S4 Dynamique
José Bruned

Version 11/09/2024

S4 - PROJET DYNAMIQUE

Objectif du projet :

Le cours de dynamique utilise vos connaissances de cinématique et de statique. Nous allons les mettre en œuvre dans le cadre d'un projet : le but est d'expliquer le comportement dynamique d'un système réel à l'aide de sa mise en équation et de son interprétation.

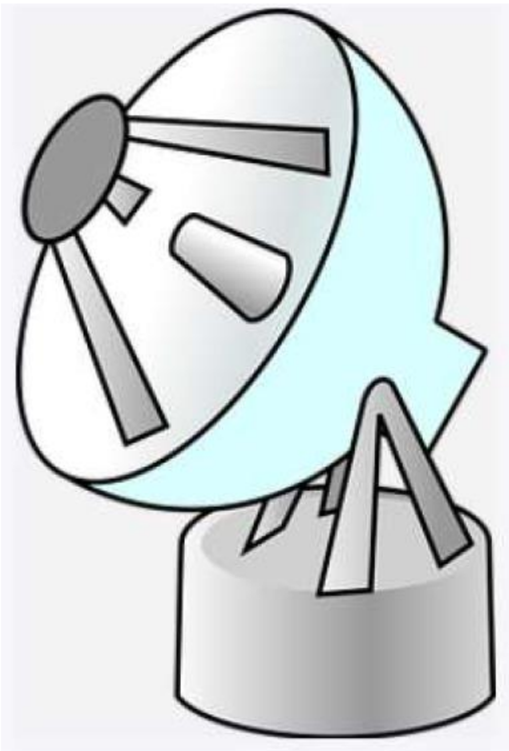
Compétences techniques :

Rechercher et écrire des équations de mouvement à partir du PFD (dynamique du solide)

Compétences transverses :

Communiquer au sein d'un groupe
Organiser son travail au sein d'un groupe
Synthétiser son travail
Restituer un travail à l'oral (Rapports)

Durée du projet : 4 semaines, 24 heures à l'edt, 12h environ « maison » par étudiant.



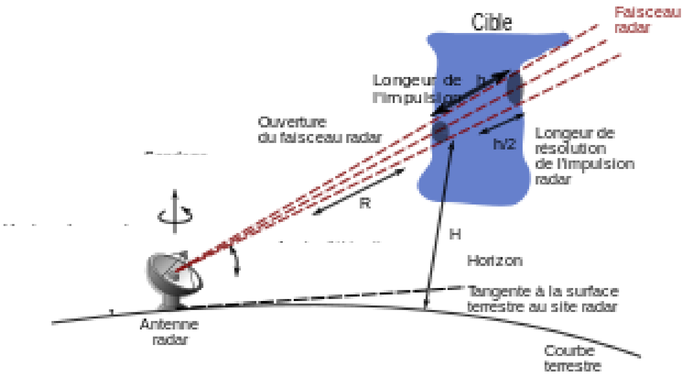
Sujet du projet :

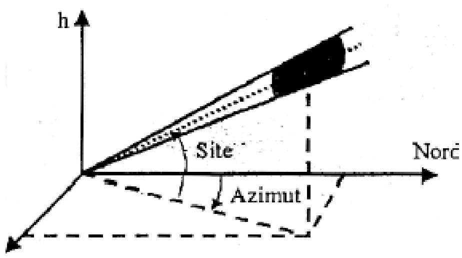
Le radar étudié est un outil d'aide à l'analyse et à l'observation des masses nuageuses. Il offre une large couverture spatiale et des mesures à haute résolution spatio-temporelle des champs de pluie en temps réel.

A intervalles de temps réguliers, le radar émet dans l'atmosphère des ondes électromagnétiques de forte puissance, de durée très brève et de fréquence très élevée. L'énergie contenue dans cette onde est concentrée par une antenne directive. Toutes les cibles qui se trouvent à l'intérieur du faisceau interceptent une partie de l'onde émise. Cette puissance incidente est alors en partie absorbée par la cible, et rayonne dans toutes les directions. La fraction du signal qui retourne vers l'antenne est le signal utile à la détection.

Sur quelques centaines de kilomètres, on admet que l'onde se propage en ligne droite à la vitesse constante de la lumière. L'orientation de l'antenne et le temps écoulé entre l'émission de l'onde et le retour de la puissance réfléchie permettent de localiser la cible en direction et distance.

L'antenne balaye l'atmosphère suivant deux axes de rotation : une rotation d'axe vertical permet de définir la position « azimut » et une rotation d'axe horizontal qui règle la position « site ».

