

Plan

Livre 1

Calcul vectoriel

Rappels de cinématique

CC1 4^{ème} semaine

Livres 2

PFD point matériel

PFD systèmes de points matériels

CC2 7^{ème} semaine

Livres 3

PFD systèmes de solides

Géométrie des masses, théorème de Huygens

CC3

Cinétique

Torseur dynamique

Equations issues du PFD

CC4 13^{ème} ou 14^{ème} semaine

Compétences visées cours de dynamique S4

Compétences techniques

Partie 1

Paramétrer un système jusqu'à 3 ddl

Maîtriser la dérivation vectorielle pour calculer des vitesses et des accélérations

Maîtriser les propriétés des torseurs appliquées au champ de vitesse d'un solide

Connaître les notions de roulement sans glissement et de CIR

Partie 2 et 3

Connaître l'énoncé du PFD (points matériels et solides)

Maîtriser les propriétés des intégrales triples appliquées au cdm et aux matrices d'inertie

Compétence technique finale :

Exploiter le PFD pour obtenir des équations de mouvement et/ou des efforts de liaison

Déroulement du cours : le cours est découpé en trois parties, chacune sanctionnée par un CC plus un DS en fin de période.

Chaque partie commencera par les points importants du cours, puis un exercice type corrigé au tableau. Le reste des séances sera en autonomie par groupe de 4 maximum. L'enseignant sera disponible pour répondre aux questions, corriger au tableau les exercices qui posent problème, reprendre des points de cours...

L'objectif est d'apprendre en bonne intelligence, de laisser une liberté sur l'organisation du travail en minimisant le stress, les évaluations étant programmées.

En contrepartie, un portfolio individuel numérique est exigé. Lire sous moodle dynamique S4 le fichier « portfolio ». Le portfolio apporte une note supplémentaire de CC.

Livre 1 : calcul vectoriel
Semaine 1

A : produit scalaire :

On définit un repère $R_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ orthonormé direct.

Par définition : $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = \|\vec{u}_1\| \cdot \|\vec{u}_2\| \cdot \cos(\widehat{\vec{u}_1, \vec{u}_2})$

$$\vec{u}_1 \begin{vmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_{1R_0} \end{vmatrix} ; \vec{u}_2 \begin{vmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_{2R_0} \end{vmatrix} ; \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2$$

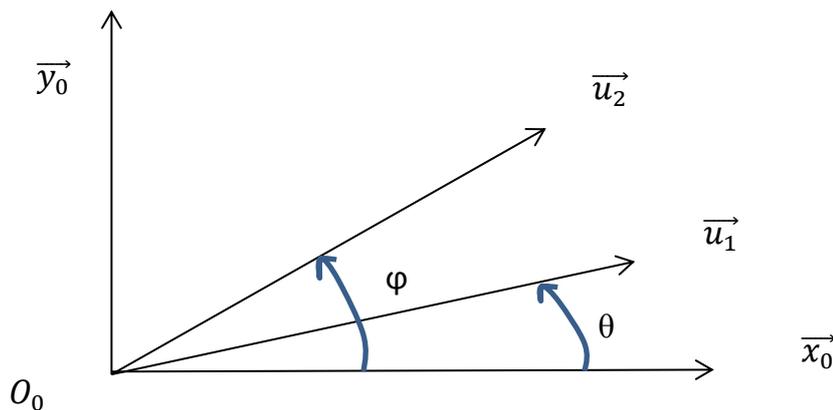
Propriétés :

Le produit scalaire est commutatif : $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_1$

Le résultat est un scalaire

Exemple :

$$\|\vec{u}_1\| = \|\vec{u}_2\| = 1, \vec{u}_1 \begin{vmatrix} a_1 \\ b_1 \\ 0_{R_0} \end{vmatrix} ; \vec{u}_2 \begin{vmatrix} a_2 \\ b_2 \\ 0_{R_0} \end{vmatrix}$$



Calculer $\vec{u}_1 \cdot \vec{x}_0$. En déduire la valeur de a_1 .

Calculer $\vec{u}_1 \cdot \vec{y}_0$. En déduire la valeur de b_1 .

Calculer $\vec{u}_2 \cdot \vec{x}_0$. En déduire la valeur de a_2 .

Calculer $\vec{u}_2 \cdot \vec{y}_0$. En déduire la valeur de b_2 .

Calculer $\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_1$

Exprimer \vec{u}_2 dans R_0 en fonction de φ

Réponses :

$$a_1 = \cos\theta, b_1 = \sin\theta, a_2 = \cos\phi, b_2 = \sin\phi, \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_1 = \cos(\theta - \phi), \vec{u}_2 \begin{vmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ 0 \end{vmatrix}_{R_0}$$

B : produit vectoriel :

On définit un repère $R_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ orthonormé direct.

Soit $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{k}$ tel que \vec{k} perpendiculaire à \vec{u}_1 et \vec{u}_2

Par définition : $\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 = \|\vec{u}_1\| \cdot \|\vec{u}_2\| \cdot \sin(\widehat{\vec{u}_1, \vec{u}_2}) \cdot \vec{k}$

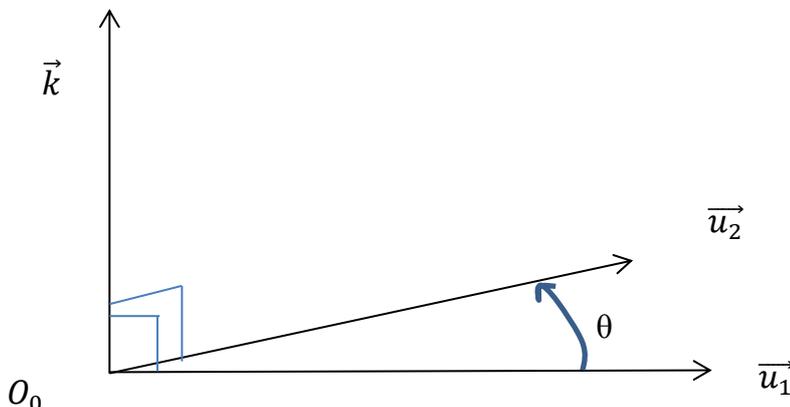
NB : $(\widehat{\vec{u}_1, \vec{u}_2})$ angle orienté entre \vec{u}_1 et \vec{u}_2 , $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{k})$ trièdre direct

$$\vec{u}_1 \begin{vmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_{1R_0} \end{vmatrix}; \vec{u}_2 \begin{vmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_{2R_0} \end{vmatrix}; \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 = \begin{vmatrix} b_1 \cdot c_2 - b_2 \cdot c_1 \\ c_1 \cdot a_2 - a_1 \cdot c_2 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_{1R_0} \end{vmatrix}$$

Propriétés :

Le produit vectoriel n'est pas commutatif : $\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 = -\vec{u}_2 \wedge \vec{u}_1$

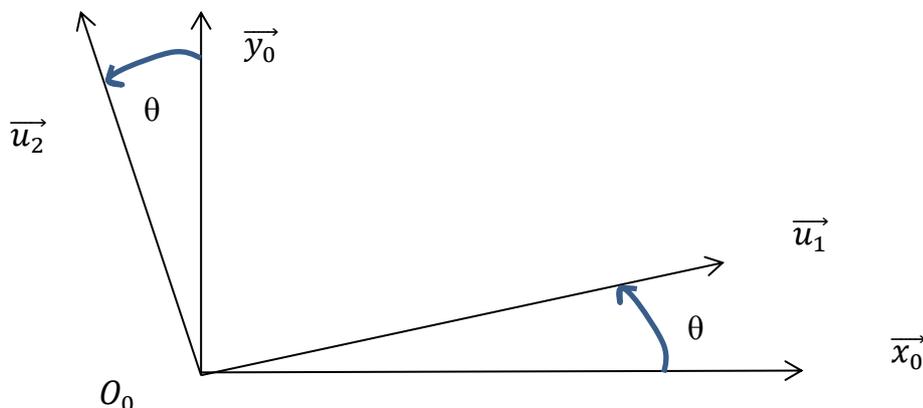
Le résultat est un vecteur



Exemple :

On définit un repère $R_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ orthonormé direct.

$$\|\vec{u}_1\| = \|\vec{u}_2\| = 1, \vec{u}_1 \begin{vmatrix} a_1 \\ b_1 \\ 0_{R_0} \end{vmatrix}; \vec{u}_2 \begin{vmatrix} a_2 \\ b_2 \\ 0_{R_0} \end{vmatrix}$$



Donner les valeurs de a_1, b_1, a_2, b_2 en fonction de θ .

