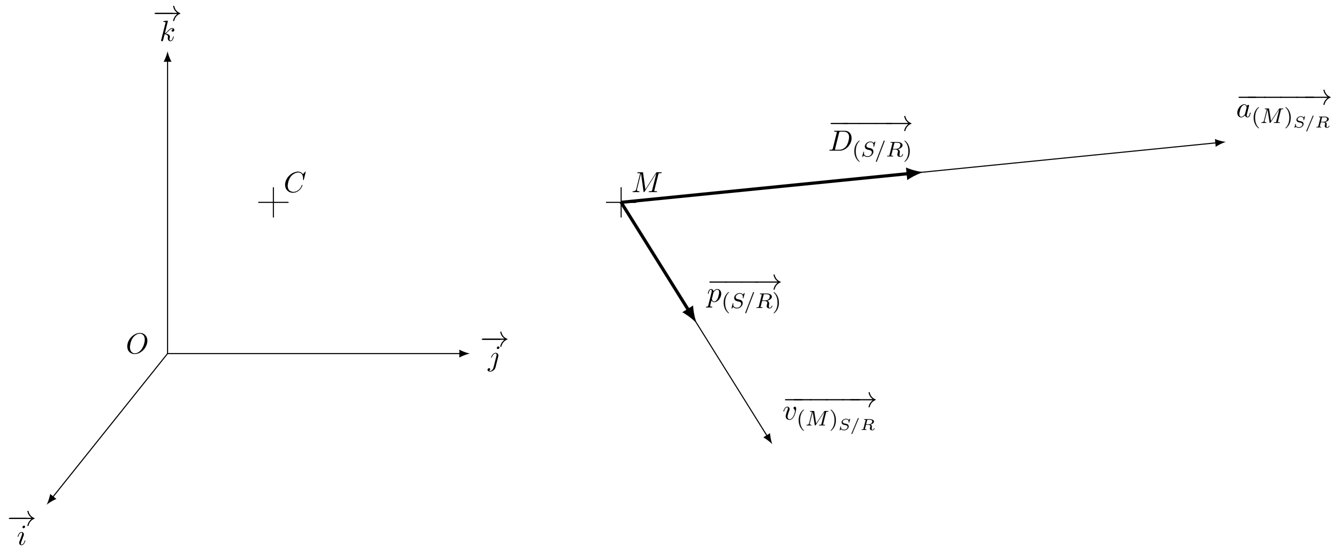
1 Principe fondamental de la dynamique pour un point matériel (S)

1.1 Définitions

Soit $(S) = (M,m)$ un point matériel possèdant une masse m constante et R un référentiel d'observation.



On peut définir :

— La quantité de mouvement du point matériel (S) dans son mouvement par rapport à R (unité : $kg.m.s^{-1}$) :

$$\boxed{\overrightarrow{p_{(S/R)}} = m\overrightarrow{v_{(M)_{S/R}}}}$$

— La quantité d'accélération du point matériel (S) dans son mouvement par rapport à R (unité : $kg.m.s^{-2}$) :

$$\boxed{\overrightarrow{D_{(S/R)}} = m\overrightarrow{a_{(M)_{S/R}}}}$$

— Le moment cinétique en C du point matériel (S) dans son mouvement par rapport à R (unité : $kg.m^2.s^{-1}$) :

$$\boxed{\overrightarrow{L_{C_{(S/R)}}} = \overrightarrow{CM} \wedge m\overrightarrow{v_{(M)_{S/R}}}}$$

— Le moment dynamique en C du point matériel (S) dans son mouvement par rapport à un R (unité : $kg.m^2.s^{-2}$) :

$$\boxed{\overrightarrow{N_{C_{(S/R)}}} = \overrightarrow{CM} \wedge m\overrightarrow{a_{(M)_{S/R}}}}$$

