

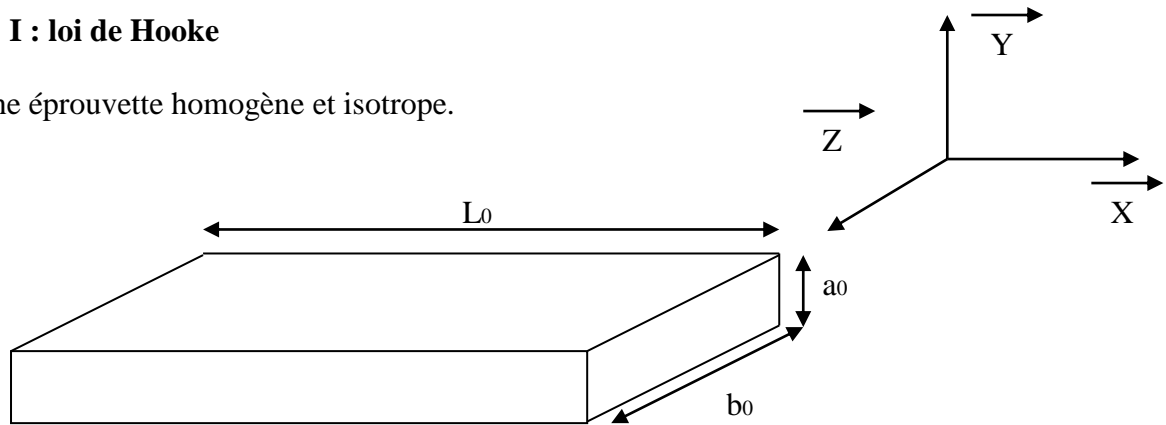
Livre 3

Chapitre VI : comportement élastique linéaire
Relations contraintes déformations

Le champ de contraintes et le champ des déformations sont liés. Recherchons ce lien.

I : loi de Hooke

Soit une éprouvette homogène et isotrope.



Dimensions initiales : L_0, a_0, b_0

On lui applique un effort \vec{F} suivant \vec{X} . Les dimensions finales sont L, a, b

Dans la partie centrale de l'éprouvette (loin des points d'application des forces) s'établit un champ uniaxial de contraintes.

$$[\sigma_{(M)}] = \begin{bmatrix} \vec{C}_{(M,\vec{X})} & \vec{C}_{(M,\vec{Y})} & \vec{C}_{(M,\vec{Z})} \\ \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{X} \\ \vec{Y} \\ \vec{Z} \end{bmatrix}; \forall M \in (\pi); \sigma_x = \frac{F}{S}$$

On mesure les dilatations linéaires :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{L - L_0}{L_0} = \frac{F}{E.S} = \frac{\sigma_x}{E} \\ \varepsilon_y = \frac{a - a_0}{a_0} = \frac{-\nu.F}{E.S} = \frac{-\nu.\sigma_x}{E}; \text{ et les } \gamma_{ij} \text{ sont nuls} \\ \varepsilon_z = \frac{-\nu.\sigma_x}{E} \end{array} \right.$$

Les directions principales des contraintes correspondent aux directions principales des déformations.

Cas général :
Les trois contraintes principales sont non nulles.

Taux de déformation	Dû à σ_x	Dû à σ_y	Dû à σ_z
ε_x	$\frac{\sigma_x}{E}$	$\frac{-\nu \cdot \sigma_y}{E}$	$\frac{-\nu \cdot \sigma_z}{E}$
ε_y	$\frac{-\nu \cdot \sigma_x}{E}$	$\frac{\sigma_y}{E}$	$\frac{-\nu \cdot \sigma_z}{E}$
ε_z	$\frac{-\nu \cdot \sigma_x}{E}$	$\frac{-\nu \cdot \sigma_y}{E}$	$\frac{\sigma_z}{E}$

La linéarité des relations permet de superposer les trois états d'équilibre.

$$s = \text{tr}[\sigma_{(M)}] = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E} \cdot (\sigma_y + \sigma_z) = \frac{1}{E} [(1+\nu)\sigma_x - \nu \cdot s] \\ \varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E} \cdot (\sigma_x + \sigma_z) = \frac{1}{E} [(1+\nu)\sigma_y - \nu \cdot s] \\ \varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E} \cdot (\sigma_x + \sigma_y) = \frac{1}{E} [(1+\nu)\sigma_z - \nu \cdot s] \end{cases} \Rightarrow \varepsilon_{ij} = \frac{1}{E} [(1+\nu)\sigma_{ij} - \nu \cdot s \cdot Id_{ij}]$$

$$\text{avec } [Id] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

de même dans un repère quelconque $(M, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E} [(1+\nu)\sigma_{ij} - \nu \cdot s \cdot Id_{ij}]$$

d'où les 6 relations

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E} [(1+\nu)\sigma_x - \nu \cdot s] \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E} [(1+\nu)\sigma_y - \nu \cdot s] \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E} [(1+\nu)\sigma_z - \nu \cdot s] \end{cases} \quad \begin{cases} \gamma_{xy} = \frac{1+\nu}{E} \cdot \tau_{xy} \\ \gamma_{xz} = \frac{1+\nu}{E} \cdot \tau_{xz} \\ \gamma_{zy} = \frac{1+\nu}{E} \cdot \tau_{zy} \end{cases}$$

Trace de la matrice des déformations (élongation) : $e = \text{tr}[\varepsilon_{(M)}] = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$

$$e = \frac{1-2\nu}{E} \cdot s$$

Coefficients de Lamé :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E} [(1+\nu)\sigma_{ij} - \nu \cdot s \cdot Id_{ij}] \Rightarrow \sigma_{ij} = \frac{E}{(1+\nu)} \cdot \varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{(1+\nu)} \cdot s \cdot Id_{ij}$$

$$\sigma_{ij} = \underbrace{\frac{E}{(1+\nu)}}_{2 \cdot \mu} \cdot \varepsilon_{ij} + \underbrace{\frac{\nu \cdot E}{(1+\nu) \cdot (1-2\nu)}}_{\lambda} \cdot e \cdot Id_{ij}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu = \frac{E}{(1+\nu) \cdot 2} = G \text{ (module de coulombou de cisaillement)} \\ \lambda = \frac{\nu \cdot E}{(1+\nu) \cdot (1-2\nu)} \end{array} \right.$$

μ et λ sont les coefficients de Lamé; ils caractérisent le matériaux comme E et ν

$$\left\{ \begin{array}{l} E = \mu \cdot \frac{3 \cdot \lambda + 2 \cdot \mu}{\lambda + \mu} \\ \nu = \frac{\lambda}{2 \cdot (\lambda + \mu)} \end{array} \right.$$

remarques:

$$\mu = G \geq 0$$

$$\nu \leq 0.5$$

Exemple I : une pièce (1) en alliage d'aluminium 7075 est placée entre deux supports indéformables, reliés entre eux par quatre boulons identiques en acier (diamètre D , longueur travaillant h , pas de la vis p). Le montage est supposé parfaitement symétrique.