Calculer $\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_1$, conclure.

Donner (sans calcul) $\vec{x}_0 \wedge \vec{y}_0, \vec{u}_1 \wedge \vec{z}_0, \vec{x}_0 \wedge \vec{u}_1, \vec{y}_0 \wedge \vec{u}_1, \vec{x}_0 \wedge \vec{u}_2, \vec{u}_2 \wedge \vec{u}_1$.

Réponses :

$$a_1 = \cos\theta, b_1 = \sin\theta, a_2 = -\sin\theta, b_2 = \cos\theta,$$

$\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_1 = a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 = 0$: les deux vecteurs sont orthogonaux (on le savait déjà).

$$\vec{x}_0 \wedge \vec{y}_0 = \vec{z}_0, \quad \vec{u}_1 \wedge \vec{z}_0 = -\vec{u}_2, \quad \vec{x}_0 \wedge \vec{u}_1 = \sin\theta \cdot \vec{z}_0, \quad \vec{y}_0 \wedge \vec{u}_1 = -\cos\theta \cdot \vec{z}_0,$$

$$\vec{x}_0 \wedge \vec{u}_2 = \cos\theta \cdot \vec{z}_0, \quad \vec{u}_2 \wedge \vec{u}_1 = -\vec{z}_0$$

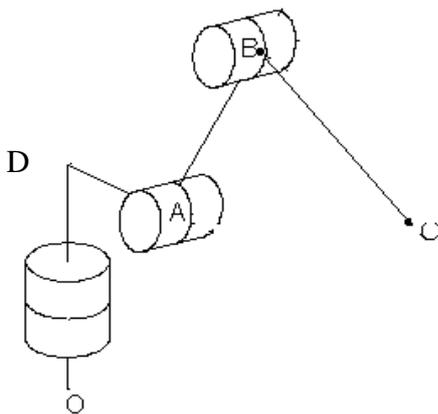
Rappels de cinématique

Première étape : paramétrage du système

Cette étape permet de définir la position d'un système dans l'espace à l'aide de paramètres indépendants.

- 1 : on définit un repère galiléen (repère fixe, le sol en général pour nos études)
- 2 : on définit un repère par sous ensemble cinématique du système (coloriage recommandé)
- 3 : on met en place les paramètres (de translation et de rotation) qui permettent de passer d'un repère à l'autre
- 4 : on vérifie que les paramètres sont indépendants

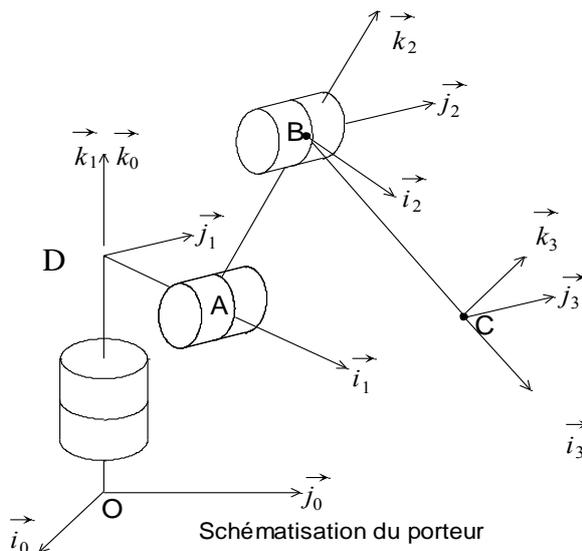
Exemple 1 : robot porteur RRR (3 liaisons pivot)



Solution : on colorie chaque sous ensemble plus le bâti (4 couleurs)

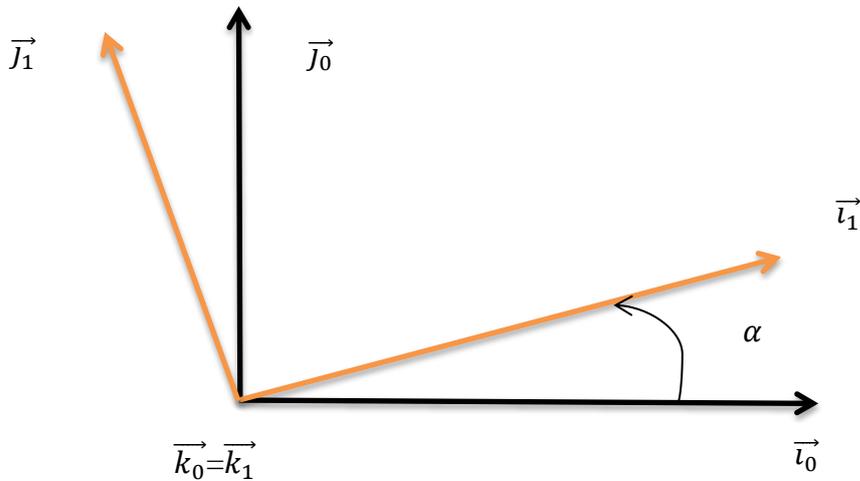
Donc 4 repères. On s'arrange pour qu'il y ait toujours au moins 1 axe commun entre 2 repères.

Résultat :

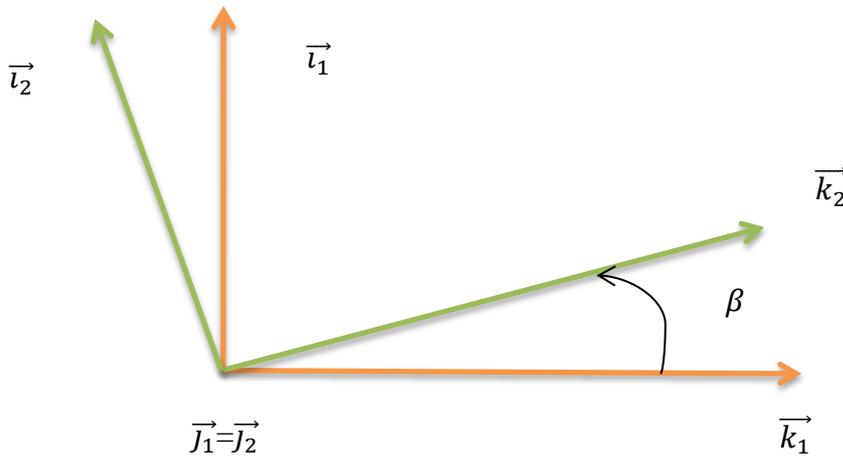


Mise en place des paramètres sur un schéma plan, repères directs, angles dessinés positifs

