Plan

Livre 1

Calcul vectoriel

Rappels de cinématique

CC1 **Mardi 12/11/2024 H5**

Livres 2

PFD point matériel

PFD systèmes de points matériels

CC2 **Jeudi 21/11/2024 H2**

Livres 3

PFD systèmes de solides

Géométrie des masses, théorème de Huygens

Cinétique

Torseur dynamique

Equations issues du PFD

CC3 **Jeudi 19/12/2024 H2**

Compétences visées

Compétences techniques :

Partie 1
Paramétrer un système jusqu'à 3 ddl
Maîtriser la dérivation vectorielle pour calculer des vitesses et des accélérations
Maîtriser les propriétés des torseurs appliquées au champ de vitesse d'un solide
Connaître les notions de roulement sans glissement et de CIR

Partie 2 et 3
Connaître l'énoncé du PFD (points matériels et solides)
Maîtriser les propriétés des intégrales triples appliquées au cdm et aux matrices d'inertie

Compétence technique finale :

Exploiter le PFD pour obtenir des équations de mouvement et/ou des efforts de liaison

Déroulement du cours : le cours est découpé en trois parties.
Chaque partie commence par les points importants du cours, suivi d'un exercice type corrigé. Les séances seront en autonomie. L'enseignant sera disponible pour répondre aux questions, reprendre des points de cours…

Livre 1 : calcul vectoriel

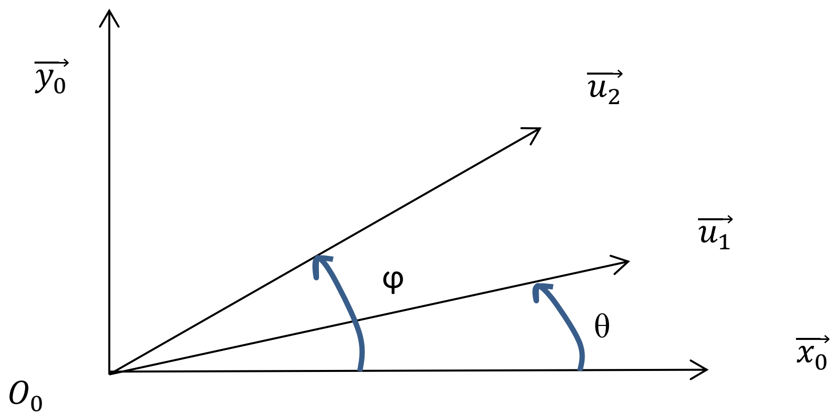
A : produit scalaire :

On définit un repère $R_0(O_0, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ orthonormé direct.
Par définition : $\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2} = \|\overrightarrow{u_1}\|.\|\overrightarrow{u_2}\|.cos\left(\widehat{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}}\right)$

$\overrightarrow{u_1}\left|\begin{matrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{matrix}\right._{R_0}$; $\overrightarrow{u_2}\left|\begin{matrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{matrix}\right._{R_0}$; $\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2} = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2$

Propriétés :
Le produit scalaire est commutatif : $\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2} = \overrightarrow{u_2}.\overrightarrow{u_1}$
Le résultat est un scalaire

Exemple :
$\|\overrightarrow{u_1}\| = \|\overrightarrow{u_2}\| = 1$, $\overrightarrow{u_1}\left|\begin{matrix} a_1 \\ b_1 \\ 0 \end{matrix}\right._{R_0}$; $\overrightarrow{u_2}\left|\begin{matrix} a_2 \\ b_2 \\ 0 \end{matrix}\right._{R_0}$



Calculer $\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{x_0}$. En déduire la valeur de a_1.
Calculer $\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{y_0}$. En déduire la valeur de b_1.
Calculer $\overrightarrow{u_2}.\overrightarrow{x_0}$. En déduire la valeur de a_2.
Calculer $\overrightarrow{u_2}.\overrightarrow{y_0}$. En déduire la valeur de b_2.
Calculer $\overrightarrow{u_2}.\overrightarrow{u_1}$
Exprimer $\overrightarrow{u_2}$ dans R_0 en fonction de φ

Réponses :

$$a_1 = cos\theta, b_1 = sin\theta, a_2 = cos\phi, b_2 = sin\phi, \overrightarrow{u_2}.\overrightarrow{u_1} = \cos(\theta - \phi), \overrightarrow{u_2}\left|\begin{matrix} cos\phi \\ sin\phi \\ 0 \end{matrix}\right._{R_0}$$

B : produit vectoriel :

On définit un repère $R_0(O_0, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ orthonormé direct.

Soit $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \vec{k}$ tel que $\vec{k}$ perpendiculaire à $\overrightarrow{u_1}$ *et* $\overrightarrow{u_2}$

Par définition : $\overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_2} = \|\overrightarrow{u_1}\|.\|\overrightarrow{u_2}\|.sin(\widehat{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}}).\vec{k}$

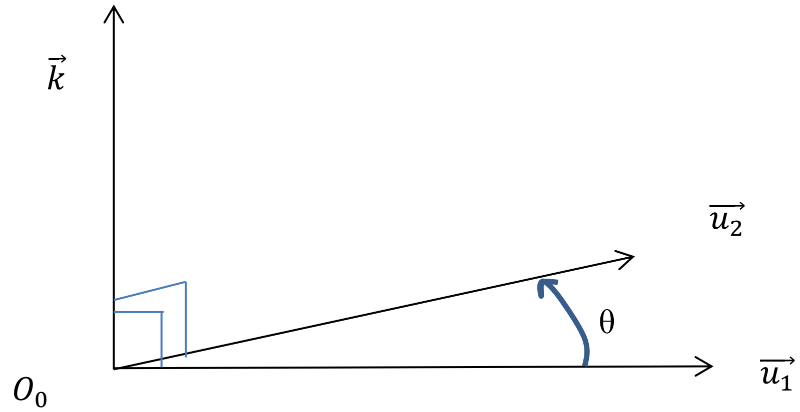
NB : $(\widehat{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}})$ *angle orienté entre* $\overrightarrow{u_1}$ *et* $\overrightarrow{u_2}$, $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \vec{k})$ *trièdre direct*

$$\overrightarrow{u_1}\left|\begin{matrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{matrix}\right._{R_0} ; \overrightarrow{u_2}\left|\begin{matrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{matrix}\right._{R_0} ; \overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_2} = \left|\begin{matrix} b_1.c_2 - b_2.c_1 \\ c_1.a_2 - a_1.c_2 \\ a_1.b_2 - a_2.b_1 \end{matrix}\right._{R_0}$$

Propriétés :

Le produit vectoriel n'est pas commutatif : $\overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_2} = -\overrightarrow{u_2} \wedge \overrightarrow{u_1}$

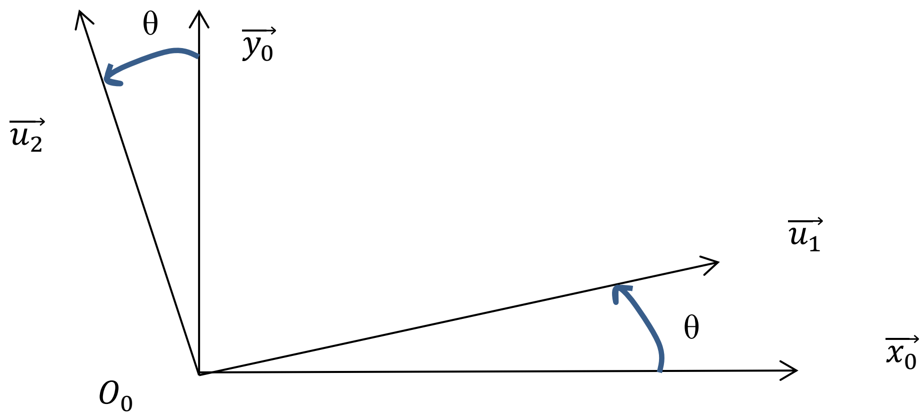
Le résultat est un vecteur



Exemple :

On définit un repère $R_0(O_0, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ orthonormé direct.

$$\|\overrightarrow{u_1}\| = \|\overrightarrow{u_2}\| = 1, \overrightarrow{u_1}\left|\begin{matrix} a_1 \\ b_1 \\ 0 \end{matrix}\right._{R_0} ; \overrightarrow{u_2}\left|\begin{matrix} a_2 \\ b_2 \\ 0 \end{matrix}\right._{R_0}$$



Donner les valeurs de a_1, b_1, a_2, b_2 en fonction de θ.

Calculer $\overrightarrow{u_2}.\overrightarrow{u_1}$, conclure.

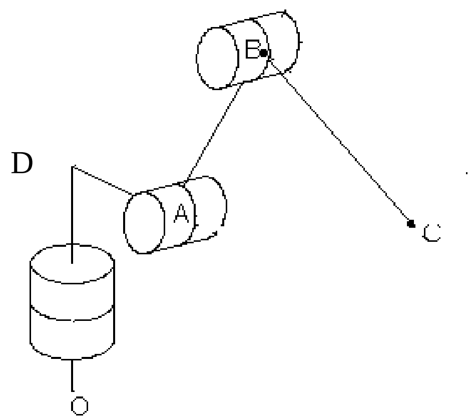
Donner (sans calcul) $\overrightarrow{x_0} \wedge \overrightarrow{y_0}$, $\overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{z_0}$, $\overrightarrow{x_0} \wedge \overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{y_0} \wedge \overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{x_0} \wedge \overrightarrow{u_2}$, $\overrightarrow{u_2} \wedge \overrightarrow{u_1}$.