Au contact, on serre les quatre écrous de 0.05 tour.

On donne : $E_{acier} = 2 \cdot 10^5$ MPa, $\nu_{acier} = 0.3$, $E_{alu} = 7,2 \cdot 10^4$ MPa, $\nu_{alu} = 0.3$

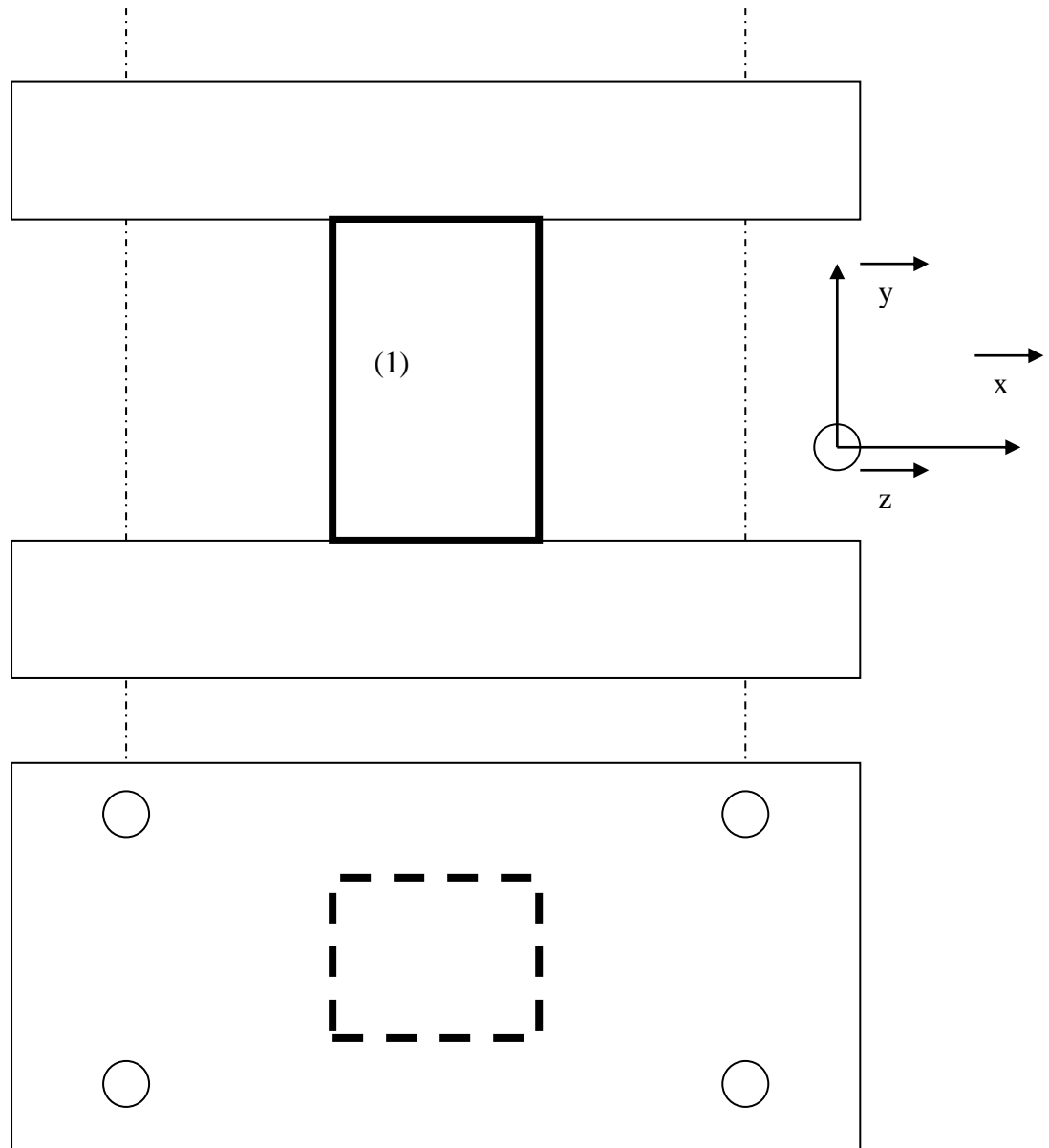
Pièce 1 : section carrée de côté a , hauteur h .

AN : $h = 1$ cm, $a = 1$ cm, $D = 8$ mm, $p = 1.25$ mm.

1 : déterminer les dimensions finales de la pièce (1). Application numérique. Donner la matrice des contraintes et des déformations au sein de la pièce (1).

2 : on effectue la même expérience mais en empêchant toute déformation de (1) suivant la direction \vec{x} . Déterminer la relation entre la pression de contact p sur les surfaces supérieure et inférieure et la pression de contact latérale q . Calculer p et q .

3 : on effectue la même expérience mais en empêchant toute déformation de (1) suivant les directions \vec{x} et \vec{z} . Déterminer la relation entre la pression de contact p sur les surfaces supérieure et inférieure et la pression de contact latérale q . Calculer p et q .



Solution I :

1 : le problème est hyperstatique (CF solution exemple boulon-entretoise déjà traité)

On trouve $\partial l_1 = -0.053 \text{ mm}$, $\partial l_2 = 0.009 \text{ mm}$, $F = 38203 \text{ N}$

La pièce travaille en traction donc :

$$[\sigma_{(M)}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_Y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \sigma_Y = -p = \frac{-F}{S_1} = -382 \text{ MPa}$$

$$[\varepsilon_{(M)}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_X & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_Y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_Z \end{bmatrix}, \varepsilon_Y = \frac{\sigma_Y}{E_1} = -0.00531, \varepsilon_X = \varepsilon_Z = -\nu \cdot \varepsilon_Y = 0.002$$

2 : on bloque la déformation suivant \vec{x} , donc $\varepsilon_X = 0$ et une contrainte suivant \vec{x} apparait.

