frac{v_0^2}{g} + \sqrt{\frac{v_0^2}{g} + 2h}$ seule racine positive
D'où $OD = \left(\frac{v_0^2}{g} + \sqrt{\frac{v_0^2}{g} + 2h}\right).\sqrt{2}$
AN : $OD = 143m$
Résistance de l'air proportionnelle à la vitesse :
PFD : $\vec{F}$=m. $\overrightarrow{a_M}$
$-g.\overrightarrow{J_0} - k\overrightarrow{v_M} = \overrightarrow{a_M}$,
Vecteur position : $\overrightarrow{OM}$=$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{\iota_0} + (h+y)\overrightarrow{J_0}$
D'où $\overrightarrow{v_M} = \dot{x}\overrightarrow{\iota_0} + \dot{y}\overrightarrow{J_0}$ et $\overrightarrow{a_M} = \ddot{x}\overrightarrow{\iota_0} + \ddot{y}\overrightarrow{J_0}$
Donc $-g.\overrightarrow{J_0} - k\dot{x}\overrightarrow{\iota_0} - k\dot{y}\overrightarrow{J_0} = \ddot{x}\overrightarrow{\iota_0} + \ddot{y}\overrightarrow{J_0}$
On projette : $\ddot{x} + k\dot{x} = 0$; $\ddot{y} + k\dot{y} = -g$
On intègre : $\dot{x}(t) = v_0 e^{-kt}$ et $\dot{y}(t) = \frac{g}{k}(e^{-kt} - 1)$;
$x(t) = \frac{v_0}{k}\left(1 - e^{-kt}\right)$ et $y(t) = \frac{g}{k^2}\left(1 - e^{-kt}\right) - \frac{g}{k}.t + h$
Recherche du point D intersection de la piste (y=-x) avec
la trajectoire de M ($y = \frac{g}{kv_0}x + \frac{g}{k^2}\ln\left(1 - \frac{kx}{v_0}\right) + h$) : donc $-x = \frac{g}{kv_0}x + \frac{g}{k^2}\ln\left(1 - \frac{kx}{v_0}\right) + h$
Résolution numérique de l'équation : $\left(\frac{g}{kv_0} + 1\right)x + \frac{g}{k^2}\ln\left(1 - \frac{kx}{v_0}\right) + h = 0$
AN : $OD = 52m$

Semaine 6

EXO 5-1 :
1 : Torseur cinétique en O :
Résultante : $\overrightarrow{p_{\Sigma/R}} = m.\overrightarrow{v_{M_1/R}} + m.\overrightarrow{v_{M_2/R}} = \vec{0}$
Moment : $\overrightarrow{L_{O\epsilon\Sigma/R}} = \sum_{i=1}^{2}\overrightarrow{OM_\iota} \wedge m.\overrightarrow{v_{M_\iota/R}} = -3.d.m.\lambda.t^2.\overrightarrow{k_O}$
Torseur dynamique en O :
Résultante : $\overrightarrow{D_{\Sigma/R}} = m.\overrightarrow{a_{M_1/R}} + m.\overrightarrow{a_{M_2/R}} = \vec{0}$
Moment : $\overrightarrow{N_{O\epsilon\Sigma/R}} = \sum_{i=1}^{2}\overrightarrow{OM_\iota} \wedge m.\overrightarrow{a_{M_\iota/R}} = -6.d.m.\lambda.t.\overrightarrow{k_O}$
2 : les résultantes étant nulles, le champ vectoriel associé aux torseurs est constant, donc les moments se conservent.
5-2 :
1 : $\overrightarrow{OM} = r.\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{v_{M/R}} = r.\dot{\theta}.\overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{a_{M/R}} = r.\ddot{\theta}.\overrightarrow{e_\theta} - r.\dot{\theta}^2.\overrightarrow{e_r}$
Donc $\overrightarrow{p_{M/R}} = m.r.\dot{\theta}.\overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{D_{M/R}} = m.\left(r.\ddot{\theta}.\overrightarrow{e_\theta} - r.\dot{\theta}^2.\overrightarrow{e_r}\right)$
2 : $\overrightarrow{L_{O\epsilon M/R}} = m.r^2.\dot{\theta}.\vec{z}, \overrightarrow{N_{O\epsilon M/R}} = m.r^2.\ddot{\theta}.\vec{z}$
5-3 :
Cas 1 : $\overrightarrow{p_{\Sigma/R}} = 2.m.r.\dot{\theta}.\overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{D_{\Sigma/R}} = 2.m.r.(\ddot{\theta}.\overrightarrow{e_\theta} - \dot{\theta}^2.\overrightarrow{e_r})$