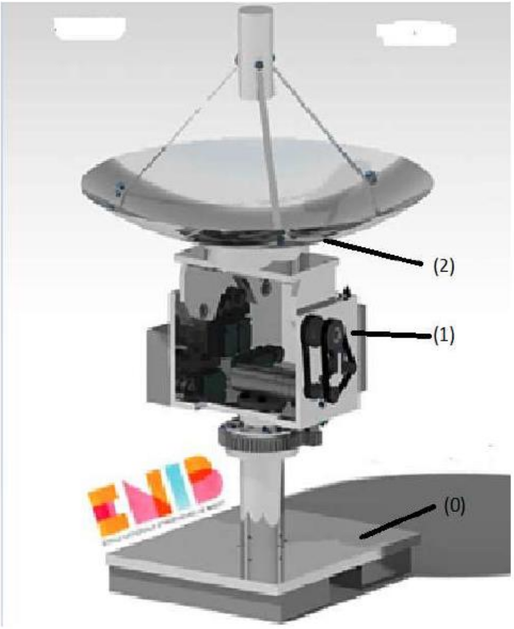


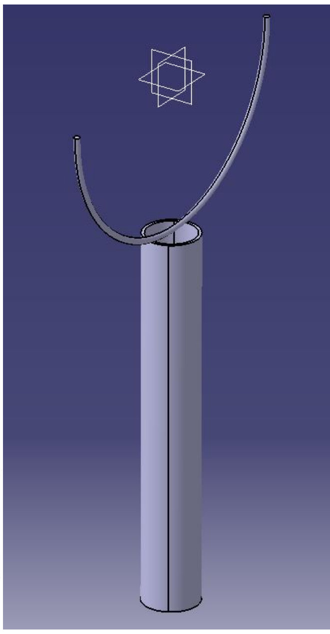


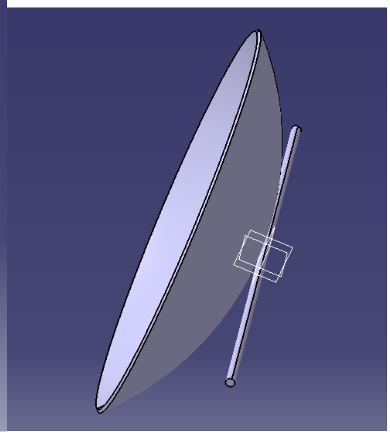
Plusieurs universités et certains services météorologiques nationaux ont développé des radars qui peuvent être déplacés d'un site à l'autre pour des études sur divers phénomène météorologiques. Certains sont des radars pleine grandeur qui peuvent être démontés et placés à un endroit pour des études de longue haleine. D'autres comportent de plus petites antennes montées sur un camion et qui peuvent suivre la météo, là où elle se produit. C'est le cas du Doppler on Wheels (ou **DOW**), du *Center for Severe Weather Research* de Boulder (Colorado), qui sert à la recherche sur la structure des orages violents, des ouragans et les phénomènes météorologiques de fine échelle. Ces radars utilisent une plus petite longueur d'onde pour conserver une bonne résolution.

Doppler on Wheels observant une tornade

Le radar est constitué d'une base fixe **0**, d'un support **1** en liaison pivot d'axe vertical (Δ_{10}) avec la base, et de l'antenne **2** en liaison pivot d'axe horizontal (Δ_{21}) avec **1**.







Support 1 **Antenne 2**

Données et hypothèses :

- le motoréducteur M_{01} délivre un couple C_{m01} et assure la rotation de **1** par rapport à **0**.

- le motoréducteur M_{12} délivre un couple C_{m12} et assure la rotation de **2** par rapport à **1**.

- moment d'inertie suivant l'axe de rotation en sortie de motoréducteur : J_m .

- le support **1** est modélisé par un cylindre creux surmonté d'un demi tore :
    - cylindre creux de rayons R_{ce}, R_{ci} et de longueur L_c
    - demi tore plein de rayons R_{to} et r_{to}.

- l'antenne **2** est composée d'une tige circulaire et d'une portion sphérique :
    - tige circulaire de rayon R_{ti} et de longueur L_{ti}
    - portion sphérique de rayon R_s, d'angle d'ouverture θ_s et d'épaisseur e_s.

- toutes les pièces sont en acier.

$$A.N.: J_m = 10^{-5}\, kg.m^2 \;;$$
$$R_{ce} = 45\, mm \;;\; R_{ci} = 40\, mm \;;\; L_c = 600\, mm \;;\; r_{to} = 5\, mm \;;\; R_{to} = 250\, mm \;;$$
$$R_{ti} = 5\, mm \;;\; L_{ti} = 500\, mm \;;\; R_s = 300\, mm \;;\; \theta_s = 45° \; et \; e_s = 4\, mm \;.$$

L'objectif est de déterminer les couples délivrés en sortie des motoréducteurs au cours du temps afin de les dimensionner.
Pour cela, il faut écrire 2 équations du PFD (équations de mouvement)

- Equation 1 : isoler **2**. Ecrire l'équation du moment dynamique en projection sur l'axe (Δ_{21})
- Equation 2 : isoler $1 \cup 2$. Ecrire l'équation du moment dynamique en projection sur l'axe (Δ_{10})

Méthode d'obtention des équations de mouvement

- Toute étude dynamique d'un système commence par le choix d'un repère de référence galiléen.
- Définir les sous-ensembles cinématiques et représenter le schéma cinématique du système.
- Ensuite, il faut fixer, à chaque sous-ensemble cinématique constituant le système, un repère.
- Les paramètres de position apparaissent alors : ils permettent de passer d'un repère à un autre.
- Une dernière étape consiste à déterminer les éventuelles relations entre les paramètres de position.