$$[\sigma_{(M)}] = \begin{bmatrix} -q & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$[\varepsilon_{(M)}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_Y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_Z \end{bmatrix}, \varepsilon_X = \frac{1}{E}(-q + \nu p) = 0 \text{ donc } q = \nu p$$

$$\varepsilon_Y = \frac{\partial l_1}{h} = \frac{P}{E_1}(\nu^2 - 1), \partial l_1 = \frac{Ph}{E_1}(\nu^2 - 1)$$

$$\sigma_Y = -p = \frac{-F}{S_1}, F = PS_1$$

$$\text{Hooke : } \frac{F}{S_2} = E_2 \frac{\partial l_2}{h - pas.n}$$

$$\text{Géométrie : } \partial l_2 = \partial l_1 + pas.n$$

$$\text{D'où } p = 414 \text{ MPa, } q = 124 \text{ MPa, } F = 41363 \text{ N,}$$

$$\varepsilon_Y = \frac{1}{E}(-p + \nu q) = -0.00523, \varepsilon_Z = \frac{\nu}{E}(p + q) = 0.002$$

3 : on bloque la déformation suivant \vec{x} et \vec{z} , donc $\varepsilon_X = \varepsilon_Y = 0$ et une contrainte suivant \vec{x} et \vec{z} apparaissent.

$$[\sigma_{(M)}] = \begin{bmatrix} -q & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -q \end{bmatrix},$$

$$[\varepsilon_{(M)}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_Y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \varepsilon_X = \frac{1}{E}(-q + \nu p + \nu q) = 0 \text{ donc } q = \frac{\nu}{1-\nu}p$$

$$\partial l_1 = \frac{Ph}{E_1} \left(\frac{2\nu^2}{1-\nu} - 1 \right), F = PS_1$$

$$\text{Hooke : } \frac{F}{S_2} = E_2 \frac{\partial l_2}{h - pas.n}$$

$$\text{Géométrie : } \partial l_2 = \partial l_1 + pas.n$$

$$\text{D'où } p = 489 \text{ MPa, } q = 209 \text{ MPa, } F = 48871 \text{ N,}$$

$$\varepsilon_Y = \frac{1}{E}(-p + 2\nu q) = -0.00504$$

Exemple II : On comprime du caoutchouc dans un récipient cylindrique d'axe de révolution (O, \vec{z}) , par l'intermédiaire d'un piston sur lequel on applique un effort F. Soit q la pression sur les parois latérales du cylindre et p celle sur le piston et le fond. Un talcage du cylindre de caoutchouc permet de négliger les frottements caoutchouc-cylindre.

1 : Ecrire la matrice des contraintes au sein du caoutchouc.

En déduire la matrice des déformations du caoutchouc

2 : Donner la relation entre p et q si la déformation du cylindre en acier est nulle. Calculer la variation de volume du caoutchouc. Faire l'application numérique. Conclure.

3 : Donner la relation entre p et q si le cylindre en acier est une enveloppe mince déformable (on négligera la déformation du fond)

A.N :

$$\nu_{\text{caoutchouc}} = 0.5, \nu_{\text{acier}} = 0.3, E_{\text{acier}} = 210.10^3 \text{ MPa}, E_{\text{caoutchouc}} = 0.1.10^3 \text{ MPa}$$

rayon intérieur du cylindre = 8 cm, épaisseur = 2mm.

Solution II :

1 :

$$[\sigma_{(M)}] = \begin{bmatrix} -q & 0 & 0 \\ 0 & -q & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix}_{(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})},$$

$$[\varepsilon_{(M)}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_X & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_Y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_Z \end{bmatrix}, \varepsilon_X = \varepsilon_Y = \frac{1}{E}(-q + \nu p + \nu q); \varepsilon_Z = \frac{1}{E}(-p + 2\nu q)$$

2 : $\varepsilon_X = \varepsilon_Y = 0$

donc $q = \frac{\nu}{1-\nu}p$; AN : $q=p$, le caoutchouc se comporte comme un fluide : la pression est la même en tout point.

Variation relative de volume : $\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_X + \varepsilon_Y + \varepsilon_Z = tr[\varepsilon_{(M)}]$

AN : $\frac{\Delta V}{V} = 0$, le caoutchouc est incompressible

3 : ça se complique ! Voici l'idée :

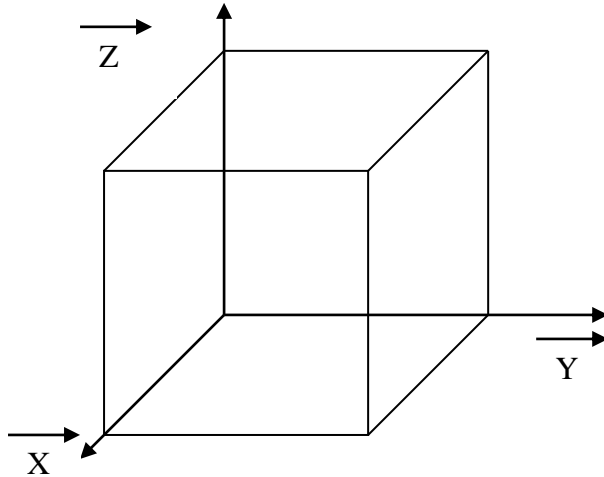
On a vu que la paroi travaille en traction : le périmètre va donc augmenter et l'épaisseur va diminuer (Poisson). On égalise ensuite le déplacement radial de la paroi avec celui du caoutchouc, et on obtient une relation entre p et q ...

Chapitre VII : dimensionnement d'un arbre

I : énergie potentielle élastique

C'est l'énergie emmagasinée lors de la déformation.

On isole un pavé élémentaire dX, dY, dZ .



Problème : évaluer le travail des efforts extérieurs

$$\text{par définition: } dW = \frac{1}{2} \cdot dF \cdot \partial X \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{effort élémentaire } dF = \frac{F}{S} \cdot dS \\ \text{déplacement élémentaire } \partial X = \frac{\partial X}{dX} \cdot dX \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} dW_x = \frac{1}{2} \cdot \sigma_x \cdot dY \cdot dZ \cdot \varepsilon_x \cdot dX = \frac{1}{2} \cdot \sigma_x \cdot \varepsilon_x \cdot dV \\ dW_y = \frac{1}{2} \cdot \sigma_y \cdot \varepsilon_y \cdot dV \\ dW_z = \frac{1}{2} \cdot \sigma_z \cdot \varepsilon_z \cdot dV \end{array} \right.$$

$$\text{travail total: } dW = \frac{1}{2} \cdot (\sigma_x \cdot \varepsilon_x + \sigma_y \cdot \varepsilon_y + \sigma_z \cdot \varepsilon_z) \cdot dV$$

$$\frac{dW}{dV} = \frac{1}{2} \cdot \text{tr} \{ [\sigma_{(M)}] \cdot [\varepsilon_{(M)}] \}$$

dans un repère non principal:

$$\frac{dW}{dV} = \frac{1}{2} \cdot (\sigma_x \cdot \varepsilon_x + \sigma_y \cdot \varepsilon_y + \sigma_z \cdot \varepsilon_z - 2 \cdot (\gamma_{xy} \cdot \tau_{xy} + \gamma_{xz} \cdot \tau_{xz} + \gamma_{zy} \cdot \tau_{zy}))$$