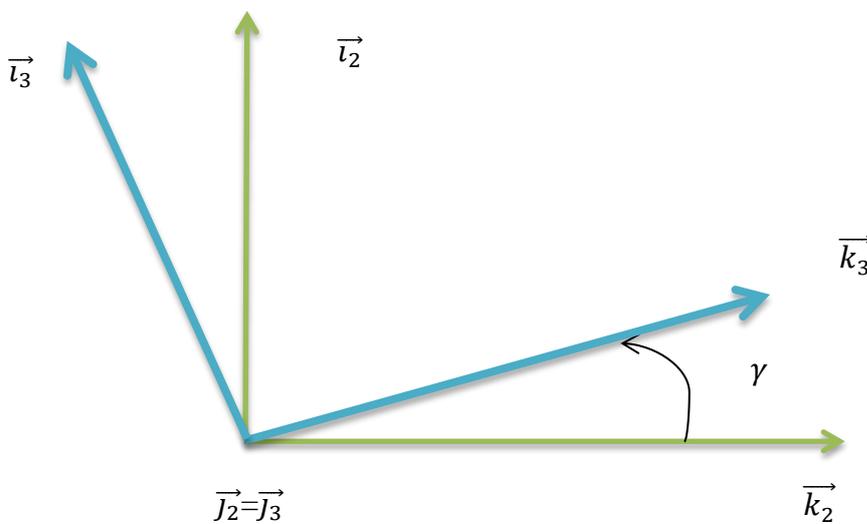
Remarque : l'origine des repères est omise ; nous souhaitons juste les paramètres de rotation.



$\vec{OD} = a \cdot \vec{k}_0$ avec a constant

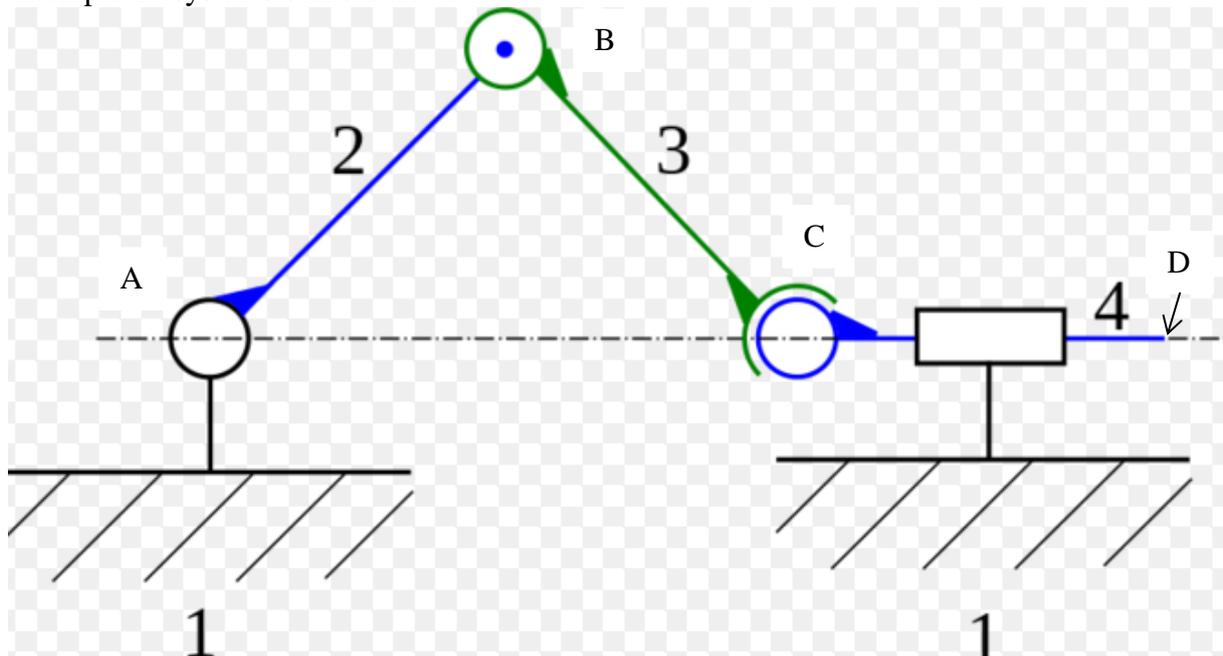


$\vec{DA} = b \cdot \vec{i}_1$ avec b constant



$\vec{AB} = c \cdot \vec{k}_2$ avec c constant, $\vec{BC} = d \cdot \vec{i}_3$ avec d constant, α, β, γ indépendants.

Exemple 2 : système bielle manivelle



Solution :

On trouve 4 repères, 4 paramètres (3 rotations, 1 translation) mais qu'un seul paramètre indépendant (trouvez le lien entre eux !). On posera $AB=BC$

Retour au cas général :

On peut définir ainsi le vecteur position de n'importe quel point du système.

Vecteur vitesse : dérivation du vecteur position par rapport au temps dans un repère de référence (repère de dérivation).

Pour définir complètement le vecteur vitesse d'un point, il faut :

... un point P

... qui appartient à un solide S, ou qui est fixe dans un repère R_S

... solide ou repère mobile dans un repère R_0 dans lequel O_0 est un point fixe (pas forcément l'origine)

$$\vec{v}(P)_{S/0} = \frac{d^{(0)} \vec{O_0P}}{dt} \quad \text{ou} \quad \left. \frac{d \vec{O_0P}}{dt} \right|_{R_0}$$

Il est essentiel de faire apparaître le repère de dérivation !

Vecteur accélération : dérivation du vecteur vitesse par rapport au temps dans un repère de référence (repère de dérivation).

Formule du changement de repère de dérivation (ou formule de dérivation composée)
(vue en cinématique S1)

$$\frac{d^{(0)} \vec{U}}{dt} = \frac{d^{(1)} \vec{U}}{dt} + \vec{\Phi}_{1/0} \otimes \vec{U}$$

NB : ne pas confondre ...

- **repère d'observation** (l'observateur est lié à ce repère, et il décrit le mouvement)
- **repère de dérivation** (notion utile pour le traitement mathématique des calculs)
- **repère d'écriture** (dans lequel on exprime les résultats). Il est rarement nécessaire d'écrire ces résultats dans un repère particulier ! Et encore moins souvent utile de les écrire dans R_0 , même lorsqu'il s'agit de calculer la vitesse d'un point, dans son mouvement par rapport à R_0 .

Exemple : l'écriture suivante est tout à fait possible

$$\vec{v}(\text{P})_{2/1} = \frac{d^{(1)} \vec{O_1P}}{dt} = x \vec{i}_1 + r \vec{j}_1 + L \vec{j}_{2/1}$$

Le repère d'observation est R_1 ,
le premier* repère de dérivation qui apparaît est R_1 ,
il n'y a pas vraiment de repère d'écriture : R_1 et R_2 sont utilisés !
* Dans les calculs, on a sûrement utilisé la relation

$$\frac{d^{(1)} \vec{O_1P}}{dt} = \frac{d^{(2)} \vec{O_1P}}{dt} + \vec{\Phi}_{2/1} \otimes \vec{O_1P}$$

Et là apparaissent 2 repères de dérivation !