1.2 Torseur cinétique

On appelle torseur cinétique du point matériel (S) dans son mouvement par rapport à un repère R le torseur suivant :

$$\{\mathcal{L}_{(S/R)}\} = \left\{ \begin{array}{c|c} \overrightarrow{p_{(S/R)}} & \overrightarrow{L_{C_{(S/R)}}} \end{array} \right\}_C$$

on vérifie bien que :

— la résultante du torseur, $\overrightarrow{p_{(S/R)}}$, est indépendante du point de réduction C,

— le moment du torseur calculé au point C, $\overrightarrow{L_{C_{(S/R)}}}$, évolue selon la relation : $\overrightarrow{L_{B_{(S/R)}}} = \overrightarrow{L_{A_{(S/R)}}} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{p_{(S/R)}}$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{L_{B(S/R)}} &= \overrightarrow{BM} \wedge m\overrightarrow{v_{(M)S/R}} \\
&= (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}) \wedge m\overrightarrow{v_{(M)S/R}} \\
&= \overrightarrow{BA} \wedge m\overrightarrow{v_{(M)S/R}} + \overrightarrow{AM} \wedge m\overrightarrow{v_{(M)S/R}} \\
&= \overrightarrow{L_{A(S/R)}} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{p_{(S/R)}}
\end{aligned}$$

1.3 Torseur dynamique

On appelle torseur dynamique du point matériel (S) dans son mouvement par rapport à un repère R le torseur suivant :

$$\{\mathcal{N}_{(S/R)}\} = \left\{ \begin{array}{c|c} \overrightarrow{D_{(S/R)}} & \overrightarrow{N_{C(S/R)}} \end{array} \right\}_C$$

on vérifie bien que :

- la résultante du torseur, $\overrightarrow{D_{(1/R)}}$, est indépendante du point d'évaluation C,
- le moment du torseur calculé au point C, $\overrightarrow{N_{C(S/R)}}$, évolue selon la relation : $\overrightarrow{N_{B(S/R)}} = \overrightarrow{N_{A(S/R)}} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{D_{(S/R)}}$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{N_{B(S/R)}} &= \overrightarrow{BM} \wedge m\overrightarrow{a_{(M)S/R}} \\
&= (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}) \wedge m\overrightarrow{a_{(M)S/R}} \\
& \overrightarrow{BA} \wedge m\overrightarrow{a_{(M)S/R}} + \overrightarrow{AM} \wedge m\overrightarrow{a_{(M)S/R}} \\
&= \overrightarrow{N_{A(S/R)}} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{D_{(S/R)}}
\end{aligned}$$

1.4 Relations entre $\{\mathcal{N}_{(S/R)}\}$ et $\{\mathcal{L}_{(S/R)}\}$

- Relation entre les résultantes

$$\begin{aligned}
\frac{d^{(R)}}{dt}(\overrightarrow{p_{(S/R)}}) &= \frac{d^{(R)}}{dt}(m\overrightarrow{v_{(M)S/R}}) \\
&= m\frac{d^{(R)}}{dt}(\overrightarrow{v_{(M)S/R}}) \\
&= m\overrightarrow{a_{(M)S/R}} \\
&= \overrightarrow{D_{(S/R)}}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\overrightarrow{D_{(S/R)}} = \frac{d^{(R)}}{dt}(\overrightarrow{p_{(S/R)}})}$$