Réponses :
$a_1 = cos\theta, b_1 = sin\theta, a_2 = -sin\theta, b_2 = cos\theta,$
$\overrightarrow{u_2}.\overrightarrow{u_1} = a_1.a_2 + b_1.b_2 = 0$: les deux vecteurs sont orthogonaux (on le savait déjà).
$\overrightarrow{x_0}\wedge\overrightarrow{y_0} = \overrightarrow{z_0}$, $\overrightarrow{u_1}\wedge\overrightarrow{z_0} = -\overrightarrow{u_2}$, $\overrightarrow{x_0}\wedge\overrightarrow{u_1} = sin\theta.\overrightarrow{z_0}$, $\overrightarrow{y_0}\wedge\overrightarrow{u_1} = -cos\theta.\overrightarrow{z_0}$,
$\overrightarrow{x_0}\wedge\overrightarrow{u_2} = cos\theta.\overrightarrow{z_0}$, $\overrightarrow{u_2}\wedge\overrightarrow{u_1} = -\overrightarrow{z_0}$

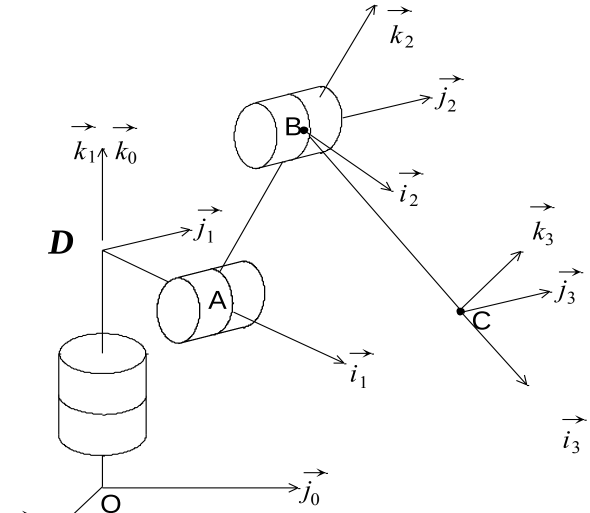
Rappels de cinématique

Première étape : paramétrage du système
Cette étape permet de définir la position d'un système dans l'espace à l'aide de paramètres indépendants.
1 : on définit un repère galiléen (repère fixe, le sol en général pour nos études)
2 : on définit un repère par sous ensemble cinématique du système (coloriage recommandé)
3 : on met en place les paramètres (de translation et de rotation) qui permettent de passer d'un repère à l'autre
4 : on vérifie que les paramètres sont indépendants

Exemple 1 : robot porteur RRR (3 liaisons pivot)

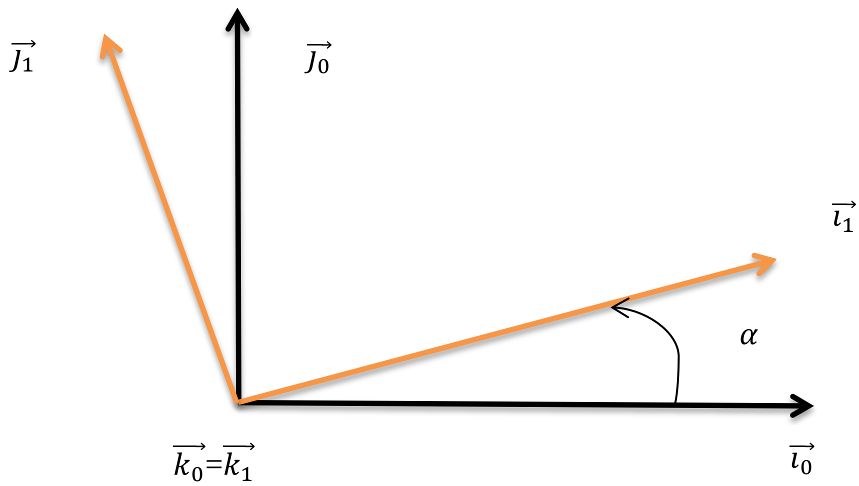


Solution : on colorie chaque sous ensemble plus le bâti (4 couleurs)
Donc 4 repères. On s'arrange pour qu'il y ait toujours au moins 1 axe commun entre 2 repères.
Résultat :

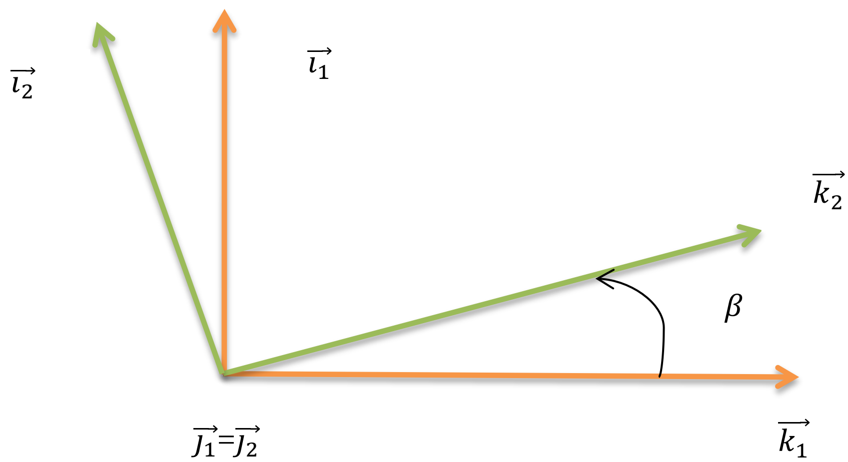


Schématisation du porteur

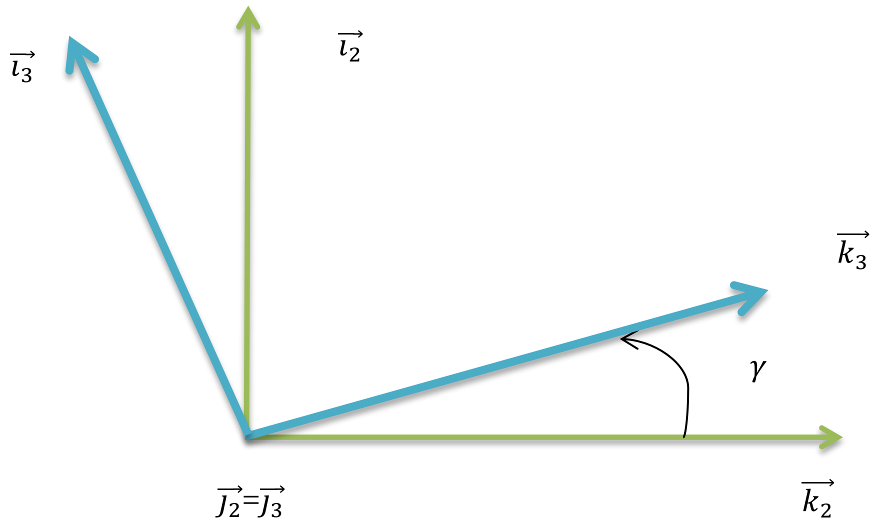
Mise en place des paramètres sur un schéma plan, repères directs, angles dessinés positifs.
Remarque : l'origine des repères est omise ; nous souhaitons juste les paramètres de rotation.



$$\overrightarrow{OD} = a.\overrightarrow{k_0} \; avec \; a \; constant$$

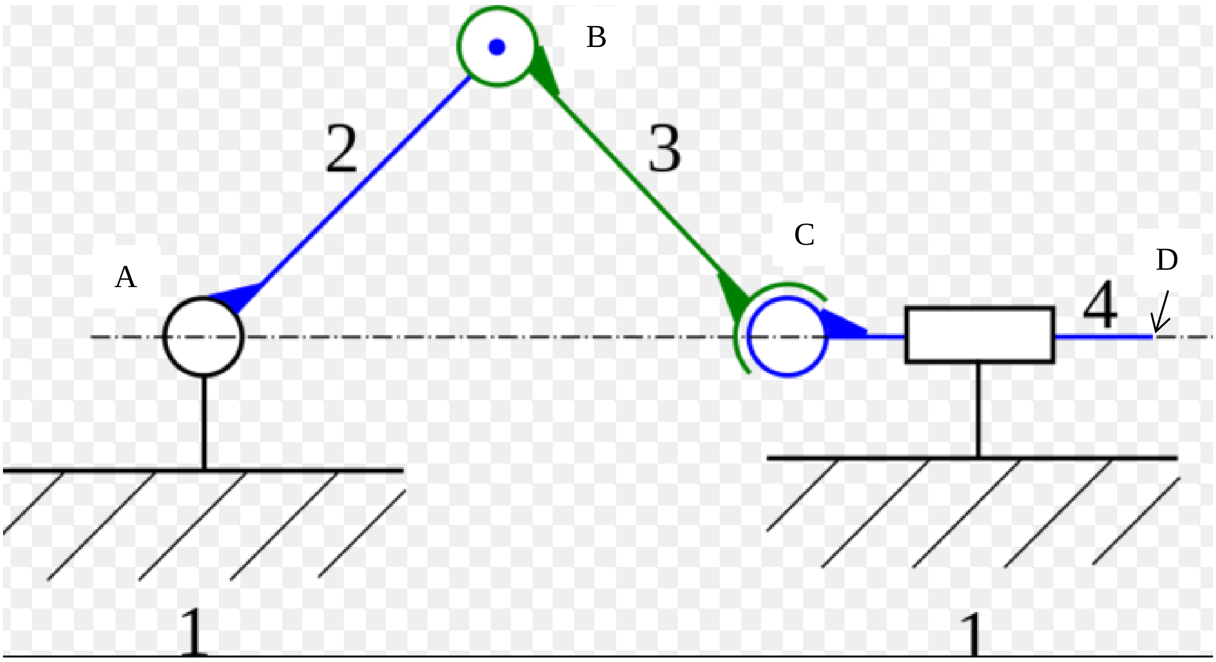


$$\overrightarrow{DA} = b.\overrightarrow{\imath_1}\ avec\ b\ constant$$



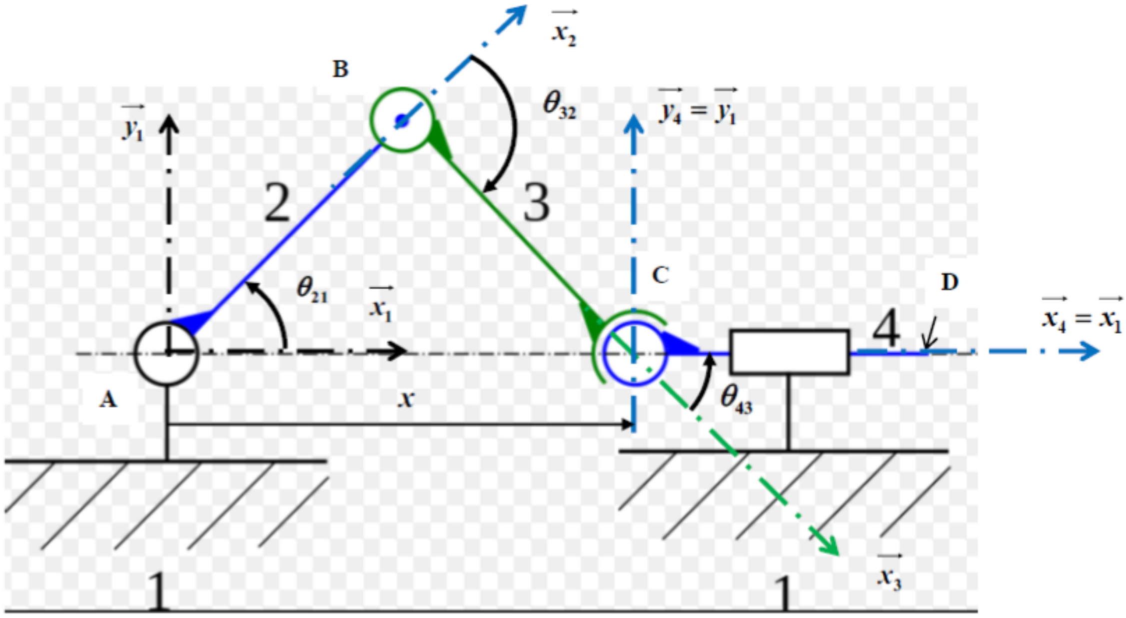
$\overrightarrow{AB} = c.\overrightarrow{k_2}\ avec\ c\ constant, \overrightarrow{BC} = d.\overrightarrow{\imath_3}\ avec\ d\ constant$, α, β, γ indépendants.