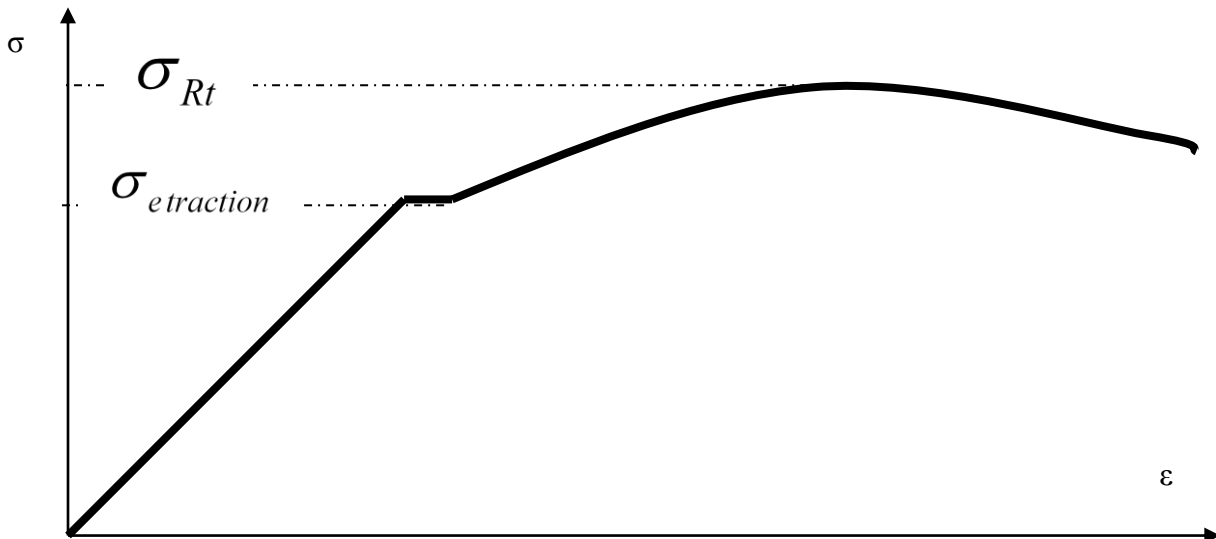
II : contraintes admissibles – contraintes équivalentes

Les contraintes et les déformations doivent être acceptables pour le matériau (inférieures à un seuil).

II 1 : contraintes admissibles : σ_a (critère élastique) ou R_p (critère à la rupture)

Exemple : barre travaillant en traction simple. Pour un matériau, on définit σ_{traction} et R_p

Essai de traction du matériau



Le coefficient de sécurité est là pour tenir compte de facteurs divers :
La non homogénéité du matériau (petits défauts moléculaires), les différences statistiques sur les caractéristiques du matériau, ses altérations, les phénomènes de fatigue (le fil de fer que l'on plie plusieurs fois et qui finit par casser !)

Un autre coefficient entre en jeu : le coefficient de concentration de contraintes k_c :
Un arbre usiné (rainure de clavette, rainure de circlips, augmentation de diamètre...) sera moins résistant qu'un arbre de diamètre inférieur non usiné (à matériau identique).

Les deux coefficients (sécurité et de concentration de contrainte) se multiplient et divisent la contrainte limite (élastique ou de rupture).

$$\sigma < \sigma_a = \frac{\sigma_{\text{traction}}}{k_{et} \cdot k_c} = \frac{\text{contrainte limite élastique traction}}{\text{coefficient sécurité élastique traction} * \text{coefficient concentration de contrainte}}$$

Ou

$$\sigma < R_p = \frac{\sigma_{Rt}}{k_{Rt} \cdot k_c} = \frac{\text{contrainte limite rupture traction}}{\text{coefficient sécurité rupture traction} * \text{coefficient concentration de contrainte}}$$

Abaques des coefficients de contraintes dans un arbre : retrouvez les sur « Meca Tools »

COEFFICIENTS DE CONCENTRATION DE CONTRAINTES DANS UN ARBRE.

Si la pièce présente des discontinuités de forme (entailles, épaulements, rainures, trous, mauvais état de surfaces, défauts métallurgiques, ...), autour de ces zones les contraintes réelles sont beaucoup plus importantes que les contraintes nominales obtenues à partir des calculs de la RDM. Ce phénomène local est appelé phénomène de concentration des contraintes.