<https://www.youtube.com/watch?v=J351RmKw7wc>

Dérivation vectorielle :

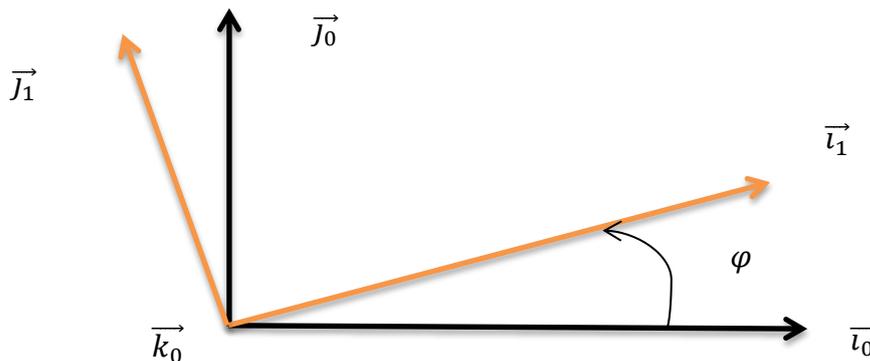
Exercice 1

Soient $R_0 = (O_0, \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$ et $R_1 = (O_1, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1 = \vec{k}_0)$ mobile dans R_0

$$\vec{\Phi}_{1/0} = \frac{d}{dt} \vec{k}_0 \text{ ou } \frac{d}{dt} \vec{k}_0$$

Calculer $\frac{d^{(0)} \vec{i}_1}{dt}$ et $\frac{d^{(0)} \vec{j}_1}{dt}$

On trouve :



Représentation plane des repères directs avec l'axe de rotation commun aux deux repères \vec{k}_0 perpendiculaire au plan, l'angle φ algébrique est représenté positif compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ pour éviter les erreurs de signe lors des projections.

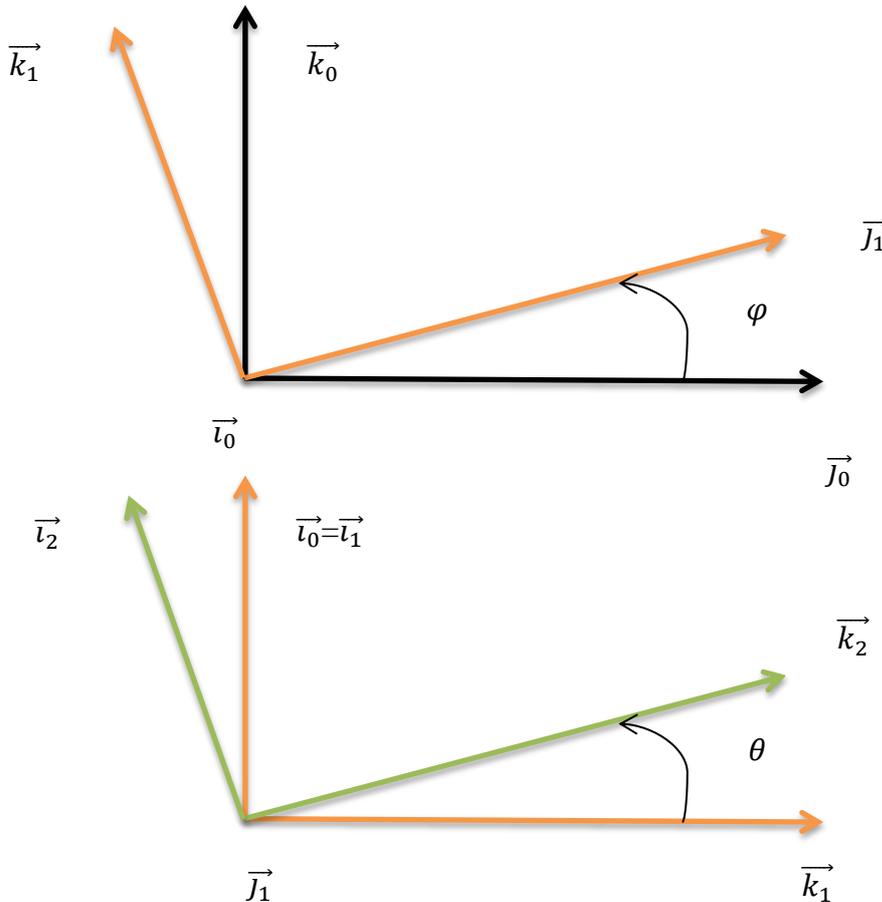
$$\frac{d^{(0)}\vec{l}_1}{dt} = \dot{\varphi} \cdot \vec{j}_1 \text{ et } \frac{d^{(0)}\vec{j}_1}{dt} = -\dot{\varphi} \cdot \vec{l}_1$$

Remarquer que « dériver par rapport au temps » consiste à faire pivoter le vecteur de $+\pi/2$ autour de l'axe portant le vecteur vitesse de rotation \vec{k}_0 et de multiplier par la valeur algébrique de la vitesse de rotation $\dot{\varphi}$.

Exercice 2

Soient $R_0 = (O_0, \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$ et $R_1 = (O_1, \vec{i}_1 = \vec{i}_0, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$, $R_2 = (O_2, \vec{i}_2, \vec{j}_2 = \vec{j}_1, \vec{k}_2)$, mobiles dans R_0
 $\vec{\Phi}_{1/0} = \vec{\Phi}_{2/1}$
 Calculer $\frac{d^{(0)}\vec{j}_1}{dt}$, $\frac{d^{(0)}\vec{k}_1}{dt}$, $\frac{d^{(0)}\vec{k}_2}{dt}$, $\frac{d^{(0)}\vec{l}_2}{dt}$

Solution :



$$\frac{d^{(0)}\vec{J}_1}{dt} = \dot{\varphi} \cdot \vec{k}_1, \quad \frac{d^{(0)}\vec{k}_1}{dt} = -\dot{\varphi} \cdot \vec{J}_1$$

Pour calculer $\frac{d^{(0)}\vec{k}_2}{dt}$, deux possibilités :

$$\frac{d^{(0)}\vec{k}_2}{dt} = \frac{d^{(2)}\vec{k}_2}{dt} + \vec{\Omega}_{2/0} \wedge \vec{k}_2; \quad \frac{d^{(2)}\vec{k}_2}{dt} = \vec{0}; \quad \vec{\Omega}_{2/0} = \vec{\Omega}_{2/1} + \vec{\Omega}_{1/0}$$

$$\text{Ou mieux } \frac{d^{(0)}\vec{k}_2}{dt} = \frac{d^{(1)}\vec{k}_2}{dt} + \vec{\Omega}_{1/0} \wedge \vec{k}_2; \quad \frac{d^{(1)}\vec{k}_2}{dt} = \dot{\theta} \cdot \vec{i}_2; \quad \dot{\varphi} \cdot \vec{i}_0 \wedge \vec{k}_2 = -\dot{\varphi} \cdot \cos\theta \cdot \vec{J}_1$$

$$\text{De même } \frac{d^{(0)}\vec{i}_2}{dt} = -\dot{\theta} \cdot \vec{k}_2 + \dot{\varphi} \cdot \sin\theta \cdot \vec{J}_1$$

Pour s'entraîner :

Soit le repère fixe $R_0 (O, \vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Z}_0)$ et les repères mobiles

$$R_1 (O, \vec{X}_1, \vec{Y}_1 = \vec{Y}_0, \vec{Z}_1) \quad R_2 (O, \vec{X}_2, \vec{Y}_2, \vec{Z}_2 = \vec{Z}_1)$$

$$\text{Avec } \vec{\Omega}_{R_1/R_0} = \dot{\theta} \cdot \vec{Y}_0 \quad \text{et} \quad \vec{\Omega}_{R_2/R_1} = \dot{\varphi} \cdot \vec{Z}_1$$

Calculer :

$$\frac{d^{(0)}\vec{X}_1}{dt}, \quad \frac{d^{(0)}\vec{Z}_1}{dt}, \quad \frac{d^{(0)}\vec{X}_2}{dt}, \quad \frac{d^{(0)}\vec{Y}_2}{dt}$$

NB : pour le CCI, c'est exercice doit être fait en moins de 6 minutes sans erreur

Résumé dérivation vectorielle : <https://www.youtube.com/watch?v=O7b-J7rvyAE>

Semaine 2

Rappel sur les torseurs

Un torseur est un champ vectoriel équiprojectif :

$$\vec{M}_A \llcorner \vec{AB} = \vec{M}_B \llcorner \vec{AB}$$

Relation très utilisée en particulier en cinématique du solide... Voir un peu plus loin.