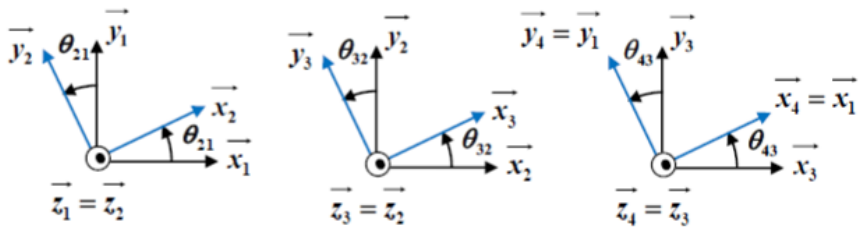
Exemple 2 : système bielle manivelle



Solution :
On trouve 4 repères, 4 paramètres (3 rotations, 1 translation) mais qu'un seul paramètre indépendant (trouvez le lien entre eux !). On posera AB = R et BC = L

Exemple 2 : système bielle manivelle





$R_1 = (A, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})$ *repère lié à 1*

$R_2 = (A, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2})$ *repère lié à 2*

$R_3 = (C, \overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{y_3}, \overrightarrow{z_3})$ *repère lié à 3*

$R_4 = (C, \overrightarrow{x_4}, \overrightarrow{y_4}, \overrightarrow{z_4}) = (C, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})$ *repère lié à 4*

Réponse :

$$\cos\theta_{21} = \frac{R^2 - L^2 + x^2}{2\,L\,x}$$

$$Si\;\; R = L \;\; alors \;\; \cos\theta_{21} = \frac{x^2}{2\,L\,x} = \frac{x}{2\,L} \quad soit \quad x = 2\,L\,\cos\theta_{21}$$

Retour au cas général :

On peut définir ainsi le vecteur position de n'importe quel point du système.

Vecteur vitesse : dérivation du vecteur position par rapport au temps dans un repère de référence (repère de dérivation).

Pour définir complètement le vecteur vitesse d'un point, il faut :
… un point P
… qui appartient à un solide S, ou qui est fixe dans un repère R_S
… solide ou repère mobile dans un repère R_0 dans lequel O_0 est un point fixe (pas forcément l'origine)

$$\overrightarrow{v(P)}_{S/0} = \frac{d^{(0)}\overrightarrow{O_0P}}{dt} \quad \text{ou} \quad \left.\frac{d\overrightarrow{O_0P}}{dt}\right|_{R_0}$$

Il est essentiel de faire apparaître le repère de dérivation !

Vecteur accélération : dérivation du vecteur vitesse par rapport au temps dans un repère de référence (repère de dérivation).

Formule du changement de repère de dérivation (ou formule de dérivation composée)

$$\boxed{\frac{d^{(0)}\vec{U}}{dt} = \frac{d^{(1)}\vec{U}}{dt} + \vec{\Omega}_{1/0} \wedge \vec{U}}$$

NB : ne pas confondre …

- **repère d'observation** (l'observateur est lié à ce repère, et il décrit le mouvement)
- **repère de dérivation** (notion utile pour le traitement mathématique des calculs)
- **repère d'écriture** (dans lequel on exprime les résultats). Il est rarement nécessaire d'écrire ces résultats dans un repère particulier ! Et encore moins souvent utile de les écrire dans R_0, même lorsqu'il s'agit de calculer la vitesse d'un point, dans son mouvement par rapport à R_0.

Exemple : l'écriture suivante est tout à fait possible

$$\overrightarrow{v(P)}_{2/1} = \frac{d^{(1)}\overrightarrow{O_1P}}{dt} = \dot{x}\,\vec{i}_1 + r\,\dot{\theta}\,\vec{j}_1 + L\,\omega_{2/1}\,\vec{j}_2$$

Le repère d'observation est R_1,
le premier repère de dérivation qui apparaît est R_1,
il n'y a pas vraiment de repère d'écriture : R_1 et R_2 sont utilisés !

https://www.youtube.com/watch?v=J351RmKw7wc

Dérivation vectorielle :

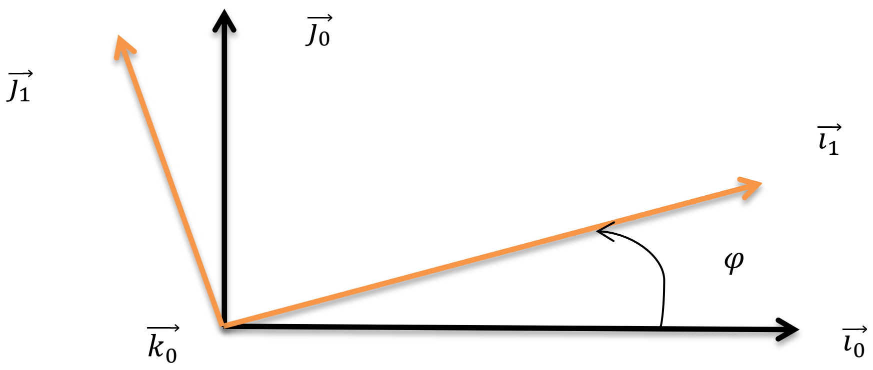
Exercice 1

Soient $R_0 = (O_0, \overrightarrow{i_0}, \overrightarrow{j_0}, \overrightarrow{k_0})$ et $R_1 = (O_1, \overrightarrow{i_1}, \overrightarrow{j_1}, \overrightarrow{k_1} = \overrightarrow{k_0})$ mobile dans R_0

$$\overrightarrow{\boldsymbol{\Omega}_{1/0}} = \frac{d\varphi}{dt}\overrightarrow{k_0} = \dot{\varphi}\overrightarrow{k_0}$$

Calculer $\frac{d^{(0)}\overrightarrow{i_1}}{dt}$ et $\frac{d^{(0)}\overrightarrow{j_1}}{dt}$

On trouve :



Représentation plane des repères directs avec l'axe de rotation commun aux deux repères $\overrightarrow{k_0}$ perpendiculaire au plan, l'angle φ algébrique est représenté positif compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ pour éviter les erreurs de signe lors des projections.

$\frac{d^{(0)}\vec{\imath_1}}{dt} = \dot{\varphi}.\vec{j_1}$ et $\frac{d^{(0)}\vec{j_1}}{dt} = -\dot{\varphi}.\vec{\imath_1}$

Remarquer que « dériver par rapport au temps » consiste à faire pivoter le vecteur de +π/2 autour de l'axe portant le vecteur vitesse de rotation $\overrightarrow{k_0}$ et de multiplier par la valeur algébrique de la vitesse de rotation $\dot{\varphi}$.

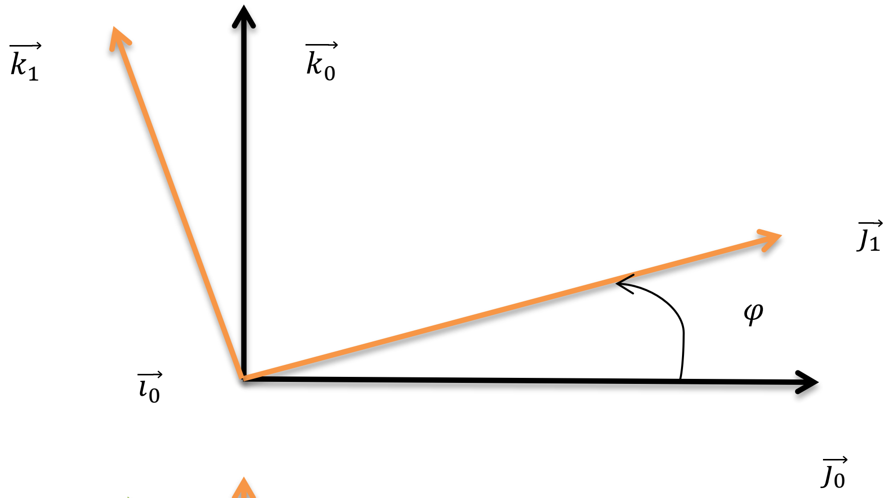
Exercice 2

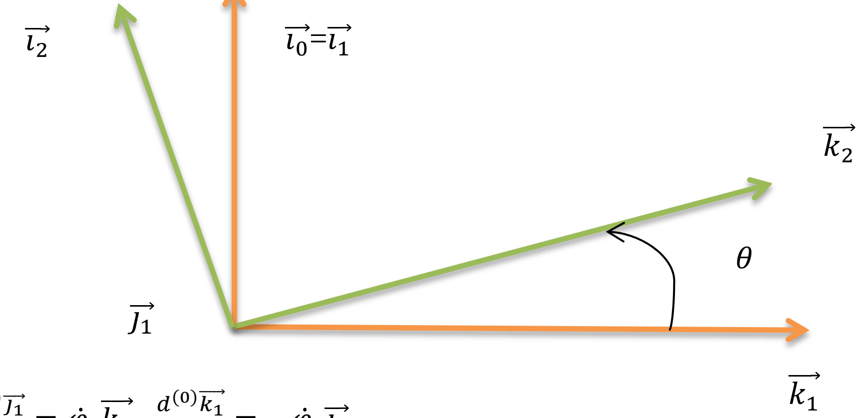
Soient $R_0 = (O_0, \vec{i_0}, \vec{j_0}, \vec{k_0})$ et
$R_1 = (O_1, \vec{i_1} = \vec{i_0}, \vec{j_1}, \vec{k_1})$, $R_2 = (O_2, \vec{i_2}, \vec{j_2} = \vec{j_1}, \vec{k_2})$, mobiles dans R_0