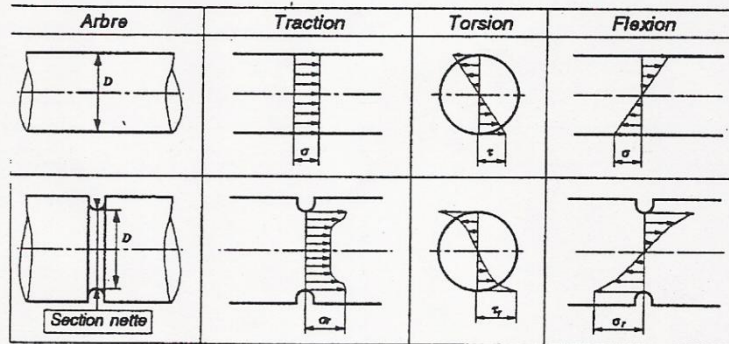
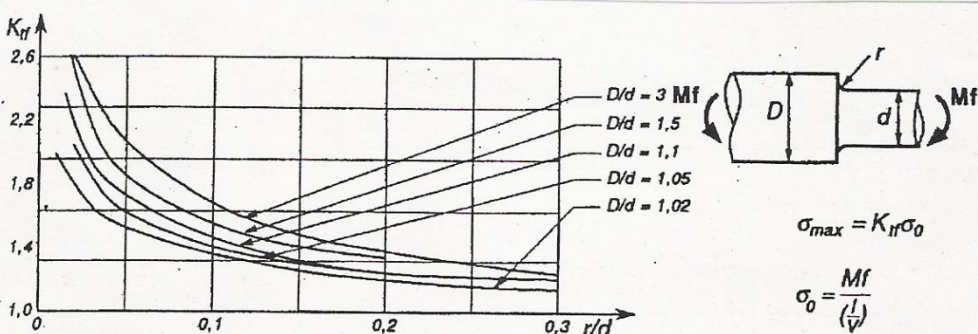
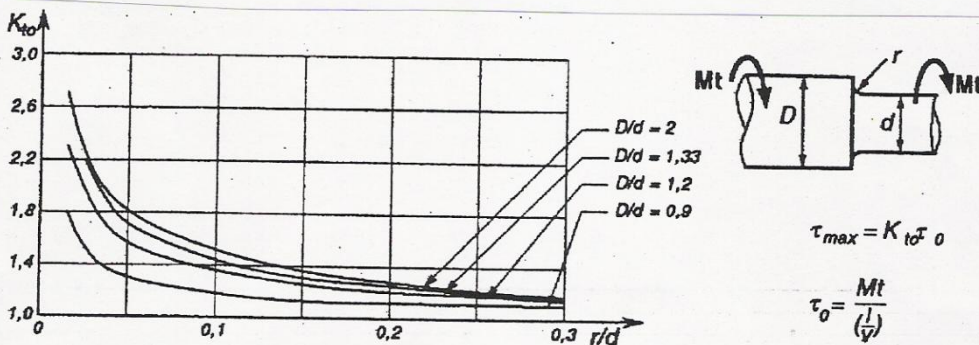
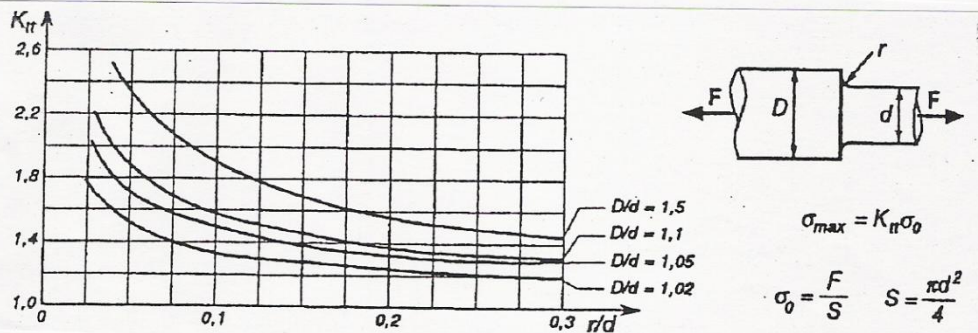


Figure 12.8 – Arbre entaillé par une gorge. Représentation des contraintes réelles