$$\overrightarrow{L_{I\epsilon\Sigma/R}}=\sum_{i=1}^{2}\overrightarrow{IM_\iota}\wedge m.\overrightarrow{v_{M_\iota/R}}=2.m.r^2.\dot{\theta}.\overrightarrow{k_O},\overrightarrow{N_{I\epsilon\Sigma/R}}=\sum_{i=1}^{2}\overrightarrow{IM_\iota}\wedge m.\overrightarrow{a_{M_\iota/R}}=2.m.r^2.\ddot{\theta}.\overrightarrow{k_O}$$

Remarque : G milieu de $[M_1M_1]$, $\overrightarrow{IG}=r.\overrightarrow{e_r}, masse\ 2m$

Cas 2 : $\overrightarrow{IG}=r.sin\theta_1\overrightarrow{J_0}, masse\ 2m$, mouvement de translation.

$\overrightarrow{p_{\Sigma/R}}=2.m.r.\dot{\theta}.cos\theta_1\overrightarrow{J_0},\overrightarrow{D_{\Sigma/R}}=2.m.r.\left(\ddot{\theta}_1.cos\theta_1-\dot{\theta}_1^2sin\theta_1\right)\overrightarrow{J_0}$,

$\overrightarrow{L_{I\epsilon\Sigma/R}}=\vec{0},\overrightarrow{N_{I\epsilon\Sigma/R}}=\vec{0}$,

Cas 3 : $\overrightarrow{IG}=\vec{0}$.

$\overrightarrow{p_{\Sigma/R}}=\vec{0},\overrightarrow{D_{\Sigma/R}}=\vec{0}$,

$\overrightarrow{L_{I\epsilon\Sigma/R}}=mr^2\dot{\theta}_1(2-3cos\theta_1)\overrightarrow{k_O},\overrightarrow{N_{I\epsilon\Sigma/R}}=3mr^2\dot{\theta}_1{}^2sin\theta_1\overrightarrow{k_O}$,

6 :

1 : **BQA**

$\overrightarrow{v_{M/R}}=R\dot{\alpha}\overrightarrow{k_1},\overrightarrow{v_{N/R}}=-R\dot{\alpha}\overrightarrow{k_1},\overrightarrow{a_{\frac{M}{R}}}=R\left(\ddot{\alpha}\overrightarrow{k_1}-\dot{\alpha}^2\overrightarrow{J_1}\right),\overrightarrow{a_{\frac{N}{R}}}=-R\left(\ddot{\alpha}\overrightarrow{k_1}-\dot{\alpha}^2\overrightarrow{J_1}\right)$

O cdm donc $\overrightarrow{p_{\Sigma/R}}=\overrightarrow{D_{\Sigma/R}}=\vec{0}$

$\overrightarrow{L_{O\epsilon\Sigma/R}}=\overrightarrow{OM}\wedge m.\overrightarrow{v_{M/R}}+\overrightarrow{ON}\wedge m.\overrightarrow{v_{N/R}}=2.m.R.\dot{\alpha}\left(\frac{-l}{2}\overrightarrow{J_1}+R\overrightarrow{\iota_O}\right)$,

$\overrightarrow{N_{O\epsilon\Sigma/R}}=\frac{d\overrightarrow{L_{O\epsilon\Sigma/R}}}{dt}_0=2.m.R.\ddot{\alpha}\left(\frac{-l}{2}\overrightarrow{J_1}+R\overrightarrow{\iota_O}\right)-l.m.R.\dot{\alpha}^2.\overrightarrow{k_1}$,

2 : **BAME**

$$\{L_{pivot}\}=\begin{Bmatrix}X & 0\\ Y & M\\ Z & N\end{Bmatrix}_{(O,R_0)};\{T_{poids}\}=\begin{Bmatrix}0 & 0\\ -2mg & 0\\ 0 & 0\end{Bmatrix}_{(O,R_0)}$$