$\vec{\boldsymbol{\Omega}}_{1/0} = \dot{\varphi}\,\vec{i_0}$ $\qquad$ $\vec{\boldsymbol{\Omega}}_{2/1} = \dot{\theta}\,\vec{j_1}$

Calculer $\frac{d^{(0)}\vec{j_1}}{dt}, \frac{d^{(0)}\vec{k_1}}{dt}, \frac{d^{(0)}\vec{k_2}}{dt}, \frac{d^{(0)}\vec{\imath_2}}{dt}$

Solution :





$\frac{d^{(0)}\overrightarrow{j_1}}{dt} = \dot{\varphi}.\overrightarrow{k_1}$, $\frac{d^{(0)}\overrightarrow{k_1}}{dt} = -\dot{\varphi}.\overrightarrow{j_1}$

Pour calculer $\frac{d^{(0)}\overrightarrow{k_2}}{dt}$, deux possibilités :

$\frac{d^{(0)}\overrightarrow{k_2}}{dt} = \frac{d^{(2)}\overrightarrow{k_2}}{dt} + \overrightarrow{\Omega_{2/0}}\wedge\overrightarrow{k_2}$; $\frac{d^{(2)}\overrightarrow{k_2}}{dt} = \vec{0}$; $\overrightarrow{\Omega_{2/0}} = \overrightarrow{\Omega_{2/1}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}}$

Ou mieux $\frac{d^{(0)}\overrightarrow{k_2}}{dt} = \frac{d^{(1)}\overrightarrow{k_2}}{dt} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}}\wedge\overrightarrow{k_2}$; $\frac{d^{(1)}\overrightarrow{k_2}}{dt} = \dot{\theta}.\overrightarrow{\imath_2}$; $\dot{\varphi}.\overrightarrow{\imath_0}\wedge\overrightarrow{k_2} = -\dot{\varphi}.cos\theta.\overrightarrow{j_1}$

De même $\frac{d^{(0)}\overrightarrow{\imath_2}}{dt} = -\dot{\theta}.\overrightarrow{k_2} + \dot{\varphi}.sin\theta.\overrightarrow{j_1}$

Pour s'entraîner :

Soit le repère fixe $R_0\,(O, \overrightarrow{X_0}, \overrightarrow{Y_0}, \overrightarrow{Z_0})$ et les repères mobiles

$$R_1\,(O, \overrightarrow{X_1}, \overrightarrow{Y_1} = \overrightarrow{Y_0}, \overrightarrow{Z_1})\quad R_2\,(O, \overrightarrow{X_2}, \overrightarrow{Y_2}, \overrightarrow{Z_2} = \overrightarrow{Z_1})$$

Avec $\overrightarrow{\Omega_{R_1/R_0}} = \dot{\theta}\cdot\overrightarrow{Y_0}$ et $\overrightarrow{\Omega_{R_2/R_1}} = \dot{\varphi}\cdot\overrightarrow{Z_1}$

Calculer :

$\frac{d^{(0)}\overrightarrow{X_1}}{dt}$; $\frac{d^{(0)}\overrightarrow{Z_1}}{dt}$; $\frac{d^{(0)}\overrightarrow{X_2}}{dt}$; $\frac{d^{(0)}\overrightarrow{Y_2}}{dt}$

NB : pour le CC1, c'est exercice doit être bien maîtrisé.

Résumé dérivation vectorielle : https://www.youtube.com/watch?v=O7b-J7rvyAE

<u>Rappel sur les torseurs</u>

Un torseur est un champ vectoriel équiprojectif : $\overrightarrow{M_A} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{M_B} \cdot \overrightarrow{AB}$

Relation très utilisée en particulier en cinématique du solide… Voir un peu plus loin.

Il est défini par sa résultante $\overrightarrow{R}$ et son moment en un point A : $\overrightarrow{M_A}$

<u>Notation :</u>

$$[T]_A = \left[\overrightarrow{R} \,\middle|\, \overrightarrow{M_A} \right]_A \quad \text{ou} \quad \left\{ \overrightarrow{R} \,\middle|\, \overrightarrow{M_A} \right\}_A \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{matrix} \overrightarrow{R} \\ \overrightarrow{M_A} \end{matrix} \right\}_A \ldots \qquad ou \quad {}_A\left\{ \vec{R} \quad \overrightarrow{M}(A) \right\}$$

<u>Propriété :</u>

$$\overrightarrow{M_B} = \overrightarrow{M_A} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{R} \quad ou \quad \overrightarrow{M_B} = \overrightarrow{M_A} + \overrightarrow{R} \wedge \overrightarrow{AB}$$

<u>Définitions :</u>

- *Invariant scalaire :* $\lambda = \vec{R} \cdot \overrightarrow{M}(A) = \vec{R} \cdot \overrightarrow{M}(B)$
- *Glisseur :* tout torseur de résultante $\vec{R} \neq \vec{0}$ et d'invariant scalaire $\lambda = 0$.
  Il existe alors une droite (Δ) appelée axe central telle que : $\overrightarrow{M}(I) = \vec{0} \quad \forall I \in (\Delta)$
- *Couple :* tout torseur **non nul** dont la résultante est nulle ($\vec{R} = \vec{0}$), est appelé **couple**.
  Un couple est donc un champ vectoriel uniforme.

<u>Propriété :</u>

On démontre que tout torseur peut s'écrire comme la somme d'un couple et d'un glisseur (la somme de deux torseurs ne peut se faire que s'ils sont exprimés en un même point).

Cinématique du solide

Le champ des vitesses est un champ équiprojectif : $\overrightarrow{v(A)_{S/0}} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{v(B)_{S/0}} \cdot \overrightarrow{AB}$

C'est le champ de moment du **torseur cinématique**.

Il est défini par : $\left[V_{S/0}\right]_A = \left[\vec{\Omega}_{s/0} \,\middle|\, \overrightarrow{v(A)_{S/0}} \right]_A \qquad \mathcal{V}_{S/0} = \left\{ \vec{\Omega}_{s/0} \,\middle|\, \vec{V}(A \in S/0) \right\}_A$

- ➢ $\vec{\Omega}_{s/0}$ sa résultante cinématique, vecteur vitesse de rotation du solide dans son mouvement par rapport au repère R_0 :
- ➢ $\overrightarrow{v(A)_{S/0}}$ son moment cinématique en un point *A*, vecteur vitesse du point *A* appartenant au solide dans son mouvement par rapport au repère R_0 :

Ainsi quand on connait la vitesse d'un point appartenant à un solide, on peut en déduire la vitesse de n'importe quel point de ce solide ! (on utilise la relation « **BABAR** »)

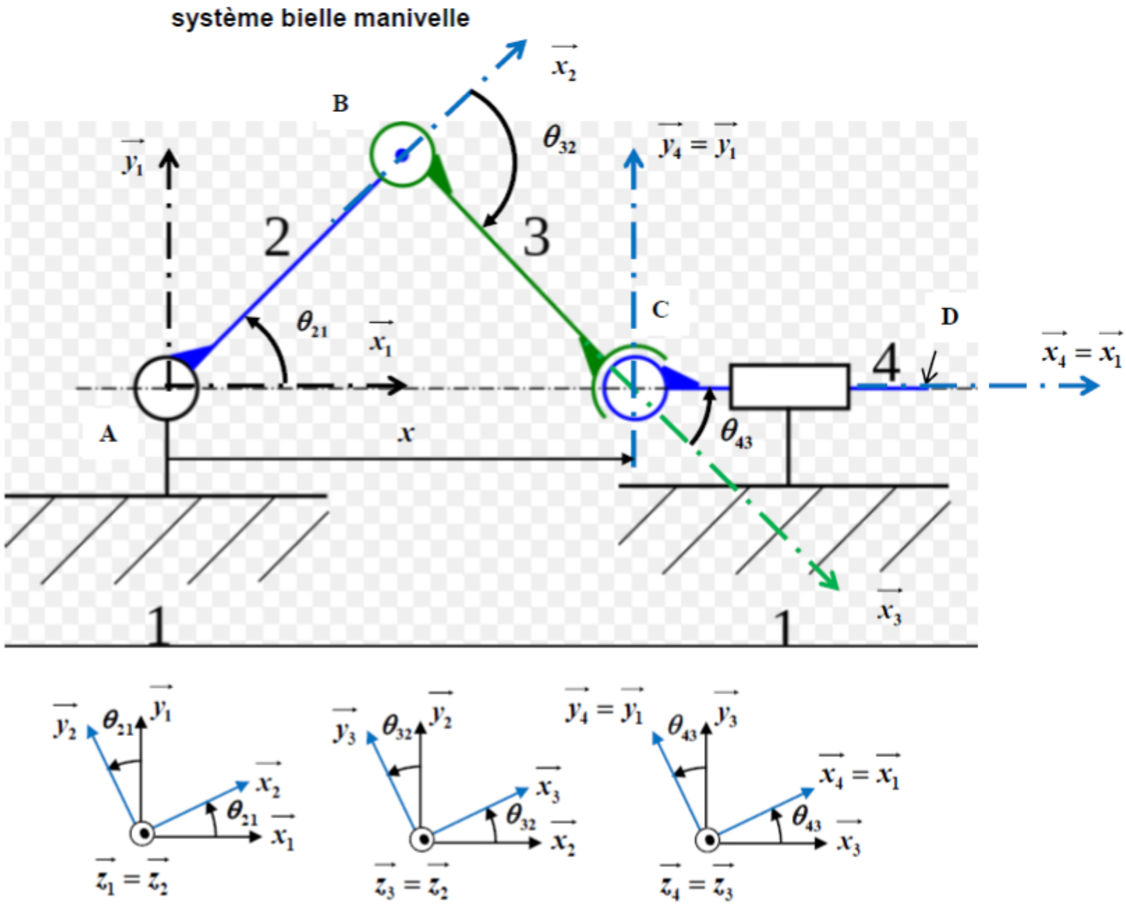
$$\overrightarrow{v(B)_{S/0}} = \overrightarrow{v(A)_{S/0}} + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{\Omega}_{s/0}$$