Il est défini par sa résultante \vec{R} et son moment en un point A : \vec{M}_A

Notation :

$$[T]_A = \left[\vec{R} \mid \vec{M}_A \right]_A \quad \text{ou} \quad \left\{ \vec{R} \mid \vec{M}_A \right\}_A \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{R} \\ \vec{M}_A \end{array} \right\}_A \dots$$

Propriété :

$$\vec{M}_A = \vec{M}_B + \vec{R} \llcorner \vec{BA} \quad \text{ou} \quad \vec{M}_A = \vec{M}_B + \vec{AB} \llcorner \vec{R}$$

Définitions :

- Glisseur : un torseur est un glisseur si et seulement si il existe un point K tel que

$$\vec{M}_K = \vec{0}$$

L'ensemble des points K est une droite appelée « axe du glisseur ».

- Couple : un torseur est un couple si sa résultante est nulle. Un couple est donc un champ vectoriel constant.

Propriété :

On démontre que tout torseur peut s'écrire comme la somme d'un couple et d'un glisseur (la somme de deux torseurs ne peut se faire que s'ils sont exprimés en un même point).

Cinématique du solide

Le champ cinématique des vitesses est un torseur : le torseur cinématique.

$$\overrightarrow{v(A)}_{S/0} \stackrel{\text{GA}}{\sim} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{v(B)}_{S/0} \stackrel{\text{GA}}{\sim} \overrightarrow{AB}$$

Il est défini par sa résultante cinématique $\overrightarrow{\Phi}_{S/0}$ –vecteur vitesse de rotation du solide dans son mouvement par rapport au repère R_0

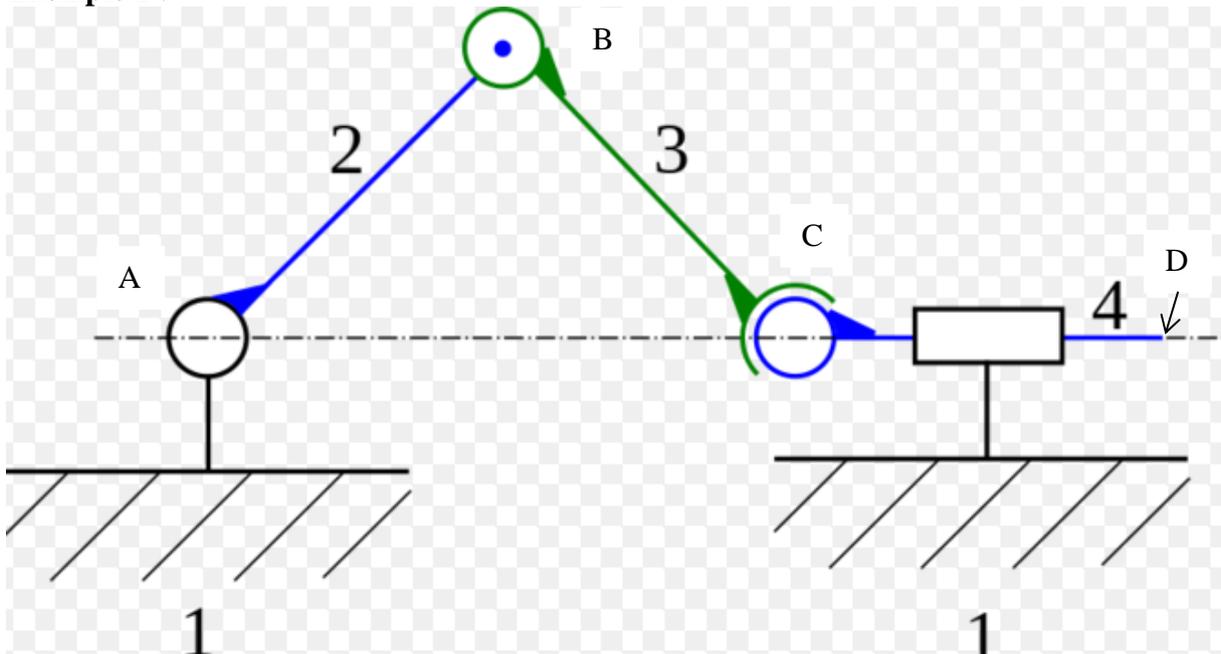
et par son moment cinématique en un point A $\overrightarrow{v(A)}_{S/0}$ –vecteur vitesse du point A du solide dans son mouvement par rapport au repère R_0 :

$$[V_{S/0}]_A = \left[\overrightarrow{\Phi}_{S/0} \mid \overrightarrow{v(A)}_{S/0} \right]_A$$

Ainsi quand on connaît la vitesse d'un point appartenant à un solide, on peut en déduire la vitesse de n'importe quel point de ce solide !

Calcul de vitesses :

Exemple 1 :



Calculez $\overrightarrow{v_{D \in 4/1}}$ en fonction de la vitesse de rotation de 2/1. On prendra $AB=BC$

Exemple 2 : robot ABB IRB 140

Mouvement du robot

Type de mouvement	Portée du mouvement	
Axe 1 Mouvement de rotation	+180°	- -180°
Axe 2 Mouvement de bras	+110°	- -90°
Axe 3 Mouvement de bras	+50°	- -230°
Axe 4 Mouvement de poignet	+200°	- -200°
Axe 5 Mouvement de flexion	+120°	- -120°
Axe 6 Mouvement de pivot	+400°	- -400°