Il y a autant d'équations de mouvement à déterminer qu'il existe de paramètres de position indépendants.

La mise en place des paramètres - afin d'éviter les erreurs de signes - se fera de la façon suivante :

- un paramètre de translation sera toujours représenté positif sur le schéma (sa valeur est algébrique).
- un paramètre angulaire sera toujours représenté (de préférence petit) compris entre 0 et $\pi/4$ (sa valeur est algébrique)

Nous ne sommes pas toujours obligés de développer toutes les équations qu'offre le PFD (6, pour chaque système matériel isolé).

Le choix des équations à développer se fait à partir des paramètres indépendants :

- Pour un paramètre de **translation** suivant un axe $\vec{u}$ positionnant le système **Σ**,
  on isolera le système **Σ** et on écrira **l'équation de la résultante** en projection sur $\vec{u}$:

$$\vec{F}_{ext/\Sigma} \cdot \vec{u} = \overrightarrow{D_{\Sigma/0}} \cdot \vec{u} = m_\Sigma \, \overrightarrow{a(G)}_{\Sigma/0} \cdot \vec{u}$$

- Pour un paramètre de **rotation** autour d'un axe $(C, \vec{u})$ positionnant le système **Σ**,
  on isolera le système **Σ** et on écrira **l'équation des moments** au point ***C*** en projection sur $\vec{u}$:

$$\vec{M}_{ext/\Sigma}(C) \cdot \vec{u} = \overrightarrow{N_{\Sigma/0}}(C) \cdot \vec{u}$$

<u>NB :</u> afin de profiter pleinement de ce projet dans le cadre de votre formation, il est important de voir et comprendre le cours. C'est la synthèse du cours qui permettra de traiter la complexité du projet. Ainsi, si des parties théoriques ou des exercices vous posent problème, un cours spécifique sera mis en place à votre demande par l'enseignant ; l'important est de comprendre et maîtriser les notions étudiées afin de pouvoir les réutiliser ultérieurement.

<u>Remarques importantes :</u>

- Le système que vous devez modéliser comporte 3 solides comme l'exemple du double pendule présenté page suivante. Vous allez donc construire un repère lié à chaque solide.

  Comme **les axes de 2 liaisons se coupent en un point** (qui est **fixe**), il est **judicieux de choisir ce point pour l'origine des 3 repères.**

  Choisir également ce point (fixe) pour appliquer le théorème du moment dynamique.

- **Déterminer les centres de masse et les matrices d'inertie des différentes pièces.**

- **Isoler les systèmes dans le même ordre que dans l'exemple du double pendule.**

- **Projection du moment dynamique sur un axe :**

$$\vec{N}(C,\Sigma/0)\cdot\vec{u} = \left(\frac{d^{(0)}\vec{L}(C,\Sigma/0)}{dt} + m_\Sigma \vec{v}(C,\Sigma/0)\wedge\vec{v}(G,\Sigma/0)\right)\cdot\vec{u}$$

$$\textit{comme} \quad \left(\frac{d^{(0)}\vec{L}(C,\Sigma/0)}{dt}\right)\cdot\vec{u} = \frac{d^{(0)}\left(\vec{L}(C,\Sigma/0)\cdot\vec{u}\right)}{dt} - \vec{L}(C,\Sigma/0)\cdot\left(\frac{d^{(0)}\vec{u}}{dt}\right)$$

$$\textit{on a} \quad \vec{N}(C,\Sigma/0)\cdot\vec{u} = \frac{d^{(0)}\left(\vec{L}(C,\Sigma/0)\cdot\vec{u}\right)}{dt} - \vec{L}(C,\Sigma/0)\cdot\left(\frac{d^{(0)}\vec{u}}{dt}\right) + \left(m_\Sigma \vec{v}(C,\Sigma/0)\wedge\vec{v}(G,\Sigma/0)\right)\cdot\vec{u}$$