— Relation entre les moments

$$\begin{aligned}
\frac{d^{(R)}}{dt}(\overrightarrow{L_{C(S/R)}}) &= \frac{d^{(R)}}{dt}(\overrightarrow{CM} \wedge m\overrightarrow{v_{(M)S/R}}) \\
&= \frac{d^{(R)}}{dt}(\overrightarrow{CM}) \wedge m\overrightarrow{v_{(M)S/R}} + \overrightarrow{CM} \wedge \frac{d^{(R)}}{dt}(m\overrightarrow{v_{(M)S/R}}) \\
&= \frac{d^{(R)}}{dt}(\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OM}) \wedge m\overrightarrow{v_{(M)S/R}} + \overrightarrow{CM} \wedge m\overrightarrow{a_{(M)S/R}} \\
&= (\frac{d^{(R)}}{dt}(\overrightarrow{OM}) - \frac{d^{(R)}}{dt}(\overrightarrow{OC})) \wedge m\overrightarrow{v_{(M)S/R}} + \overrightarrow{N_{C(S/R)}} \\
&= (\overrightarrow{v_{(M)S/R}} - \overrightarrow{v_{(C)/R}}) \wedge m\overrightarrow{v_{(M)S/R}} + \overrightarrow{N_{C(S/R)}} \\
&= -\overrightarrow{v_{(C)/R}} \wedge \overrightarrow{p_{(S/R)}} + \overrightarrow{N_{C(S/R)}}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\boxed{\overrightarrow{N_{C(S/R)}} = \frac{d^{(R)}}{dt}(\overrightarrow{L_{C(S/R)}}) + \overrightarrow{v_{(C)/R}} \wedge \overrightarrow{p_{(S/R)}}}}$$

— Cas particuliers :

Trois cas particuliers apparaissent souvent dans les calculs :

— le point C est fixe dans R,

— $\overrightarrow{v_{(C)/R}}$ et $\overrightarrow{v_{(G)S/R}}$ sont colinéaires,

— A et G sont confondus.

Dans ces cas la relation devient :

$$\boxed{\boxed{\overrightarrow{N_{C(S/R)}} = \frac{d^{(R)}}{dt}(\overrightarrow{L_{C(S/R)}})}}$$

1.5 Principe fondamental de la dynamique

Il existe :

— une chronologie, façon de mesurer le temps,

— un repère « fixe », « absolu », galiléen ...noté R_0

tels que pour tout point matériel (S) :

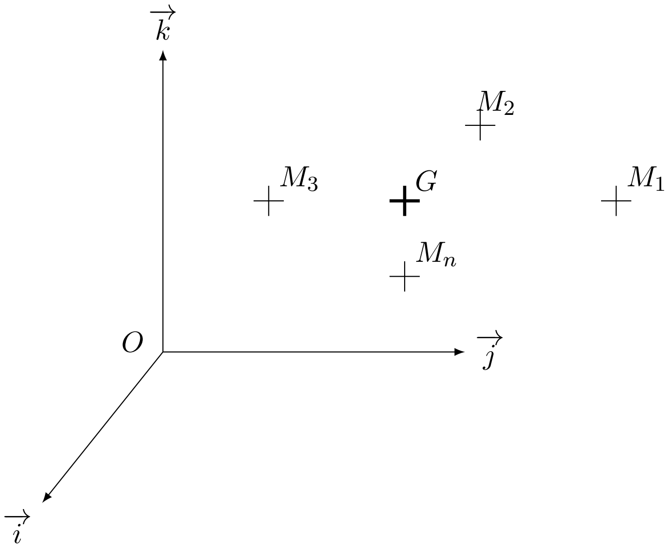
$$\boxed{\boxed{\left\{\mathcal{N}_{(S/R_0)}\right\} = \left\{\mathcal{T}_{(ext/S)}\right\}}}$$

Nota bene :*On nomme principe physique une loi physique apparente qu'aucune expérience n'a invalidée jusque-là bien qu'elle n'ait pas été démontrée, et joue un rôle voisin de celui d'un postulat en mathématiques.*

2 Principe fondamental de la dynamique pour un ensemble de points matériels (S)

2.1 Barycentre

Soit (1) = $\{(M_1,m_1),(M_2,m_2),\ldots,(M_n,m_n)\}$ un ensemble de n points matériels de masses constantes et R un référentiel d'observation.