FLEXION

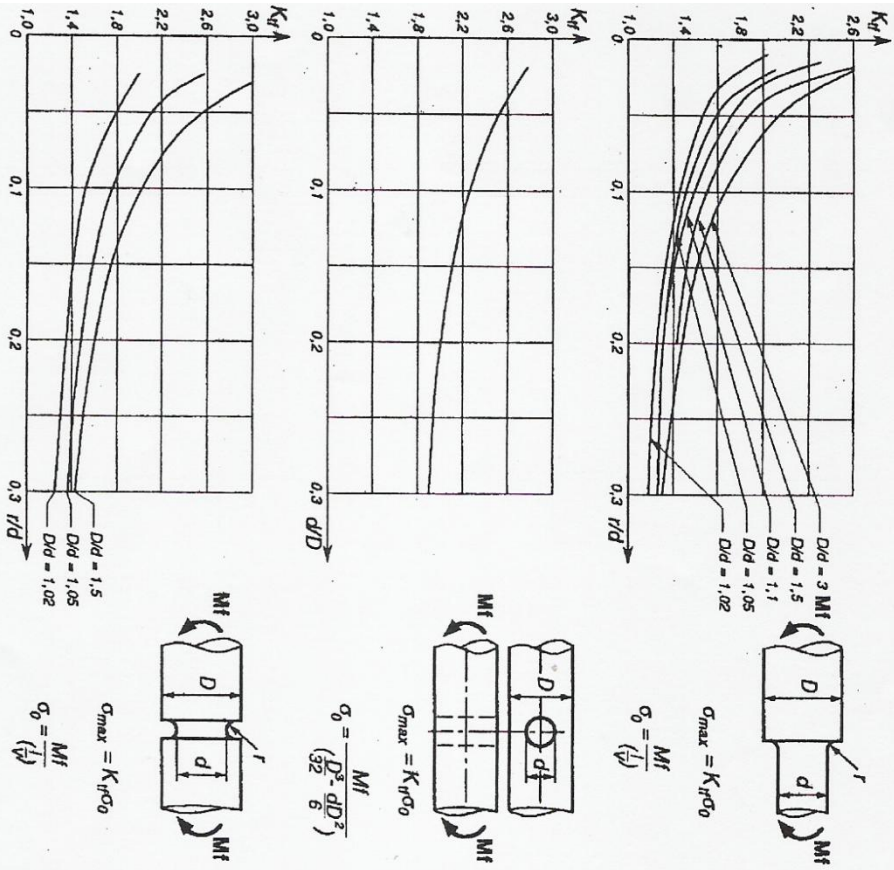


Figure 12.10 – Valeur de K_f en flexion pure pour différents types d'entailles

TORSION

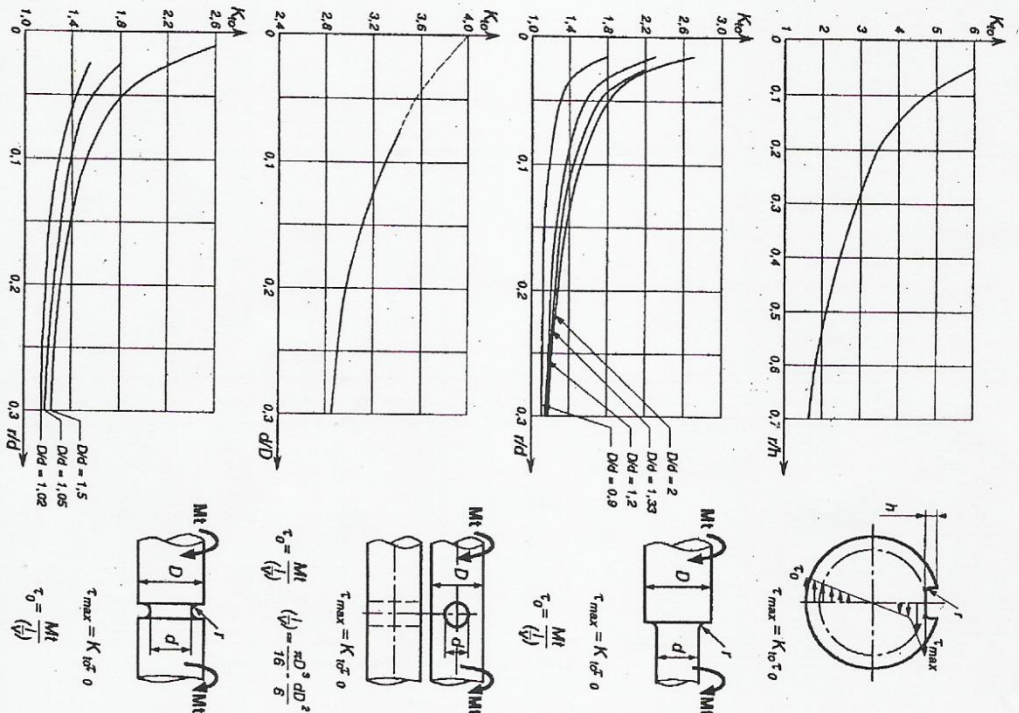


Figure 12.9 – Valeur de K_{t0} en torsion pure pour différents types d'entailles

II 2 : contraintes équivalentes σ_{eq}

On connaît grâce aux essais mécaniques la résistance élastique et à la rupture d'un matériau soumis à une sollicitation simple.

Exemple : pour un acier ordinaire, la limite élastique en traction est de $\sigma_{traction} = 340$ MPa, et de 250 MPa en cisaillement. Si cette dernière n'est pas connue, elle est alors minorée en divisant par 2 $\sigma_{traction}$, (170 MPa ici).

Mais quelle contrainte équivalente prendre en cas de sollicitations composées ?

Il faudra alors comparer cette contrainte équivalente σ_{eq} à $\sigma_{traction}$ (pour un acier ordinaire, 340/ke/kc).

σ_{eq} peut être définie selon plusieurs critères :

A : pour les matériaux fragiles (fontes)

a : critère de Rankine (contrainte principale maximale)

$$\sigma_{eq} = \sup(|\sigma_x|, |\sigma_y|, |\sigma_z|)$$

b : critère de Saint Venant (déformation principale maximale)

$$\sigma_{eq} = E \cdot \sup(|\varepsilon_x|, |\varepsilon_y|, |\varepsilon_z|)$$

B : pour les matériaux ductils ou malléables (aciers usuels, alliages d'aluminium)

c : critère de **Tresca** (contrainte tangentielle maximale) (utilisation plus large que Von Mises)

$$\sigma_{eq} = 2 \cdot \left[\sup \left(\left| \frac{\sigma_I - \sigma_J}{2} \right| \right) \right], \text{ ce qui correspond au diamètre du plus grand des trois cercles de Mohr.}$$

d : critère de Beltrami ou **Von Mises** (énergie de déformation maximale) (plus précis que Tresca pour la torsion pure et le cisaillement pur)

$$\sigma_{eq} = [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2 \cdot \nu \cdot (\sigma_x \cdot \sigma_y + \sigma_x \cdot \sigma_z + \sigma_z \cdot \sigma_y)]^{1/2}$$

Démarche de dimensionnement

- On commence par déterminer les efforts inconnus (transmis par les liaisons généralement) PFS sur l'ensemble du système.
- On détermine ensuite le torseur de cohésion en P, un point courant de la ligne moyenne. Souvent on distingue plusieurs cas.
- On trace les diagrammes des sollicitations simples pour déterminer la section la plus sollicitée.
- On détermine la matrice des contraintes relative à chaque sollicitation simple dans la section la plus sollicitée. On calcule le coefficient de concentration de contraintes, si nécessaire.
- On détermine les contraintes principales en diagonalisant la matrice des contraintes.
- On en déduit la contrainte équivalente avec un critère adapté.
- On calcule les dimensions de la pièce en fonction du matériau, ou on choisit le matériau en fonction des dimensions pour que la contrainte soit inférieure à la contrainte maximale admissible.

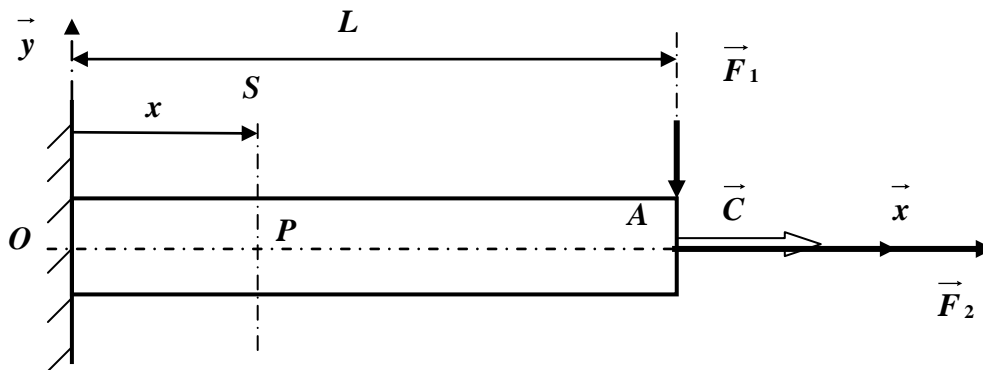
Voici une vidéo vous expliquant la démarche de dimensionnement d'un arbre par le critère de Tresca : [Vidéo Tresca](#)

Exercice 1 : dimensionnement d'arbres (flexion + torsion)

Une poutre circulaire en acier de rayon R , de longueur $L = 0,4$ m est encastree au point O .

Elle est soumise aux actions suivantes :

- action modélisée par le glisseur: $G_1 =_A \left\{ \begin{matrix} -F_1 \vec{y} & \vec{0} \end{matrix} \right\}$
- action modélisée par le glisseur: $G_2 =_A \left\{ \begin{matrix} F_2 \vec{x} & \vec{0} \end{matrix} \right\}$
- action modélisée par le couple: $C =_A \left\{ \begin{matrix} \vec{0} & C \vec{x} \end{matrix} \right\}$



Données :

- $E_{acier} = 200000$ MPa, $R_e = 500$ MPa, coefficient de sécurité $s = 2$.
- $F_1 = 5000$ N ; $F_2 = 40000$ N et $C = 250$ N.m .

1.1. Déterminer le torseur transmis par la liaison encastrement au point O .

1.2. Déterminer les composantes des éléments de réduction du torseur des efforts de cohésion au point P d'abscisse x , centre de la surface de coupe S .