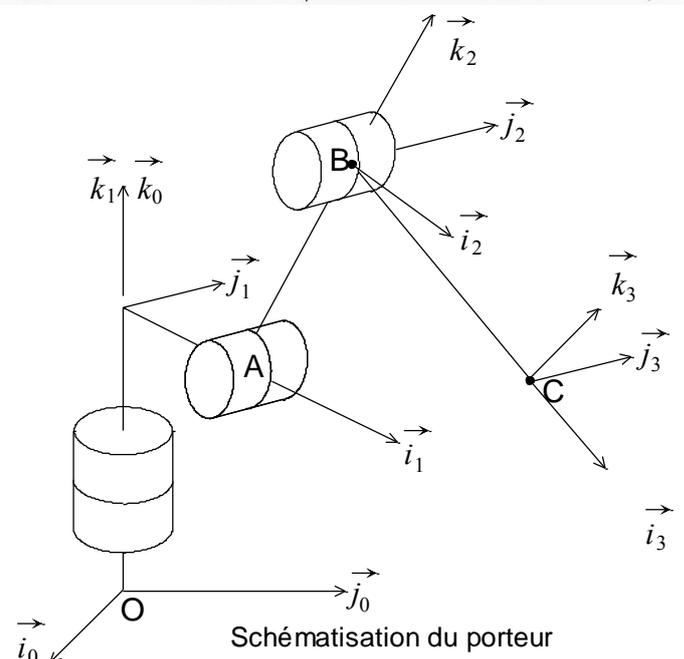
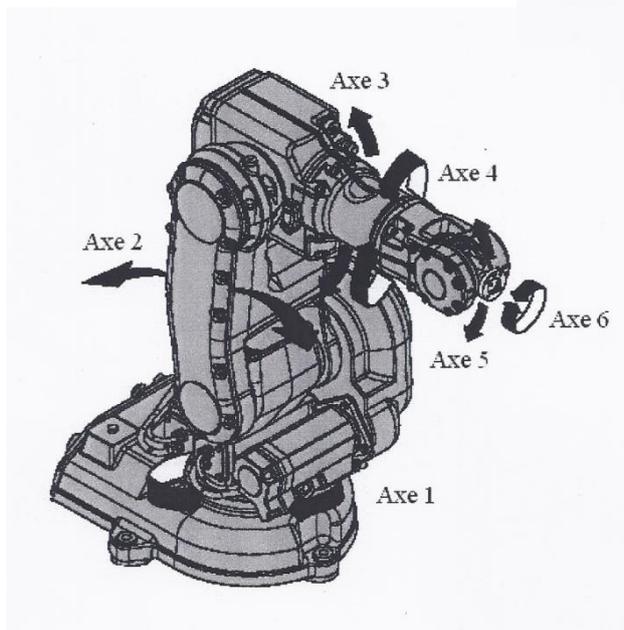
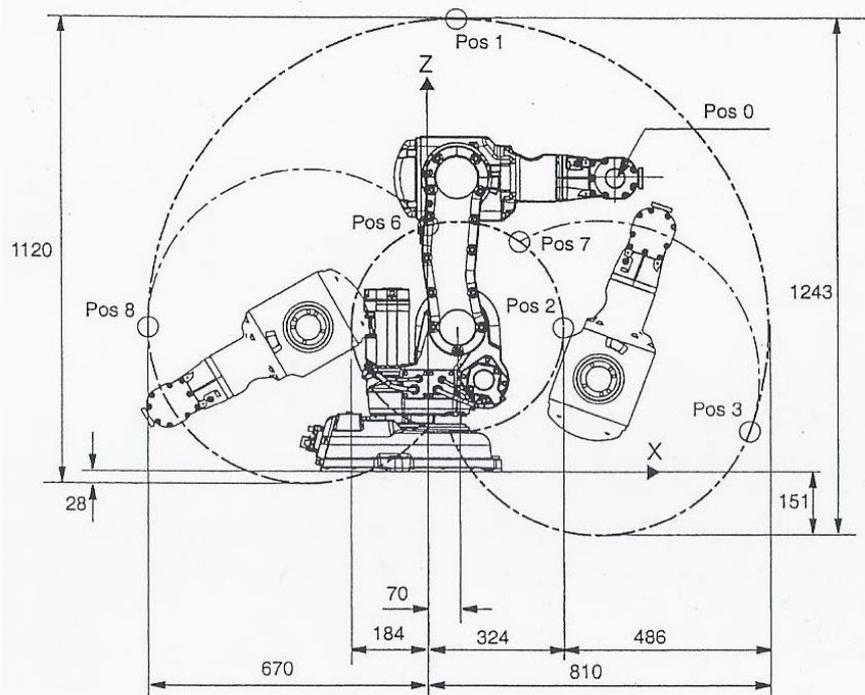
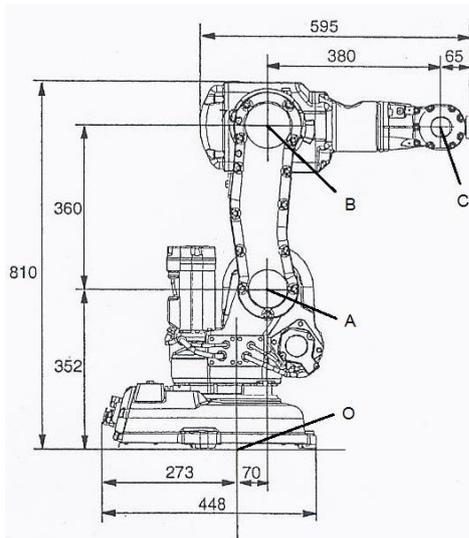
Positions au centre du poignet (mm)

pos.	x	z
0	450	712
1	70	1092
2	314	421
3	765	99
6	1	596
7	218	558
8	-670	352

Angle (degrés)

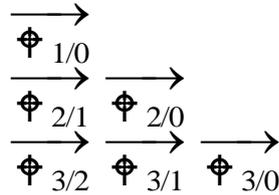
pos.	axe 2	axe 3
0	0	0
1	0	-90
2	0	+50
3	110	-90
6	-90	+50
7	110	-230
8	-90	-90

Les positions extrêmes du bras du robot.

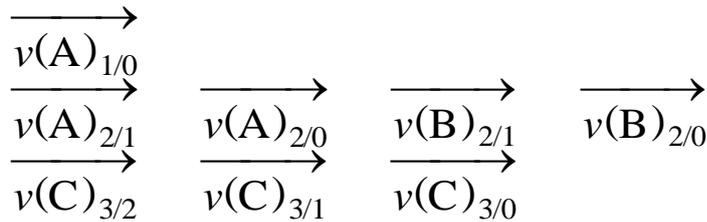


La schématisation du « porteur » (les 3 premiers axes) de ce robot fait apparaître les repères liés à ses « segments » (ou « bras », ou « solides ») de ce robot. Les 3 rotations successives seront notées α, β, γ avec évidemment $\alpha = \alpha(t), \beta = \beta(t), \gamma = \gamma(t)$.

1 : Déterminer les vecteurs vitesses de rotation



2 : Déterminer les vecteurs vitesses

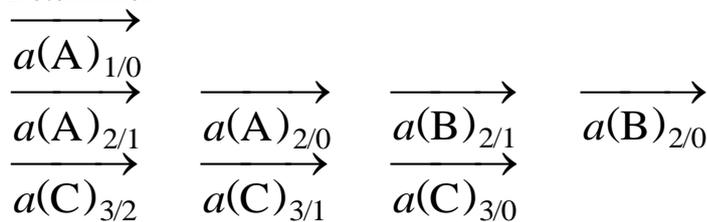


3 : Enfin, en supposant que, dans la phase de mouvement qui nous intéresse (et qui sera de durée limitée), les vitesses de rotations aient des mesures algébriques constantes

$$\vec{\omega}_{1/0} = \frac{d\alpha}{dt} = \mathfrak{H}_{1/0} \text{ (cste)} \quad \vec{\omega}_{2/1} = \frac{d\beta}{dt} = \mathfrak{H}_{2/1} \text{ (cste)}$$

$$\vec{\omega}_{3/2} = \frac{d\gamma}{dt} = \mathfrak{H}_{3/2} \text{ (cste)}$$

Déterminer



Astuce pour se faciliter le calcul de la vitesse d'un point P dans un système de solide :

Cas 1 : le point P appartient « naturellement » au solide 2 : $\vec{v}_{P \in 2/0} = \frac{d\vec{O_0P}}{dt} \Big|_{R_0}$

Cas 2 : le point P n'appartient pas « naturellement » au solide 2 : on passe par un point A qui lui appartient à 2 et on utilise le transport du torseur cinématique (BABAR)

$$\vec{v}_{P \in 2/0} = \vec{v}_{A \in 2/0} + \vec{PA} \wedge \vec{\Omega}_{2/0}$$

Réponse :

En notant $\vec{OA} = a \vec{i}_1 + d \vec{k}_0, \vec{AB} = b \vec{k}_2, \vec{BC} = c \vec{i}_3$

$$\vec{v}(A)_{1/0} = a \dot{\alpha} \vec{j}_1,$$

$$\vec{v}(B)_{2/0} = a \dot{\alpha} \vec{j}_1 + b(\dot{\beta} \vec{i}_2 + \dot{\alpha} \sin(\beta) \vec{j}_1)$$