On peut définir :

— Le barycentre G de (S) par :

$$\boxed{\overrightarrow{OG} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{OM_i}}{\sum_{i=1}^{n} m_i}}$$

Équation vectorielle qui donne par projection sur les axes du repère et en posant $m = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i$:

$$\boxed{x_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_{M_i}}{m}}$$

$$\boxed{y_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_{M_i}}{m}}$$

$$\boxed{z_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_{M_i}}{m}}$$

Équation vectorielle qui donne par une première dérivation $\left(\dfrac{d^{(R)}}{dt}\ldots\right)$:

$$\boxed{\overrightarrow{v_{(G)_{S/R}}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{v_{(M_i)_{S/0}}}}{m}}$$

Équation vectorielle qui donne par une seconde dérivation $\left(\dfrac{d^{2(R)}}{dt^2}\ldots\right)$:

$$\boxed{\overrightarrow{a_{(G)_{S/R}}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{a_{(M_i)_{S/0}}}}{m}}$$

Remarque : Le barycentre n'est pas forcément confondu avec le centre de gravité !

2.2 Principe fondamental de la dynamique pour chaque point d'un ensemble de trois points matériels

Soit :

— $(S) = \{(M_1,m_1),(M_2,m_2),(M_3,m_3)\}$ un ensemble de 3 points matériels de masses constantes,

— $m = m_1 + m_2 + m_3$ sa masse,

— G son barycentre et

— R_0 un référentiel d'observation galiléen.

Appliquons le théorème de la résultante dynamique aux différents points matériels :
Pour M_1 :

$$\overrightarrow{P_1} + \overrightarrow{F_{2/1}} + \overrightarrow{F_{3/1}} + \overrightarrow{F_{\bar{S}/1}} = m_1\overrightarrow{a_{(M_1)_{S/R_0}}}$$

Pour M_2 :

$$\overrightarrow{P_2} + \overrightarrow{F_{1/2}} + \overrightarrow{F_{3/2}} + \overrightarrow{F_{\bar{S}/2}} = m_2\overrightarrow{a_{(M_2)_{S/R_0}}}$$

Pour M_3 :

$$\overrightarrow{P_3} + \overrightarrow{F_{1/3}} + \overrightarrow{F_{2/3}} + \overrightarrow{F_{\bar{S}/3}} = m_3\overrightarrow{a_{(M_3)_{S/R_0}}}$$

En sommant ces trois relations :

$$\overrightarrow{P_1} + \overrightarrow{P_2} + \overrightarrow{P_3} + \overrightarrow{F_{\bar{S}/1}} + \overrightarrow{F_{\bar{S}/2}} + \overrightarrow{F_{\bar{S}/3}} = m_1\overrightarrow{a_{(M_1)_{S/R_0}}} + m_2\overrightarrow{a_{(M_2)_{S/R_0}}} + m_3\overrightarrow{a_{(M_3)_{S/R_0}}}$$

$$\overrightarrow{P_S} + \overrightarrow{F_{\bar{S}/S}} = \sum_{i=1}^{3} m_i\overrightarrow{a_{(M_i)_{S/R_0}}}$$

$$\boxed{\overrightarrow{F_{ext/S}} = m\overrightarrow{a_{(G)_{S/R_0}}}}$$

Appliquons le théorème du moment dynamique aux différents points matériels :
Pour M_1 :

$$\overrightarrow{M_{C(\overrightarrow{P_1})}} + \overrightarrow{M_{C(\overrightarrow{F_{2/1}})}} + \overrightarrow{M_{C(\overrightarrow{F_{3/1}})}} + \overrightarrow{M_{C(\overrightarrow{F_{\bar{S}/1}})}} = \overrightarrow{CM_1} \wedge m_1\overrightarrow{a_{(M_1)_{S/R_0}}}$$