1.3. Tracer les diagrammes des états de sollicitation.

1.4. Ecrire les matrices des contraintes pour chacune des sollicitations simples prises séparément.

En déduire le point M le plus sollicité de la section la plus sollicitée.

Ecrire la matrice des contraintes en M .

Déterminer les contraintes principales en M .

Dimensionner l'arbre (R) à la torsion idéale.

Solution I :

1.1. Déterminons le torseur transmis par la liaison encastrement au point O .

On isole la poutre

Bilan des actions extérieures

- action de pesanteur : négligée / aux autres

- action de l'encastrement au point O : $\tau_o = \begin{Bmatrix} \vec{R}_o & \vec{M}(O, \tau_o) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_o & L_o \\ Y_o & M_o \\ Z_o & N_o \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$

- actions au point A : $\tau_A = G_1 + G_2 + C = \begin{Bmatrix} \vec{R}_A & \vec{M}(A, \tau_A) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -F_1 \vec{y} & \vec{0} \\ F_2 \vec{x} & \vec{0} \\ \vec{0} & C \vec{x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_2 & C \\ -F_1 & \vec{0} \\ \vec{0} & \vec{0} \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$

$$\vec{M}(O, \tau_A) = \vec{M}(A, \tau_A) + \vec{OA} \wedge \vec{R}_A = C \vec{x} + ((L \vec{x}) \wedge (F_2 \vec{x} - F_1 \vec{y})) = C \vec{x} - L F_1 \vec{z}$$

La poutre est en équilibre par rapport au repère galiléen $Rg = (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, on peut donc appliquer le PFS

$$\tau(\bar{p}/p) = \tau_o + \tau_A = \mathbf{0} \quad \begin{cases} \vec{R}(\bar{p}/p) = \vec{R}_o + \vec{R}_A = \vec{0} \\ \vec{M}(O, \bar{p}/p) = \vec{M}(O, \tau_o) + \vec{M}(O, \tau_A) = \vec{0} \end{cases}$$

En projetant dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

$$\begin{cases} \vec{R}(\bar{p}/p) \cdot \vec{x} = X_o + F_2 = 0 \\ \vec{R}(\bar{p}/p) \cdot \vec{y} = Y_o - F_1 = 0 \\ \vec{R}(\bar{p}/p) \cdot \vec{z} = Z_o + 0 = 0 \\ \vec{M}(O, \bar{p}/p) \cdot \vec{x} = L_o + C = 0 \\ \vec{M}(O, \bar{p}/p) \cdot \vec{y} = M_o + 0 = 0 \\ \vec{M}(O, \bar{p}/p) \cdot \vec{z} = N_o - L F_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_o = -F_2 \\ Y_o = F_1 \\ Z_o = 0 \\ L_o = -C \\ M_o = 0 \\ N_o = L F_1 \end{cases}$$

$$\tau_o = \begin{Bmatrix} \vec{R}_o & \vec{M}(O, \tau_o) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -F_2 & -C \\ F_1 & \vec{0} \\ \vec{0} & L F_1 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

même point O

1.2. Déterminons les composantes des éléments de réduction du torseur des efforts de cohésion au point P d'abscisse x , centre de la surface de coupe S .

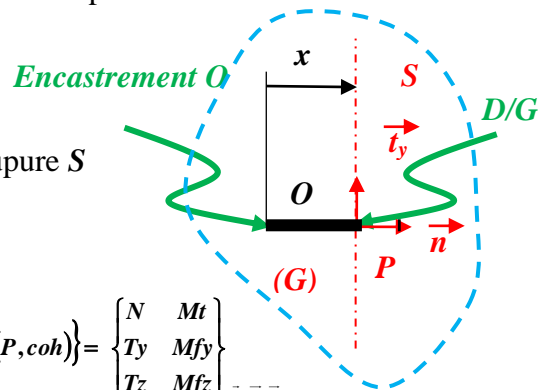
On isole le morceau de gauche (G)

par déf.:

$$\tau_{coh} = \tau(D/G)$$

$$\mathbf{R} = (P, \vec{n}, \vec{t}_y, \vec{t}_z) = (P, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$$

repère local associé à la surface de coupe S



Bilan des actions extérieures

- action du morceau de droite D : $\tau(D/G) = \tau_{coh} = \begin{Bmatrix} \vec{R}_{coh} & \vec{M}(P, coh) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N & Mt \\ Ty & Mfy \\ Tz & Mfz \end{Bmatrix}_{(\vec{n}, \vec{t}_y, \vec{t}_z)}$

- action de pesanteur : négligée / aux autres

- action de l'encastrement au point O : $\tau_o = \begin{Bmatrix} \vec{R}_o & \vec{M}(O, \tau_o) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -F_2 & -C \\ F_1 & \vec{0} \\ \vec{0} & L F_1 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$

$$\vec{M}(P, \tau_o) = \vec{M}(O, \tau_o) + \vec{PO} \wedge \vec{R}_o = -C \vec{x} + L F_1 \vec{z} + (-x \vec{x}) \wedge (-F_2 \vec{x} + F_1 \vec{y}) = -C \vec{x} + L F_1 \vec{z} + (-x F_1 \vec{z}) = -C \vec{x} + (L-x) F_1 \vec{z}$$

Le morceau de gauche (G) est en équilibre par rapport au repère galiléen Rg , on peut donc appliquer le PFS