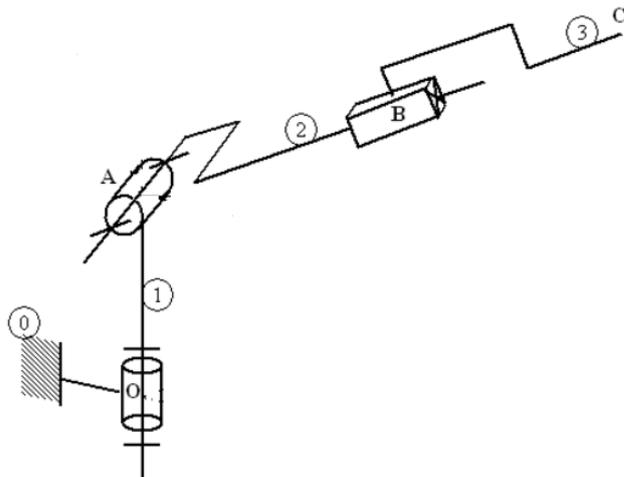
$$\vec{v}(C)_{3/0} = a \dot{\alpha} \vec{j}_1 + b(\dot{\beta} \vec{i}_2 + \dot{\alpha} \sin(\beta) \vec{j}_1) + c(-(\dot{\gamma} + \dot{\beta}) \vec{k}_3 + \dot{\alpha} \cos(\beta + \gamma) \vec{i}_1),$$

$$\vec{a}(A)_{1/0} = -a \dot{\alpha}^2 \vec{i}_1,$$

$$\vec{a}(B)_{2/0} = -a \dot{\alpha}^2 \vec{i}_1 + b(-\dot{\beta}^2 \vec{k}_2 + 2\dot{\alpha} \dot{\beta} \cos(\beta) \vec{j}_1 - \dot{\alpha}^2 \sin(\beta) \vec{i}_1),$$

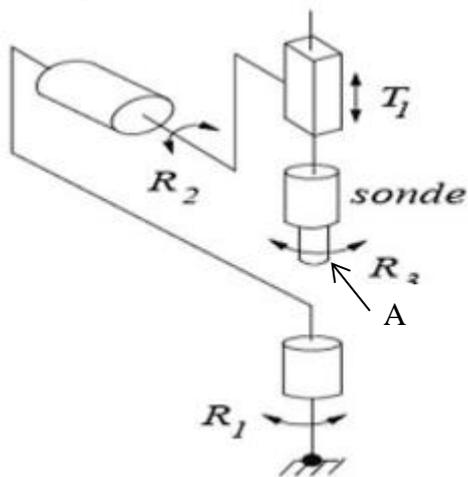
$$\vec{a}(C)_{3/0} = -a \dot{\alpha}^2 \vec{i}_1 + b(-\dot{\beta}^2 \vec{k}_2 + 2\dot{\alpha} \dot{\beta} \cos(\beta) \vec{j}_1 - \dot{\alpha}^2 \sin(\beta) \vec{i}_1) + c(-(\dot{\gamma} + \dot{\beta})^2 \vec{i}_3 - 2\dot{\alpha}(\dot{\gamma} + \dot{\beta}) \sin(\beta + \gamma) \vec{j}_1 - \dot{\alpha}^2 \cos(\beta + \gamma) \vec{i}_1)$$

Exemple 3 :



Calculez : $\vec{v}(A)_{1/0}$, $\vec{v}(A)_{2/1}$, $\vec{v}(A)_{2/0}$, $\vec{v}(B)_{2/1}$, $\vec{v}(B)_{2/0}$
 $\vec{v}(C)_{3/2}$, $\vec{v}(C)_{3/1}$, $\vec{v}(C)_{3/0}$
 $\vec{a}(A)_{1/0}$, $\vec{a}(A)_{2/1}$, $\vec{a}(A)_{2/0}$, $\vec{a}(B)_{2/1}$, $\vec{a}(B)_{2/0}$
 $\vec{a}(C)_{3/2}$, $\vec{a}(C)_{3/1}$, $\vec{a}(C)_{3/0}$

Exemple 4 :



Vitesse absolue de A (A est décalé de $r=cte$ par rapport à l'axe de rotation de la sonde).

Semaine 3

Roulement sans glissement

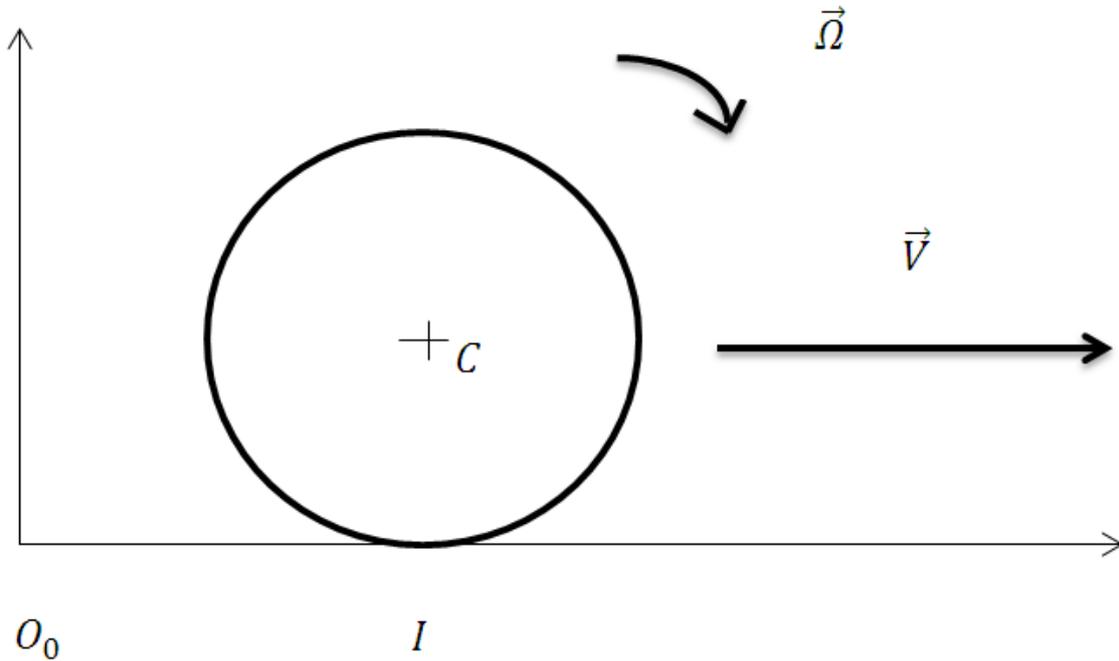
Soit I le point de contact entre S1 et S2. On définit la vitesse de glissement de S1 par rapport à S2 : (R_0 est un repère quelconque)