Pour M_2 :

$$\overrightarrow{M_{C(\overrightarrow{P_2})}} + \overrightarrow{M_{C(\overrightarrow{F_{1/2}})}} + \overrightarrow{M_{C(\overrightarrow{F_{3/2}})}} + \overrightarrow{M_{C(\overrightarrow{F_{\bar{S}/2}})}} = \overrightarrow{CM_2} \wedge m_2\overrightarrow{a_{(M_2)_{S/R_0}}}$$

Pour M_3 :

$$\overrightarrow{M_{C(\overrightarrow{P_3})}} + \overrightarrow{M_{C(\overrightarrow{F_{1/3}})}} + \overrightarrow{M_{C(\overrightarrow{F_{2/3}})}} + \overrightarrow{M_{C(\overrightarrow{F_{\bar{S}/3}})}} = \overrightarrow{CM_3} \wedge m_3\overrightarrow{a_{(M_3)_{S/R_0}}}$$

Remarquons que :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{M_{C(\overrightarrow{P_1})}} + \overrightarrow{M_{C(\overrightarrow{P_2})}} + \overrightarrow{M_{C(\overrightarrow{P_3})}} &= \overrightarrow{CM_1} \wedge \overrightarrow{P_1} + \overrightarrow{CM_2} \wedge \overrightarrow{P_2} + \overrightarrow{CM_3} \wedge \overrightarrow{P_3} \\
&= \overrightarrow{CG} \wedge (\overrightarrow{P_1} + \overrightarrow{P_2} + \overrightarrow{P_3}) + \overrightarrow{GM_1} \wedge \overrightarrow{P_1} + \overrightarrow{GM_2} \wedge \overrightarrow{P_2} + \overrightarrow{GM_3} \wedge \overrightarrow{P_3} \\
&= \overrightarrow{CG} \wedge \overrightarrow{P} + (m_1\overrightarrow{GM_1} + m_2\overrightarrow{GM_2} + m_3\overrightarrow{GM_3}) \wedge \overrightarrow{g} \\
&= \overrightarrow{CG} \wedge \overrightarrow{P} \\
&= \overrightarrow{M_{C(\overrightarrow{P})}}
\end{aligned}$$

La somme des trois équations découlant de l'application du théorème du moment dynamique est :

$$\overrightarrow{M_{C(\overrightarrow{P})}} + \overrightarrow{M_{C(\overrightarrow{F_{\bar{S}/S}})}} = \sum_{i=1}^{3} \overrightarrow{CM_1} \wedge m_i\overrightarrow{a_{(M_i)_{S/R_0}}}$$

$$\boxed{\boxed{\overrightarrow{M_{C(\overrightarrow{F_{ext/S}})}} = \sum_{i=1}^{3} \overrightarrow{CM_i} \wedge m_i\overrightarrow{a_{(M_i)_{S/R_0}}}}}$$

2.3 Définitions

— La quantité de mouvement d'un ensemble de points matériels (S) dans son mouvement par rapport à R (unité : $kg.m.s^{-1}$) :

$$\boxed{\overrightarrow{p_{(S/R)}} = \sum_i m_i\overrightarrow{v_{(M_i)_{S/R}}} = m\overrightarrow{v_{(G)_{S/R}}}}$$

— La quantité d'accélération d'un ensemble de points matériels (S) dans son mouvement par rapport à R (unité : $kg.m.s^{-2}$) :

$$\boxed{\overrightarrow{D_{(S/R)}} = \sum_i m_i\overrightarrow{a_{(M_i)_{S/R}}} = m\overrightarrow{a_{(G)_{S/R}}}}$$

— Le moment cinétique en C d'un ensemble de points matériels (S) dans son mouvement par rapport à R (unité : $kg.m^2.s^{-1}$) :

$$\boxed{\overrightarrow{L_{C_{(S/R)}}} = \sum_i \overrightarrow{CM} \wedge m_i\overrightarrow{v_{(M_i)_{S/R}}}}$$