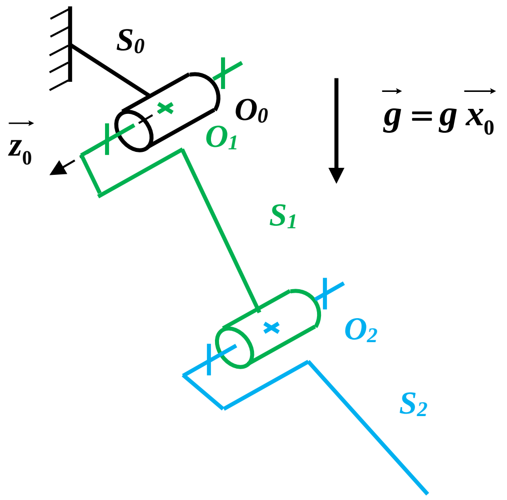
Malgré sa complexité, cette expression présente l'énorme avantage de ne pas faire intervenir d'accélérations ! De plus, on s'arrange en général pour ne pas avoir à calculer tous les termes :

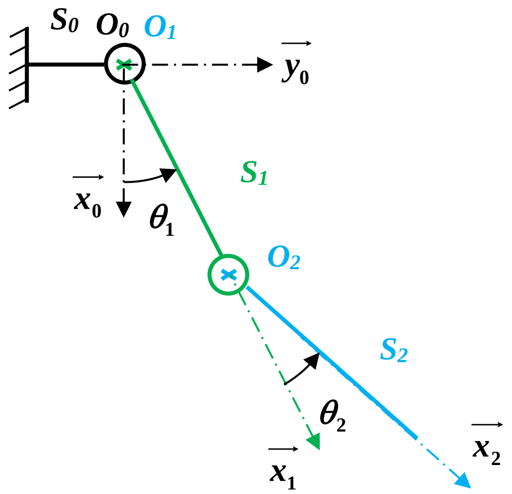
$\Rightarrow$ *en prenant C en G*

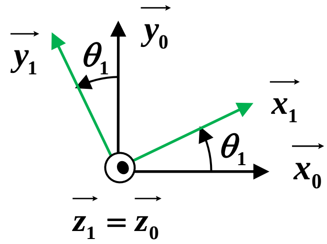
$$\boxed{\Rightarrow \textit{en prenant un point C de vitesse nulle(fixe/0)}}$$

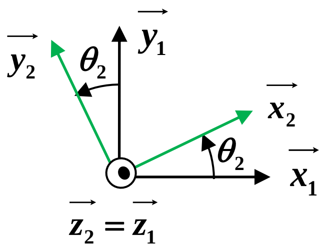
$\Rightarrow$ *en projetant sur un axe de direction fixe*

<u>Exemple :</u> Double pendule









$R_0 = (O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ *repère galiléen lié à S_0*

$R_1 = (O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ *repère lié à S_1*

$R_2 = (O_2, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ *repère lié à S_2*

Pour obtenir les équations du mouvement :

- On isole le système ***S₂*** et on écrit **l'équation des moments** au point ***O₂*** en projection sur $\vec{z}_0$:

$$\vec{M}\;(O_2, ext/S_2)\cdot\vec{z}_0 = \vec{N}\;(O_2, S_2/0)\cdot\vec{z}_0$$

En effet cette équation ne fait pas intervenir les composantes du torseur transmissible par la liaison pivot d'axe $(O_2, \vec{z}_0)$

$$\mathcal{T}_{1/2} = {}_{O_2}\left\{\vec{R}_{1/2} \quad \vec{M}(O_2, 1/2)\right\} = {}_{O_2}\begin{Bmatrix} X_{12} & L_{12} \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & 0 \end{Bmatrix}_{(-,-,\vec{z}_0)} \qquad \vec{M}(O_2, 1/2)\cdot\vec{z}_0 = 0$$

- On isole le système $(S_1 \cup S_2)$ et on écrit **l'équation des moments** au point ***O₁*** en projection sur $\vec{z}_0$:

$$\vec{M}\;(O_1, ext/S_1 \cup S_2)\cdot\vec{z}_0 = \vec{N}\;(O_1, S_1 \cup S_2/0)\cdot\vec{z}_0$$

En effet cette équation ne fait pas intervenir les composantes du torseur transmissible par la liaison pivot d'axe $(O_1, \vec{z}_0)$

$$\mathcal{T}_{0/1} = {}_{O_1}\left\{\vec{R}_{0/1} \quad \vec{M}(O_1, 0/1)\right\} = {}_{O_1}\begin{Bmatrix} X_{01} & L_{01} \\ Y_{01} & M_{01} \\ Z_{01} & 0 \end{Bmatrix}_{(-,-,\vec{z}_0)} \qquad \vec{M}(O_1, 0/1)\cdot\vec{z}_0 = 0$$

$$\textit{avec} \quad \vec{N}\;(O_1, S_1 \cup S_2/0) = \vec{N}\;(O_1, S_1/0) + \vec{N}\;(O_1, S_2/0)$$