Equations du PFD :

Résultante :

$$\begin{cases}0=X\\ 0=Y-2mg,\\ 0=Z\end{cases}$$

Moment :

$$\begin{cases}2.m.R^2.\ddot{\alpha}=0\\ -l.m.R.\ddot{\alpha}.cos\alpha+l.m.R.\dot{\alpha}^2.sin\alpha=M,\\ -l.m.R.\ddot{\alpha}.sin\alpha-l.m.R.\dot{\alpha}^2.cos\alpha=N\end{cases}$$

Donc $\ddot{\alpha}=0$,

$$\begin{cases}\dot{\alpha}=cte\\ l.m.R.\dot{\alpha}^2.sin\alpha=M,\\ l.m.R.\dot{\alpha}^2.cos\alpha=N\end{cases}$$

Les effort dans la pivot sont proportionnels à $\dot{\alpha}^2$

7 :

1 : **BQA**

$\overrightarrow{v_{M/R_0}}=L.\dot{\alpha}.\overrightarrow{J_1}$, $\overrightarrow{a_{M/R_0}}=-L.\dot{\alpha}^2.\overrightarrow{\iota_1}+L.\ddot{\alpha}.\overrightarrow{J_1}$, M est cdm du pendule.

En S : $\vec{P}=m.L.\dot{\alpha}.\overrightarrow{J_1}$, $\overrightarrow{L_{\frac{S\epsilon\Sigma}{R_0}}}=\overrightarrow{SM}\wedge\vec{p}=m.L.(L-l).\dot{\alpha}.\overrightarrow{k_0}$

$\vec{D}=m(-L.\dot{\alpha}^2.\overrightarrow{\iota_1}+L.\ddot{\alpha}.\overrightarrow{J_1}),\overrightarrow{N_{\frac{S\epsilon\Sigma}{R_0}}}=\overrightarrow{SM}\wedge\vec{D}=m.L.(L-l).\ddot{\alpha}.\overrightarrow{k_0}$,

Avec $\dot{\alpha}=-\alpha_0.\omega.sin(\omega.t),\ddot{\alpha}=-\alpha_0.\omega^2.cos(\omega.t)$

2 : **BAME** :

$$\{L_{encast}\}=\begin{Bmatrix}X & L\\ Y & M\\ Z & N\end{Bmatrix}_{(S,R\ )};\{T_{poids}\}=\begin{Bmatrix}mg & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{Bmatrix}_{(M,R_0)}=\begin{Bmatrix}m.gsin\alpha & 0\\ m.gcos\alpha & 0\\ 0 & -(L-l)m.gcos\alpha\end{Bmatrix}_{(S,R\ )}$$

Résultante :

$$\begin{cases} -m.L.\dot{\alpha}^2 = X + m.gcos\alpha \\ m.L.\ddot{\alpha} = Y - m.gsin\alpha \\ 0 = Z \end{cases},$$

Moment :

$$\begin{cases} 0 = L \\ 0 = M \\ m.L.(L-l).\ddot{\alpha} = N - (L-l)m.gcos\alpha \end{cases},$$

3 :

$$\{L_{encastrement\ 1/2}\} = \begin{Bmatrix} -m.L.\dot{\alpha}^2 - m.gcos\alpha & 0 \\ m.L.\ddot{\alpha} + m.gsin\alpha & 0 \\ 0 & m.(L-l).(L\ddot{\alpha} + gcos\alpha) \end{Bmatrix}_{(S,R\ \ )}$$

Effort normal et tangentiel constants de O à M, augmentent avec la pulsation
Moment fléchissant décroit linéairement de O à M (nul en M), augmentent avec la pulsation.

4 :

on isole (2). Système sans masse donc : $C_m = m.(L-l).(L\ddot{\alpha} + gcos\alpha)$

$$\{L_{articulation}\} = \begin{Bmatrix} -m.L.\dot{\alpha}^2 - m.gcos\alpha & 0 \\ m.L.\ddot{\alpha} + m.gsin\alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(O,R\ \ )} = -\{L_{encastrement\ 2/1}\}$$

Semaine 7

Révisions, questions, CC2