Loi de composition des mouvements : $\mathcal{V}_{n/0} = \mathcal{V}_{n/n-1} + ... + \mathcal{V}_{2/1} + \mathcal{V}_{1/0}$

$$\mathcal{V}_{n/0} = \left\{ \vec{\Omega}_{n/0} \quad \middle| \vec{V}(A \in n/0) \right\}_A \Longrightarrow \begin{cases} \vec{\Omega}_{n/0} = \vec{\Omega}_{n/n-1} + ... + \vec{\Omega}_{2/1} + \vec{\Omega}_{1/0} \\ \vec{V}(A \in n/0) = \vec{V}(A \in n/n-1) + ... + \vec{V}(A \in 2/1) + \vec{V}(A \in 1/0) \end{cases}$$

même point A

Exemple 1 :



$R_1 = (A, \vec{x_1}, \vec{y_1}, \vec{z_1})$ *repère lié à 1*

$R_2 = (A, \vec{x_2}, \vec{y_2}, \vec{z_2})$ *repère lié à 2*

$R_3 = (C, \vec{x_3}, \vec{y_3}, \vec{z_3})$ *repère lié à 3*

$R_4 = (C, \vec{x_4}, \vec{y_4}, \vec{z_4}) = (C, \vec{x_1}, \vec{y_1}, \vec{z_1})$ *repère lié à 4*

Calculez $\overrightarrow{v_{D\in 4/1}}$ en fonction de la vitesse de rotation de 2/1. On prendra AB = R = BC = L

Mouvement de 2/1 : liaison pivot d'axe $(A,\overrightarrow{z_1})$

$$\mathcal{V}_{2/1}=\left\{\begin{array}{c|c}\overrightarrow{\Omega}_{2/1} & \overrightarrow{V}(A\in 2/1)\end{array}\right\}_A \quad avec \quad \begin{cases}\overrightarrow{\Omega}_{2/1}=\dot{\theta}_{21}\overrightarrow{z_1}\\ \overrightarrow{V}(A\in 2/1)=\vec{0}\end{cases}$$

Mouvement de 3/2 : liaison pivot d'axe $(B,\overrightarrow{z_1})$

$$\mathcal{V}_{3/2}=\left\{\begin{array}{c|c}\overrightarrow{\Omega}_{3/2} & \overrightarrow{V}(B\in 3/2)\end{array}\right\}_B \quad avec \quad \begin{cases}\overrightarrow{\Omega}_{3/2}=\dot{\theta}_{32}\overrightarrow{z_1}\\ \overrightarrow{V}(B\in 3/2)=\vec{0}\end{cases}$$

Mouvement de 4/3 : liaison sphérique de centre C

$$\mathcal{V}_{4/3}=\left\{\begin{array}{c|c}\overrightarrow{\Omega}_{4/3} & \overrightarrow{V}(C\in 4/3)\end{array}\right\}_C \quad avec \quad \begin{cases}\overrightarrow{\Omega}_{4/3}=\dot{\alpha}_{43}\overrightarrow{x_1}+\dot{\beta}_{43}\overrightarrow{y_1}+\dot{\theta}_{43}\overrightarrow{z_1}\\ \overrightarrow{V}(C\in 4/3)=\vec{0}\end{cases}$$

Mouvement de 4/1 : liaison glissière de direction $\overrightarrow{x_1}$

$$\mathcal{V}_{4/1}=\left\{\begin{array}{c|c}\overrightarrow{\Omega}_{4/1} & \overrightarrow{V}(C\in 4/1)\end{array}\right\}_C \quad avec \quad \begin{cases}\overrightarrow{\Omega}_{4/1}=\vec{0}\\ \overrightarrow{V}(C\in 4/1)=\dot{x}_{41}\overrightarrow{x_1}\end{cases}$$

Loi de composition des mouvements : $\mathcal{V}_{4/1}=\mathcal{V}_{4/3}+\mathcal{V}_{3/2}+\mathcal{V}_{2/1}$

$$\mathcal{V}_{4/1}=\left\{\begin{array}{c|c}\overrightarrow{\Omega}_{4/1} & \overrightarrow{V}(C\in 4/1)\end{array}\right\}_C \Longrightarrow \begin{cases}\overrightarrow{\Omega}_{4/1}=\overrightarrow{\Omega}_{4/3}+\overrightarrow{\Omega}_{1/2}+\overrightarrow{\Omega}_{2/1}\\ \overrightarrow{V}(C\in 4/1)=\overrightarrow{V}(C\in 4/3)+\overrightarrow{V}(C\in 3/2)+\overrightarrow{V}(C\in 2/1)\end{cases}$$

On choisit le point C

$$\begin{cases}\overrightarrow{V}(C\in 2/1)=\overrightarrow{V}(A\in 2/1)+\overrightarrow{CA}\wedge\overrightarrow{\Omega}_{2/1}=\vec{0}+(-x_{41}\overrightarrow{x_1})\wedge\dot{\theta}_{21}\overrightarrow{z_1}=x_{41}\,\dot{\theta}_{21}\overrightarrow{y_1}\\ \overrightarrow{V}(C\in 3/2)=\overrightarrow{V}(B\in 3/2)+\overrightarrow{CB}\wedge\overrightarrow{\Omega}_{3/2}=\vec{0}+(-L\overrightarrow{x_3})\wedge\dot{\theta}_{32}\overrightarrow{z_1}=L\,\dot{\theta}_{32}\overrightarrow{y_3}\\ \overrightarrow{V}(C\in 4/3)=\vec{0}\\ \overrightarrow{V}(C\in 4/1)=\dot{x}_{41}\overrightarrow{x_1}\end{cases}$$

En projection dans la base $(\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_1})$

$$\begin{cases}\begin{cases}\overrightarrow{\Omega}_{4/1}\cdot\overrightarrow{x_1}=\dot{\alpha}_{43}+0+0=0\\ \overrightarrow{\Omega}_{4/1}\cdot\overrightarrow{y_1}=\dot{\beta}_{43}+0+0=0\\ \overrightarrow{\Omega}_{4/1}\cdot\overrightarrow{z_1}=\dot{\theta}_{43}+\dot{\theta}_{32}+\dot{\theta}_{21}=0\end{cases}\\ \begin{cases}\overrightarrow{V}(C\in 4/1)\cdot\overrightarrow{x_1}=\dot{x}_{41}=0+0-L\,\dot{\theta}_{32}\sin(\theta_{32}+\theta_{21})\\ \overrightarrow{V}(C\in 4/1)\cdot\overrightarrow{y_1}=0=0+x_{41}\,\dot{\theta}_{21}+L\,\dot{\theta}_{32}\cos(\theta_{32}+\theta_{21})\\ \overrightarrow{V}(C\in 4/1)\cdot\overrightarrow{z_1}=0+0+0=0\end{cases}\end{cases}$$

$$Comme\ \ R=L\ \ on\,a\ \ \theta_{43}=\theta_{21}\ \ et\ \begin{cases}\theta_{32}+\theta_{21}=-\theta_{43}=-\theta_{21}\\ \dot{\theta}_{32}=-\dot{\theta}_{43}-\dot{\theta}_{21}=-2\,\dot{\theta}_{21}\end{cases} \qquad \dot{x}_{41}=-L\,\dot{\theta}_{32}\sin(\theta_{32}+\theta_{21})=-2L\dot{\theta}_{21}\sin\theta_{21}$$

$$\overrightarrow{V}(D\in 4/1)=\overrightarrow{V}(C\in 4/1)+\overrightarrow{DC}\wedge\overrightarrow{\Omega}_{4/1}=\dot{x}_{41}\overrightarrow{x_1}+\overrightarrow{DC}\wedge\vec{0}=\dot{x}_{41}\overrightarrow{x_1}$$

Exemple 2 : robot ABB IRB 140

Mouvement du robot

Type de mouvement		Portée du mouvement
Axe 1	Mouvement de rotation	+180° - -180°
Axe 2	Mouvement de bras	+110° - -90°
Axe 3	Mouvement de bras	+50° - -230°
Axe 4	Mouvement de poignet	+200° - -200°
Axe 5	Mouvement de flexion	+120° - -120°
Axe 6	Mouvement de pivot	+400° - -400°

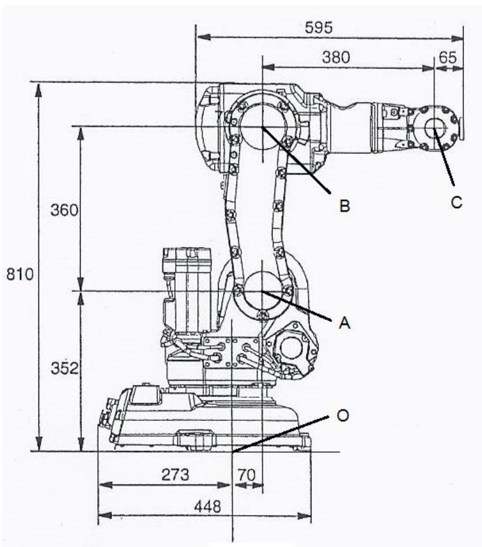
Positions au centre du poignet (mm)