— Le moment dynamique en C d'un ensemble de points matériels (S) dans son mouvement par rapport à un R (unité : $kg.m^2.s^{-2}$) :

$$\boxed{\overrightarrow{N_{C_{(S/R)}}} = \sum_i \overrightarrow{CM} \wedge m_i\overrightarrow{a_{(M_i)_{S/R}}}}$$

2.4 Torseur cinétique

On appelle torseur cinétique de l'ensemble de points matériels (S) dans son mouvement par rapport à un repère R le torseur suivant :

$$\{\mathcal{L}_{(S/R)}\} = \left\{ \overrightarrow{p_{(S/R)}} \quad | \quad \overrightarrow{L_{C_{(S/R)}}} \right\}_C$$

on vérifie bien que :

- la résultante du torseur, $\overrightarrow{p_{(S/R)}}$, est indépendante du point de réduction C,
- le moment du torseur calculé au point C, $\overrightarrow{L_{C_{(S/R)}}}$, évolue selon la relation : $\overrightarrow{L_{B_{(S/R)}}} = \overrightarrow{L_{A_{(S/R)}}} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{p_{(S/R)}}$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{L_{B_{(S/R)}}} &= \sum_i \overrightarrow{BM_i} \wedge m_i \overrightarrow{v_{(M_i)_{S/R}}} \\
&= \sum_i (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM_i}) \wedge m_i \overrightarrow{v_{(M_i)_{S/R}}} \\
&= \overrightarrow{BA} \wedge \sum_i m_i \overrightarrow{v_{(M_i)_{S/R}}} + \sum_i \overrightarrow{AM_i} \wedge m_i \overrightarrow{v_{(M_i)_{S/R}}} \\
&= \overrightarrow{L_{A_{(S/R)}}} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{p_{(S/R)}}
\end{aligned}$$

2.5 Torseur dynamique

On appelle torseur dynamique de l'ensemble de points matériels (S) dans son mouvement par rapport à un repère R le torseur suivant :

$$\{\mathcal{N}_{(S/R)}\} = \left\{ \overrightarrow{D_{(S/R)}} \quad | \quad \overrightarrow{N_{C_{(S/R)}}} \right\}_C$$

on vérifie bien que :

- la résultante du torseur, $\overrightarrow{D_{(S/R)}}$, est indépendante du point d'évaluation C,
- le moment du torseur calculé au point C, $\overrightarrow{N_{C_{(S/R)}}}$, évolue selon la relation : $\overrightarrow{N_{B_{(S/R)}}} = \overrightarrow{N_{A_{(S/R)}}} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{D_{(S/R)}}$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{N_{B_{(1/R)}}} &= \sum_i \overrightarrow{BM_i} \wedge m_i \overrightarrow{a_{(M_i)_{S/R}}} \\
&= \sum_i (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM_i}) \wedge m_i \overrightarrow{a_{(M_i)_{S/R}}} \\
& \overrightarrow{BA} \wedge \sum_i m_i \overrightarrow{a_{(M_i)_{S/R}}} + \sum_i \overrightarrow{AM_i} \wedge m_i \overrightarrow{a_{(M_i)_{S/R}}} \\
&= \overrightarrow{N_{A_{(S/R)}}} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{D_{(S/R)}}
\end{aligned}$$

2.6 Relations entre $\{\mathcal{N}_{(S/R)}\}$ et $\{\mathcal{L}_{(S/R)}\}$

— Relation entre les résultantes

$$\begin{aligned}
\frac{d^{(R)}}{dt}(\overrightarrow{p_{(S/R)}}) &= \frac{d^{(R)}}{dt}(m\overrightarrow{v_{(G)_{S/R}}}) \\
&= m\frac{d^{(R)}}{dt}(\overrightarrow{v_{(G)_{S/R}}}) \\
&= m\overrightarrow{a_{(M)_{S/R}}} \\
&= \overrightarrow{D_{(S/R)}}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\overrightarrow{D_{(S/R)}} = \frac{d^{(R)}}{dt}(\overrightarrow{p_{(S/R)}})}$$