$$\vec{v}(I)_{gl} = \vec{v}(I)_{1/0} - \vec{v}(I)_{2/0}$$

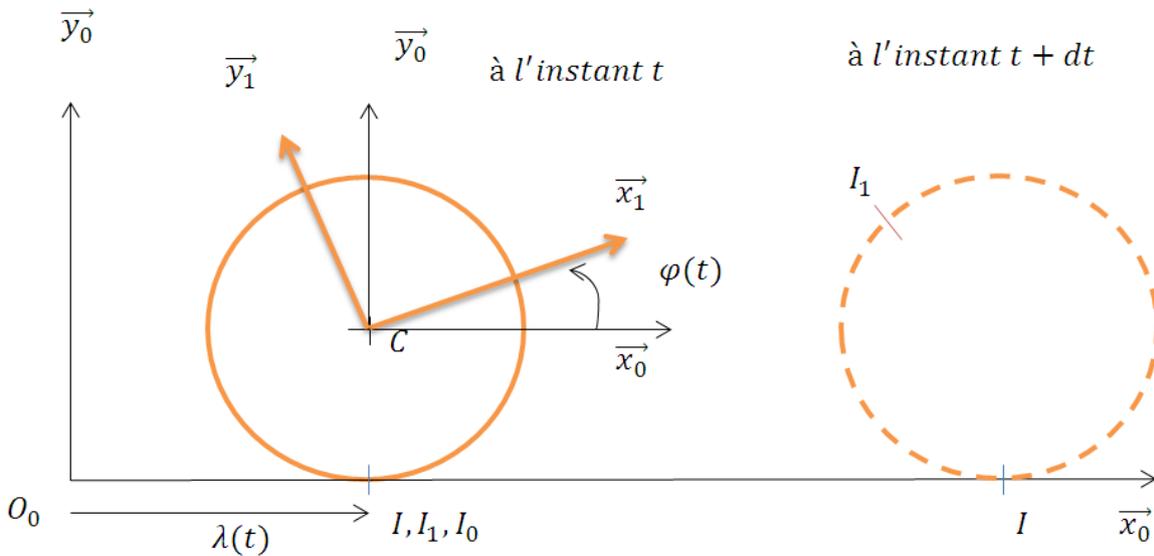
$$\vec{v}(I)_{1/0} = \vec{v}(I)_{1/2} + \vec{v}(I)_{2/0}$$

Il y a roulement sans glissement si $\vec{v}(I)_{gl} = \vec{0}$

Exemple : une roue (1) de rayon R roule sans glisser sur le sol (0). Quelle est la relation entre la vitesse d'avance et la vitesse de rotation de la roue ?



Réponse : on met en place un repère par sous ensemble cinématique, puis le paramétrage permettant de passer d'un repère à un autre.



$R_0 (O_0; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{k}_0)$ fixe, $R'_0 (C; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{k}_0)$ lié à l'axe de la roue, $R_1 (C; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{k}_0)$ lié à la roue

Avec $\lambda(t)$ algébrique et dessiné positif, $\varphi(t)$ algébrique représenté positif compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.

Les points I : I est le point géométrique de contact entre la roue et le sol, I_1 est le point de la roue (1) en I à l'instant t, I_0 est le point de la route en I à l'instant t. Les points I, I_1, I_0 coïncident à l'instant t

A l'instant t+dt, I est toujours le point de contact entre la roue et le sol, I_1 s'est déplacé sur la roue et I_0 n'a pas bougé.

La vitesse de glissement est $\overrightarrow{v_{I_1/0}}$

$$\overrightarrow{v_{I_1/0}} = \overrightarrow{v_{CE1/0}} + \overrightarrow{I_1C} \wedge \overrightarrow{\Omega_{1/0}} = \lambda \overrightarrow{x_0} + R\dot{\varphi} \overrightarrow{x_0}$$

La relation de roulement sans glissement est : $\dot{\lambda} + R\dot{\varphi} = 0$

Mouvement plan sur plan

Un solide S est animé d'un mouvement plan sur plan si un plan P1 lié à S glisse sur un plan fixe P. A tout instant, P et P1 restent donc parallèles.

On appelle CIR (centre instantané de rotation) le point géométrique I appartenant à S qui, à l'instant t, possède une vitesse nulle par rapport à R_0 :

$$\overrightarrow{v(I)_{S0}} \Big|_t = \vec{0}$$

Suite de l'exemple précédent : une roue (1) de rayon R roule en glissant sur le sol (0) : $2\dot{\lambda} + R\dot{\varphi} = 0$

Où se trouve le CIR de ce mouvement plan sur plan ?

Solution :

on appelle K le CIR. On pose $\overrightarrow{O_0K} = a\overrightarrow{x_0} + b\overrightarrow{y_0}$

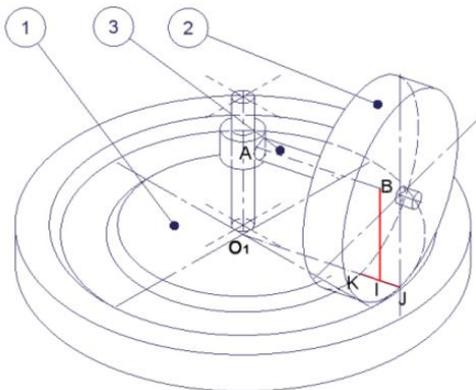
$$\overrightarrow{v_{KE1/0}} = \overrightarrow{v_{CE1/0}} + \overrightarrow{KC} \wedge \overrightarrow{\Omega_{1/0}} = \lambda \overrightarrow{x_0} + ((\lambda - a)\overrightarrow{x_0} + (R - b)\overrightarrow{y_0}) \wedge \dot{\varphi} \overrightarrow{k_0} ;$$

$$\overrightarrow{v_{KE1/0}} = (\lambda + (R - b)\dot{\varphi})\overrightarrow{x_0} - (\lambda - a)\dot{\varphi}\overrightarrow{y_0} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{v_{KE1/0}} = \left(\frac{R}{2} - b\right)\dot{\varphi}\overrightarrow{x_0} - (\lambda - a)\dot{\varphi}\overrightarrow{y_0} = \vec{0}$$

Donc $a=\lambda$ et $b=\frac{R}{2}$

Exercice d'entraînement : meule à huile



(1) est fixe, (3) est en liaison pivot avec (1), (2) est en liaison pivot avec (3), (2) est en liaison linéaire rectiligne avec (1). Ecrire la relation de roulement sans glissement en I de la meule sur la pierre.

Cône roulant sur un plan :

Soit (S) un cône de révolution de hauteur h, de rayon de base R, centre de base C, sommet B. (S) est en contact en I avec le sol (plan horizontal, R_0), O point fixe du sol, B reste à la

verticale de O, $OB = z(t)$. (S) tourne autour de (BC) et roule sans glisser sur le sol. Donner cette relation de roulement sans glissement.

Aide :

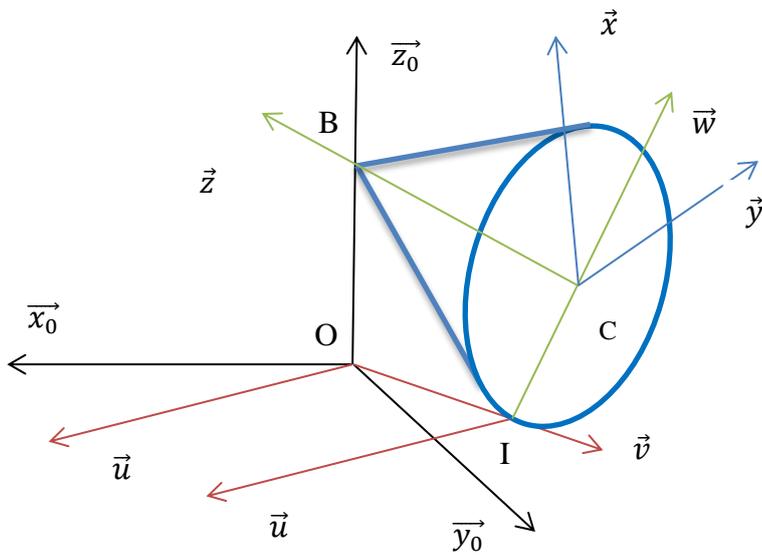
Paramétrer le système à l'aide de 3 angles

Exprimer $z(t)$ et $OI(t)$ en fonction de R et h et d'un paramètre angulaire

Calculer $\overrightarrow{V_{C \in S / R_0}}$

Calculer $\overrightarrow{V_{I \in S / R_0}}$

En déduire la relation de roulement sans glissement en I.



Semaine 4

Révisions, questions, CC1