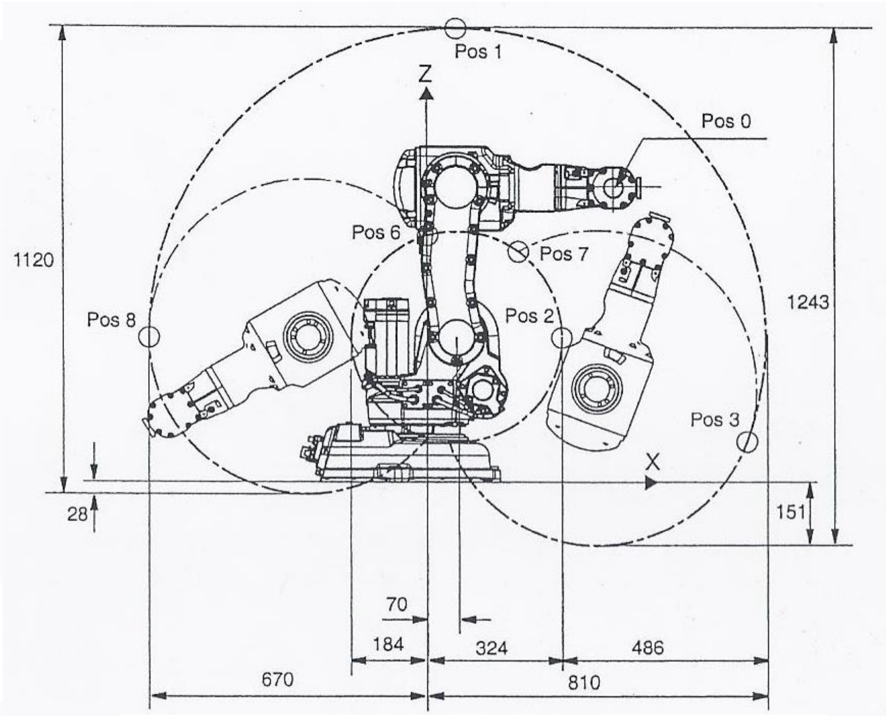
pos.	x	z
0	450	712
1	70	1092
2	314	421
3	765	99
6	1	596
7	218	558
8	-670	352

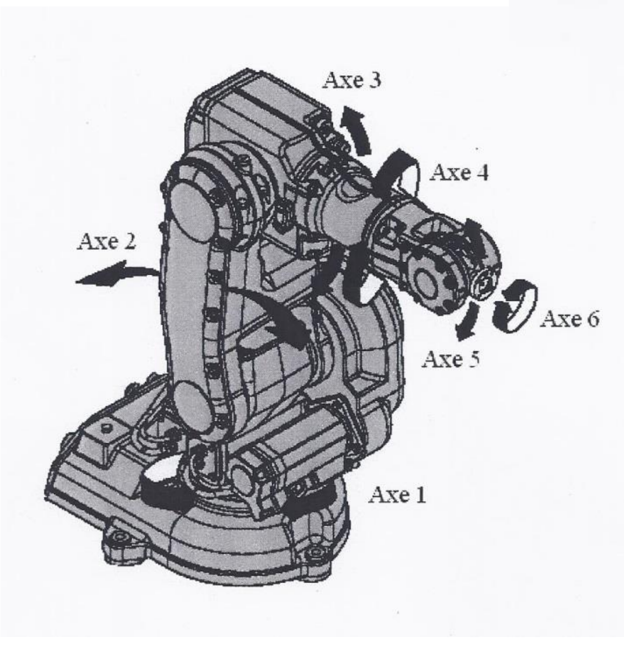
Angle (degrés)

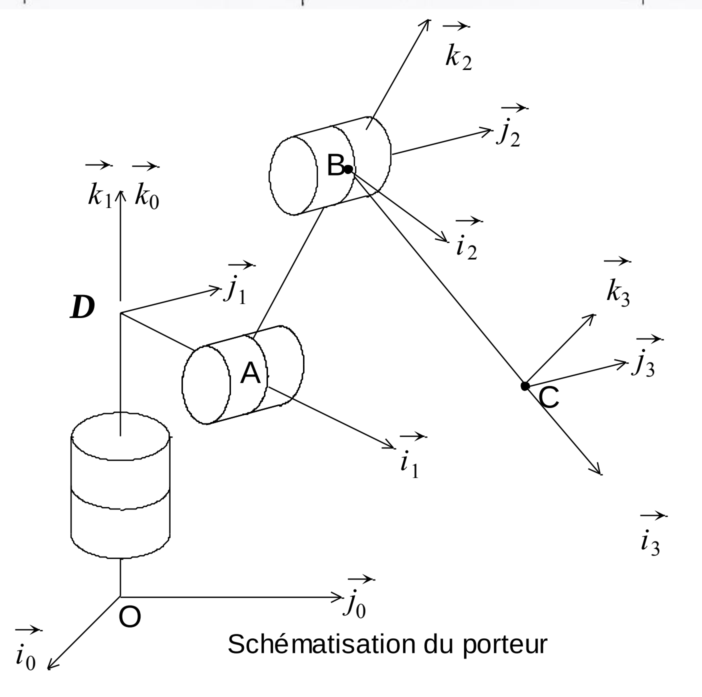
pos.	axe 2	axe 3
0	0	0
1	0	-90
2	0	+50
3	110	-90
6	-90	+50
7	110	-230
8	-90	-90

Les positions extrêmes du bras du robot.









Schématisation du porteur

La schématisation du « porteur » (les 3 premiers axes) de ce robot fait apparaître les repères liés à ses « segments » (ou « bras », ou « solides ») de ce robot. Les 3 rotations successives seront notées α, β, γ avec évidemment $\alpha = \alpha(t)$, $\beta = \beta(t)$, $\gamma = \gamma(t)$.

1 : Déterminer les vecteurs vitesses de rotation

$\overrightarrow{\boldsymbol{\Omega}_{1/0}}$

$\overrightarrow{\boldsymbol{\Omega}_{2/1}}$ $\overrightarrow{\boldsymbol{\Omega}_{2/0}}$

$\overrightarrow{\boldsymbol{\Omega}_{3/2}}$ $\overrightarrow{\boldsymbol{\Omega}_{3/1}}$ $\overrightarrow{\boldsymbol{\Omega}_{3/0}}$

2 : Déterminer les vecteurs vitesses

$\overrightarrow{v(\mathrm{A})_{1/0}}$

$\overrightarrow{v(\mathrm{A})_{2/1}}$ $\overrightarrow{v(\mathrm{A})_{2/0}}$ $\overrightarrow{v(\mathrm{B})_{2/1}}$ $\overrightarrow{v(\mathrm{B})_{2/0}}$

$\overrightarrow{v(\mathrm{C})_{3/2}}$ $\overrightarrow{v(\mathrm{C})_{3/1}}$ $\overrightarrow{v(\mathrm{C})_{3/0}}$

3 : Enfin, en supposant que, dans la phase de mouvement qui nous intéresse (et qui sera de durée limitée), les vitesses de rotations aient des mesures algébriques constantes

$$\dot{\alpha} = \frac{d\alpha}{dt} = \omega_{1/0}\ (cste) \qquad \dot{\beta} = \frac{d\beta}{dt} = \omega_{2/1}\ (cste) \qquad \dot{\gamma} = \frac{d\gamma}{dt} = \omega_{3/2}\ (cste)$$

Déterminer

$\overrightarrow{a(\mathrm{A})_{1/0}}$

$\overrightarrow{a(\mathrm{A})_{2/1}}$ $\overrightarrow{a(\mathrm{A})_{2/0}}$ $\overrightarrow{a(\mathrm{B})_{2/1}}$ $\overrightarrow{a(\mathrm{B})_{2/0}}$

$\overrightarrow{a(\mathrm{C})_{3/2}}$ $\overrightarrow{a(\mathrm{C})_{3/1}}$ $\overrightarrow{a(\mathrm{C})_{3/0}}$

Astuce pour se faciliter le calcul de la vitesse d'un point P dans un système de solide :

Cas 1 : le point P appartient « naturellement » au solide 2 : $\overrightarrow{\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{P}\in 2/0}} = \left.\frac{d\overrightarrow{\boldsymbol{O_0P}}}{dt}\right|_{\boldsymbol{R_0}}$

Cas 2 : le point P n'appartient pas « naturellement » au solide 2 : on passe par un point A qui lui appartient à 2 et on utilise le transport du torseur cinématique (BABAR)

$\overrightarrow{\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{P}\in 2/0}} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{A}\in 2/0}} + \overrightarrow{\boldsymbol{PA}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{\Omega}_{2/0}}$

Réponse :

En notant $\overrightarrow{OA} = a\,\vec{\imath_1} + d\overrightarrow{k_0},\ \overrightarrow{AB} = b\overrightarrow{k_2}, \overrightarrow{BC} = c\vec{\imath_3}$

$\overrightarrow{v(A)_{1/0}} = a\dot{\alpha}\vec{\jmath_1},$

$\overrightarrow{v(B)_{2/0}} = a\dot{\alpha}\vec{\jmath_1} + b(\dot{\beta}\vec{\imath_2} + \dot{\alpha}\sin(\beta)\,\vec{\jmath_1})$

$\overrightarrow{v(C)_{3/0}} = a\dot{\alpha}\vec{\jmath_1} + b\left(\dot{\beta}\vec{\imath_2} + \dot{\alpha}\sin(\beta)\,\vec{\jmath_1}\right) + c(-\left(\dot{\gamma} + \dot{\beta}\right)\overrightarrow{k_3} + \dot{\alpha}\cos(\beta + \gamma)\,\vec{\jmath_1}),$

$\overrightarrow{a(A)_{1/0}} = -a\dot{\alpha}^2\vec{\imath_1},$

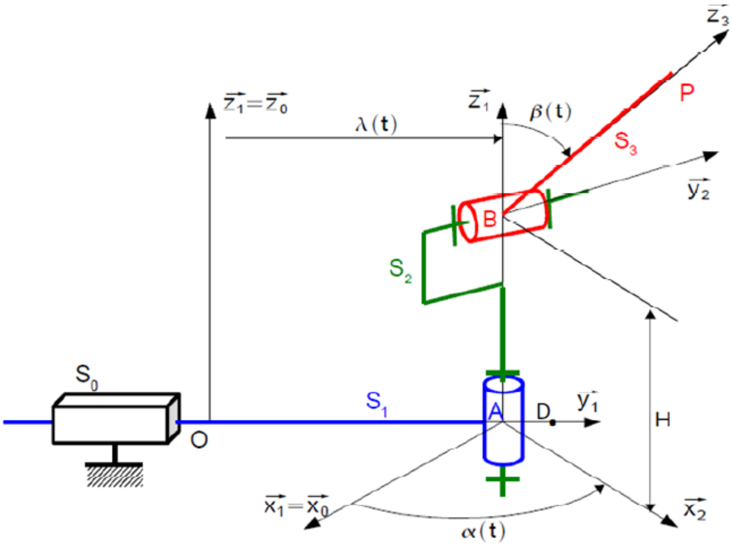
$\overrightarrow{a(B)_{2/0}} = -a\dot{\alpha}^2\vec{\imath_1} + b(-\dot{\beta}^2\overrightarrow{k_2} + 2\dot{\alpha}\,\dot{\beta}\cos(\beta)\,\vec{\jmath_1} - \dot{\alpha}^2\sin(\beta))\,\vec{\imath_1},$