— Relation entre les moments

$$\begin{aligned}
\frac{d^{(R)}}{dt}(\overrightarrow{L_{C_{(S/R)}}}) &= \frac{d^{(R)}}{dt}(\sum_i \overrightarrow{CM_i} \wedge m_i\overrightarrow{v_{(M_i)_{S/R}}}) \\
&= \sum_i(\frac{d^{(R)}}{dt}(\overrightarrow{CM_i} \wedge m_i\overrightarrow{v_{(M_i)_{S/R}}})) \\
&= \sum_i(\frac{d^{(R)}}{dt}(\overrightarrow{CM_i}) \wedge m_i\overrightarrow{v_{(M_i)_{S/R}}}) + \sum_i(\overrightarrow{CM_i} \wedge \frac{d^{(R)}}{dt}(m_i\overrightarrow{v_{(M_i)_{S/R}}})) \\
&= \sum_i(\frac{d^{(R)}}{dt}(\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OM_i}) \wedge m_i\overrightarrow{v_{(M_i)_{S/R}}}) + \sum_i \overrightarrow{CM_i} \wedge m_i\overrightarrow{a_{(M_i)_{S/R}}} \\
&= \sum_i((\frac{d^{(R)}}{dt}(\overrightarrow{OM_i}) - \frac{d^{(R)}}{dt}(\overrightarrow{OC})) \wedge m_i\overrightarrow{v_{(M_i)_{S/R}}}) + \overrightarrow{N_{C_{(S/R)}}} \\
&= \sum_i((\overrightarrow{v_{(M_i)_{S/R}}} - \overrightarrow{v_{(C)_{/R}}}) \wedge m_i\overrightarrow{v_{(M_i)_{S/R}}}) + \overrightarrow{N_{C_{(S/R)}}} \\
&= \sum_i(\overrightarrow{v_{(M_i)_{S/R}}} \wedge m_i\overrightarrow{v_{(M_i)_{S/R}}}) - \sum_i(\overrightarrow{v_{(C)_{/R}}}) \wedge m_i\overrightarrow{v_{(M_i)_{S/R}}}) + \overrightarrow{N_{C_{(S/R)}}} \\
&= -\overrightarrow{v_{(C)_{/R}}} \wedge \overrightarrow{p_{(S/R)}} + \overrightarrow{N_{C_{(S/R)}}}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\overrightarrow{N_{C_{(S/R)}}} = \frac{d^{(R)}}{dt}(\overrightarrow{L_{C_{(S/R)}}}) + \overrightarrow{v_{(C)_{/R}}} \wedge \overrightarrow{p_{(S/R)}}}$$

— Cas particuliers :

Trois cas particuliers apparaissent souvent dans les calculs :

  — le point C est fixe dans R,
  — $\overrightarrow{v_{(C)/R}}$ et $\overrightarrow{v_{(G)S/R}}$ sont colinéaires,
  — A et G sont confondus.

Dans ces cas la relation devient :

$$\boxed{\boxed{\overrightarrow{N_{C_{(S/R)}}} = \frac{d^{(R)}}{dt}(\overrightarrow{L_{C_{(S/R)}}})}}$$

2.7 Enoncé

— il existe une chronologie, façon de mesurer le temps,

— il existe un repère « fixe », « absolu », galiléen R_0

tels que pour tout ensemble S de points matériels :

$$\boxed{\boxed{\left\{\mathcal{N}_{(S/R_0)}\right\} = \left\{\mathcal{T}_{(ext/S)}\right\}}}$$

Nota bene :*On nomme principe physique une loi physique apparente qu'aucune expérience n'a invalidée jusque-là bien qu'elle n'ait pas été démontrée, et joue un rôle voisin de celui d'un postulat en mathématiques.*