$\overrightarrow{a(C)_{3/0}} = -a\dot{\alpha}^2\vec{\imath_1} + b(-\dot{\beta}^2\overrightarrow{k_2} + 2\dot{\alpha}\,\dot{\beta}\cos(\beta)\,\vec{\jmath_1} - \dot{\alpha}^2\sin(\beta))\vec{\imath_1} + c(-\left(\dot{\gamma} + \dot{\beta}\right)^2\vec{\imath_3} - 2\dot{\alpha}\left(\dot{\gamma} + \dot{\beta}\right)\sin(\beta + \gamma)\,\vec{\jmath_1} - \dot{\alpha}^2\cos(\beta + \gamma)\,\vec{\imath_1}))$

Exemple 3 : robot de peinture

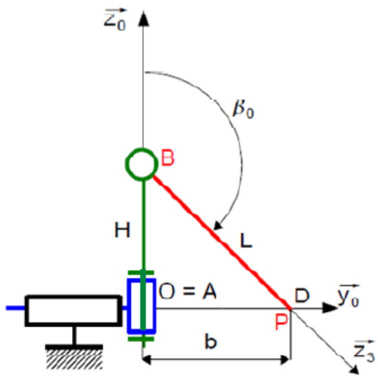
On étudie un robot de peinture de carrosserie de voiture.

L'objectif est de déterminer une loi de pilotage permettant au pistolet à peinture de balayer horizontalement la carrosserie tout en vérifiant le critère de déplacement relatif. Dans le modèle proposé, le point *P* correspond à la position du pistolet.



Shéma cinématique du robot

Modèle (a) en configuration générale



Position médiane (P est en D)
(et A en O)

(b) en position médiane ($\alpha = \pi/2$)

Construire les figures planes illustrant les paramètres de position

Q1 : Exprimer les vecteurs vitesse de rotation $\vec{\Omega}_{1/0}$, $\vec{\Omega}_{2/1}$ et $\vec{\Omega}_{3/2}$. En déduire $\vec{\Omega}_{2/0}$ et $\vec{\Omega}_{3/0}$.

Q2 : Déterminer $\vec{V}_{P/0}$.

Q3 : Exprimer la relation vectorielle associée à la condition « *P* se déplace à une vitesse *V* suivant $\vec{x}_0$ ». Par projection sur $\vec{z}_0$, en déduire $\dot{\beta}$.

Q4 : Projeter la contrainte vectorielle de la question précédente sur $\vec{x}_0$ et $\vec{y}_0$ pour obtenir les 2 autres contraintes scalaires.

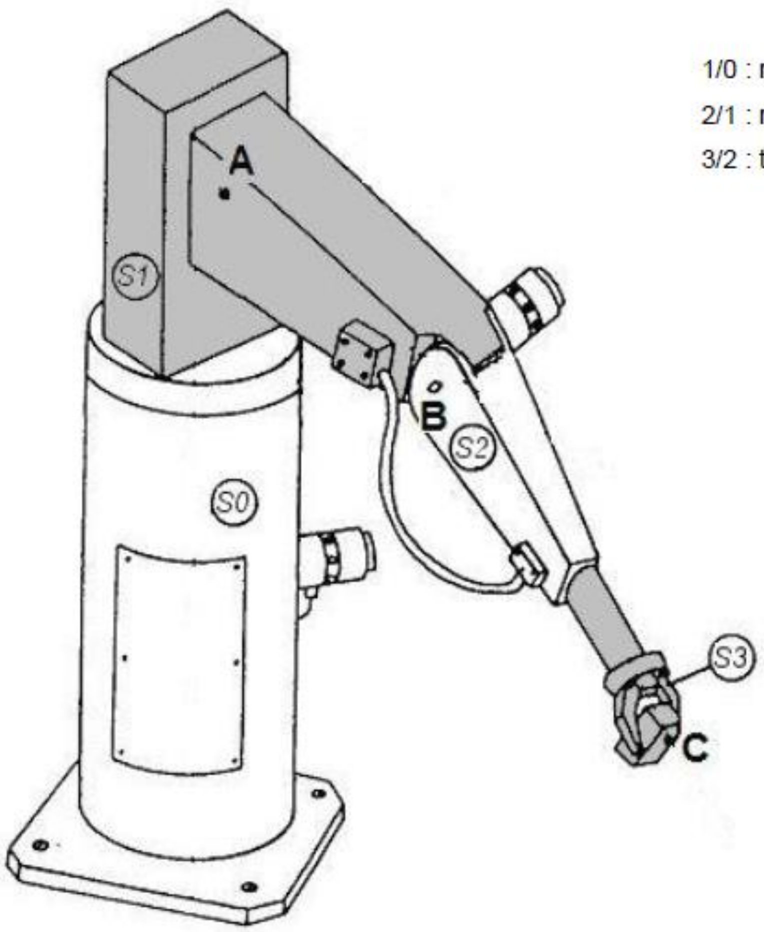
Q5 : Exprimer alors $\dot{\lambda}$ et $\dot{\alpha}$ en fonction de *L*, *V*, α et β_0.

En notant que $\sin(\pi - \beta_0) = \sin(\beta_0) = \dfrac{b}{L}$, les expressions déterminées permettent d'obtenir les deux équations

Exemple 4 : bras manipulateur

La figure ci-dessous représente un bras manipulateur permettant de déplacer des objets.
Ce mécanisme est constitué de :

- Un bâti S0.
- Un solide S1 entraîné en rotation par un moteur M1.
- Un solide S2 entraîné en rotation par un moteur M2.
- Un solide S3 entraîné en translation par un vérin V1.
- Une pince située à l'extrémité du vérin permettant de saisir l'objet.



1/0 : rotation d'axe $(A,\overrightarrow{z_0})$ $\boldsymbol{d'angle\,\alpha}$

2/1 : rotation d'axe $(B,\overrightarrow{x_1})$ $\boldsymbol{d'angle\,\beta}$

3/2 : translation rectiligne de direction $\overrightarrow{z_2}$ λ

On pose $\overrightarrow{AB} = a.\overrightarrow{y_1}$ (a étant une constante).

Question 1 : *Proposer un paramétrage intelligent du système.*

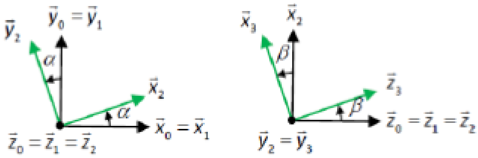
Question 2 : *Réaliser des figures planes illustrant les paramètres d'orientation.*

Question 3 : *Déterminer* $\overrightarrow{\Omega}_{1/0}$ $\overrightarrow{\Omega}_{2/1}$ $\overrightarrow{\Omega}_{2/0}$ $\overrightarrow{\Omega}_{3/2}$ $\overrightarrow{\Omega}_{3/1}$ $\overrightarrow{\Omega}_{3/0}$

Question 4 : *Déterminer les vecteurs vitesses* $\overrightarrow{V_{C\in 3/2}}$, $\overrightarrow{V_{C\in 2/1}}$, $\overrightarrow{V_{C\in 1/0}}$ *et* $\overrightarrow{V_{C\in 3/0}}$.

Question 5 : *Déterminer le vecteur accélération* $\overrightarrow{\Gamma_{C\in 3/0}}$.

Exemple 3 : robot de peinture



***Q*1 :** $\vec{\Omega}_{3/0} = \vec{\Omega}_{3/2} + \vec{\Omega}_{2/0} = \dot{\beta}\,\vec{y}_2 + \dot{\alpha}\,\vec{z}_0 = \dot{\alpha}\,\vec{z}_0 + \dot{\beta}\,\vec{y}_2$

***Q*2 :** $\boxed{\vec{V}_{P/0} = \dot{\lambda}\,\vec{y}_0 + L(\dot{\alpha}\sin\beta\,\vec{y}_2 + \dot{\beta}\,\vec{x}_3)}$

***Q*3 :** $\boxed{-L\dot{\beta}\sin\beta = 0} \rightarrow \dot{\beta} = 0$, et donc $\beta = \beta_0$.

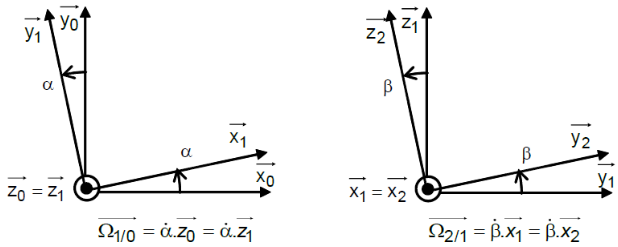
***Q*4 :** $\begin{cases} -L\dot{\alpha}\sin\beta\sin\alpha + L\dot{\beta}\cos\beta\cos\alpha = V \\ \dot{\lambda} + L\dot{\alpha}\sin\beta\cos\alpha + L\dot{\beta}\cos\beta\sin\alpha = 0 \end{cases}$

***Q*5 :** En notant que $\sin(\pi - \beta_0) = \sin(\beta_0) = \dfrac{b}{L}$, les expressions déterminées permettent d'obtenir les deux équations :

$\dot{\lambda} = \dfrac{V}{\tan\alpha}$ et $\dot{\alpha} = -\dfrac{V}{b\sin\alpha}$. Elles s'intègrent facilement numériquement pour obtenir les lois de pilotage du robot.

Exemple 4 : bras manipulateur

Pour paramétrer les 2 rotations et la translation, on utilise 2 paramètres angulaires et 1 paramètre linéaire :
Soit : $\alpha = (\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1}) = (\overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{y_1})$, $\beta = (\overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{y_2}) = (\overrightarrow{z_1}, \overrightarrow{z_2})$ et $\overrightarrow{BC} = \lambda.\overrightarrow{z_2}$.



$\overrightarrow{V_{C\in 3/2}} = \dot{\lambda}.\overrightarrow{z_2}$ $\quad$ $\overrightarrow{V_{C\in 2/1}} = -\lambda.\dot{\beta}.\overrightarrow{y_2}$ $\quad$ $\overrightarrow{V_{C\in 1/0}} = (\lambda.\sin\beta - a).\dot{\alpha}.\overrightarrow{x_1}$

$\overrightarrow{V_{C\in 3/0}} = (\lambda.\sin\beta - a).\dot{\alpha}.\overrightarrow{x_1} - \lambda.\dot{\beta}.\overrightarrow{y_2} + \dot{\lambda}.\overrightarrow{z_2}$

$$\overrightarrow{\Gamma_{C\in 3/0}} = \left[2.\dot{\lambda}.\dot{\alpha}.\sin\beta + 2.\lambda.\dot{\alpha}.\dot{\beta}.\cos\beta + (\lambda.\sin\beta - a).\ddot{\alpha}\right].\overrightarrow{x_1} + (\lambda.\sin\beta - a).\dot{\alpha}^2.\overrightarrow{y_1} - (2.\dot{\lambda}.\dot{\beta} + \lambda.\ddot{\beta}.).\overrightarrow{y_2} + (\ddot{\lambda} - \lambda.\dot{\beta}^2).\overrightarrow{z_2}$$

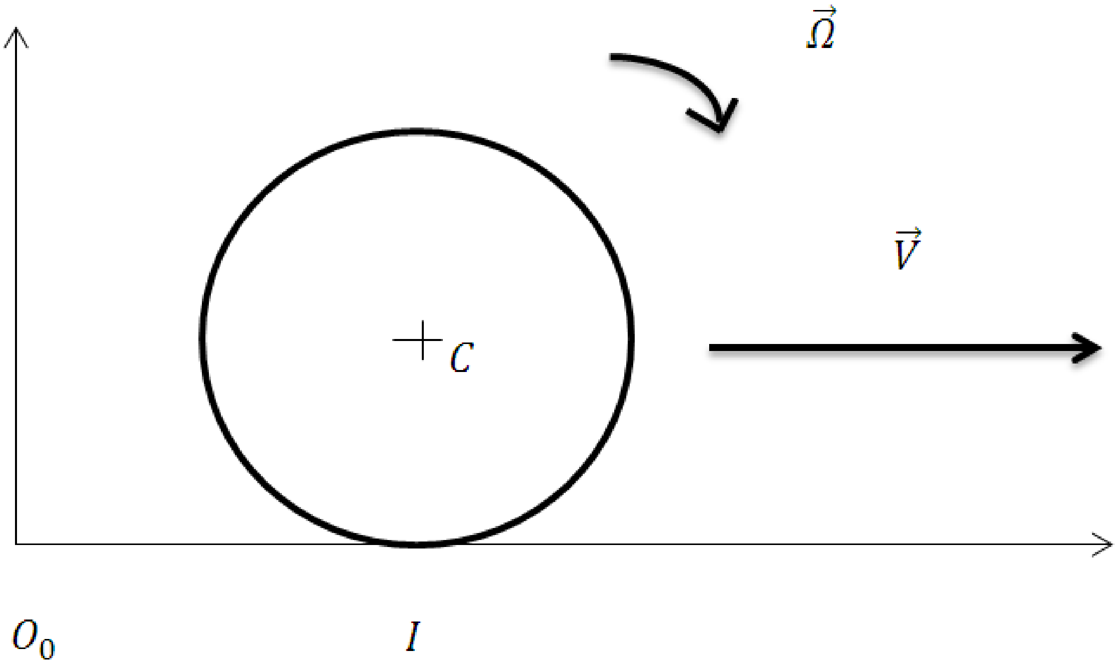
Roulement sans glissement

Soit I le point de contact entre S1 et S2. On définit la vitesse de glissement de S1 par rapport à S2 : (R_0 est un repère quelconque)

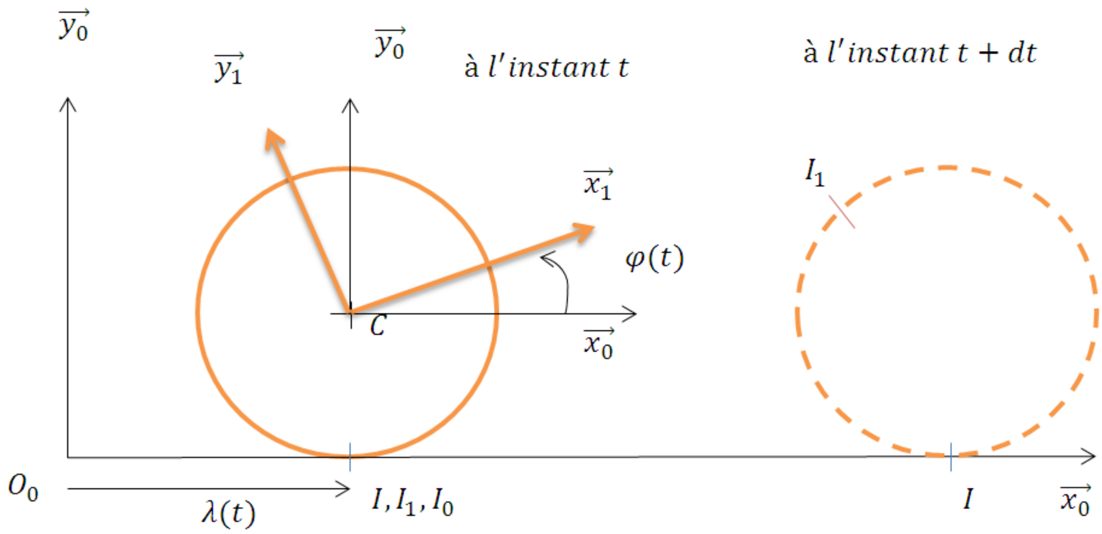
$$\overrightarrow{v(I)_{glt}} = \underbrace{\overrightarrow{v(I)_{1/0}} - \overrightarrow{v(I)_{2/0}}}_{\overrightarrow{v(I)_{1/2}}}$$

Il y a roulement sans glissement si $\overrightarrow{v(I)_{glt}} = \vec{0}$

Exemple : une roue (1) de rayon R roule sans glisser sur le sol (0). Quelle est la relation entre la vitesse d'avance et la vitesse de rotation de la roue ?



Réponse : on met en place un repère par sous ensemble cinématique, puis le paramétrage permettant de passer d'un repère à un autre.



$R_0\left(O_0;\ \vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{k_0}\right)$ fixe, $R'_0\left(C;\ \vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{k_0}\right)$ lié à l'axe de la roue, $R_1\left(C;\ \vec{x_1}, \vec{y_1}, \vec{k_0}\right)$ lié à la roue

Avec λ(t) algébrique et dessiné positif, φ(t) algébrique représenté positif compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.
Les points I : I est le point géométrique de contact entre la roue et le sol, I_1est le point de la roue (1) en I à l'instant t, I_0est le point de la route en I à l'instant t. Les points I, I_1, I_0 coïncident à l'instant t
A l'instant t+dt, I est toujours le point de contact entre la roue et le sol, I_1s'est déplacé sur la roue et I_0n'a pas bougé.
La vitesse de glissement est $\overrightarrow{v_{I_1/0}}$

$$\overrightarrow{v_{I_1/0}} = \overrightarrow{v_{C\in 1/0}} + \overrightarrow{I_1C} \wedge \overrightarrow{\Omega_{1/0}} = \dot{\lambda}\overrightarrow{x_0} + R\dot{\varphi}\overrightarrow{x_0}$$

La relation de roulement sans glissement est : $\dot{\lambda} + R\dot{\varphi} = 0$

Mouvement plan sur plan

Un solide S est animé d'un mouvement plan sur plan si un plan P1 lié à S glisse sur un plan fixe P. A tout instant, P et P1 restent donc parallèles.
On appelle CIR (centre instantané de rotation) le point géométrique I appartenant à S qui, à l'instant *t*, possède une vitesse nulle par rapport à R_0 :

$$\left.\overrightarrow{v(I)_{S/0}}\right|_t = \overrightarrow{0}$$

Suite de l'exemple précédent : une roue (1) de rayon R roule en glissant sur le sol (0) : $2\dot{\lambda} + R\dot{\varphi} = 0$
Où se trouve le CIR de ce mouvement plan sur plan ?

Solution :
on appelle K le CIR. On pose $\overrightarrow{O_oK} = a\overrightarrow{x_0} + b\overrightarrow{y_0}$
$\overrightarrow{v_{K\in 1/0}} = \overrightarrow{v_{C\in 1/0}} + \overrightarrow{KC} \wedge \overrightarrow{\Omega_{1/0}} = \dot{\lambda}\overrightarrow{x_0} + ((\lambda - a)\overrightarrow{x_0} + (R - b)\overrightarrow{y_0}) \wedge \dot{\varphi}\overrightarrow{k_0}$;

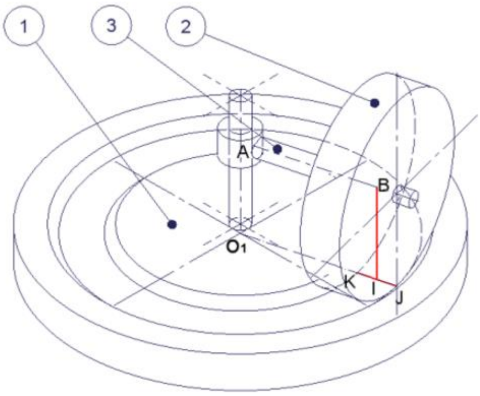
$$\overrightarrow{v_{K\in 1/0}} = \left(\dot{\lambda} + (R - b)\dot{\varphi}\right)\overrightarrow{x_0} - (\lambda - a)\dot{\varphi}\overrightarrow{y_0} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{v_{K\in 1/0}} = \left(\frac{R}{2} - b\right)\dot{\varphi}\overrightarrow{x_0} - (\lambda - a)\dot{\varphi}\overrightarrow{y_0} = \vec{0}$$

Donc a=λ et b=$\frac{R}{2}$

Exercice d'entraînement :

Meule à huile



(1) est fixe, (3) est en liaison pivot avec (1), (2) est en liaison pivot avec (3), (2) est en liaison linéaire rectiligne avec (1). Ecrire la relation de roulement sans glissement en I de la meule sur la pierre.

Réponse :

$$L\dot{\theta}_{31} + R\dot{\theta}_{23} = 0 \qquad L = AB \text{ et } R \text{ rayon}$$