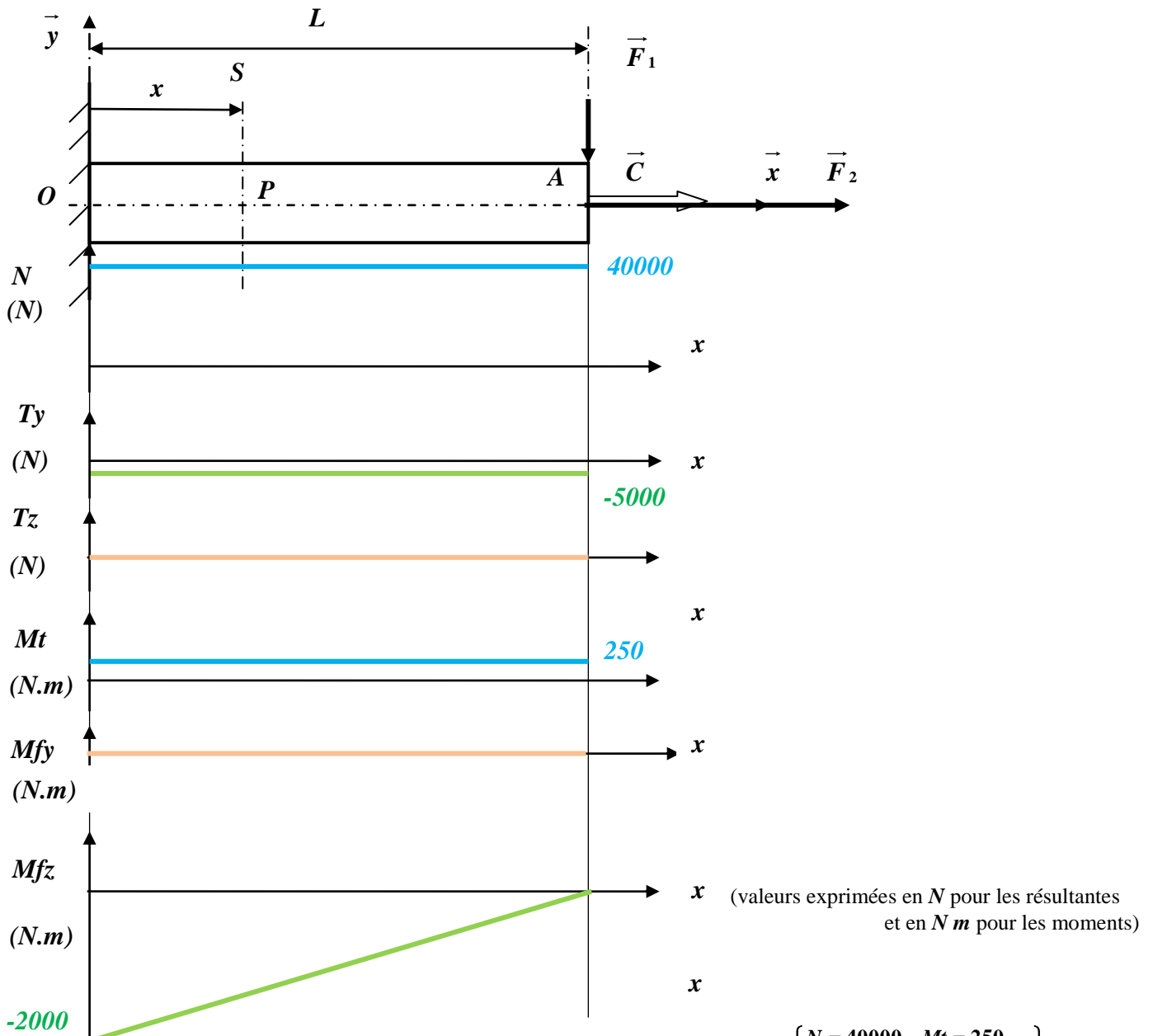
$$\tau(\bar{G}/G) = \tau_{coh} + \tau_o = \mathbf{0} \quad \begin{cases} \vec{R}(\bar{G}/G) = \vec{R}_{coh} + \vec{R}_o = \vec{0} \\ \vec{M}(P, \bar{G}/G) = \vec{M}(P, \tau_{coh}) + \vec{M}(P, \tau_o) = \vec{0} \end{cases}$$

même point P

En projetant dans la **base locale** $(\vec{n}, \vec{t}_y, \vec{t}_z) = (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(\bar{G}/G) \cdot \vec{x} = N - F_2 = 0 \\ \vec{R}(\bar{G}/G) \cdot \vec{y} = T_y + F_1 = 0 \\ \vec{R}(\bar{G}/G) \cdot \vec{z} = T_z + 0 = 0 \\ \vec{M}(P, \bar{G}/G) \cdot \vec{x} = Mt - C = 0 \\ \vec{M}(P, \bar{G}/G) \cdot \vec{y} = Mfy + 0 = 0 \\ \vec{M}(P, \bar{G}/G) \cdot \vec{z} = Mfz + (L-x)F_1 = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} N = F_2 \\ T_y = -F_1 \\ T_z = 0 \\ Mt = C \\ Mfy = 0 \\ Mfz = -(L-x)F_1 \end{array} \right. \quad \underline{\text{A.N.:}} \quad \left\{ \begin{array}{l} N = 40000 \\ T_y = -5000 \\ T_z = 0 \\ Mt = 250 \\ Mfy = 0 \\ Mfz = 5000x - 2000 \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{en } N \\ \\ \\ \text{en } N.m \end{array}$$

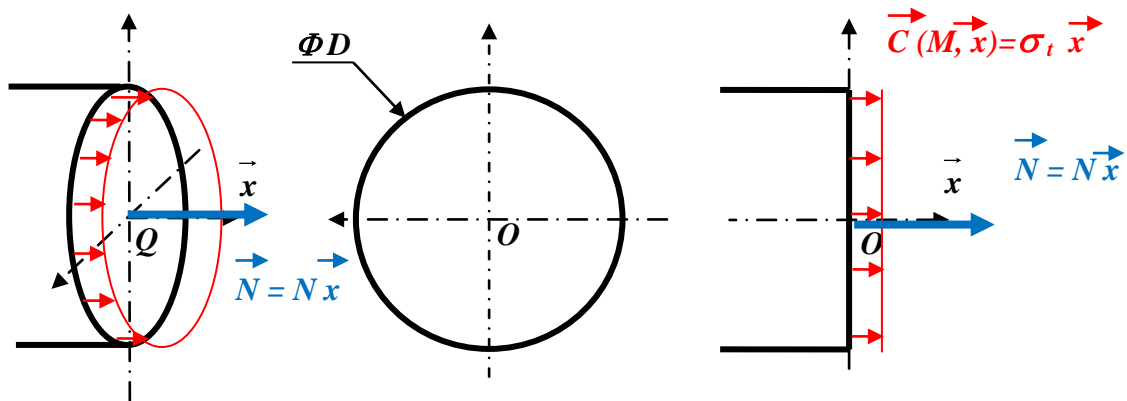
⇒ On vérifie que $\frac{dMfy}{dx} = 0 = Tz$ $\frac{dMfz}{dx} = F_1 = -Ty$



La section de centre O est la plus sollicitée $\Gamma_{coh} = \underset{o}{\left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{coh} \\ \vec{M}(O, coh) \end{array} \right\}} = \underset{o}{\left\{ \begin{array}{ll} N = 40000 & Mt = 250 \\ T_y = -5000 & Mfy = 0 \\ T_z = 0 & Mfz = -2000 \end{array} \right\}}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$

Donnons au point M le plus sollicité de la section de centre O .

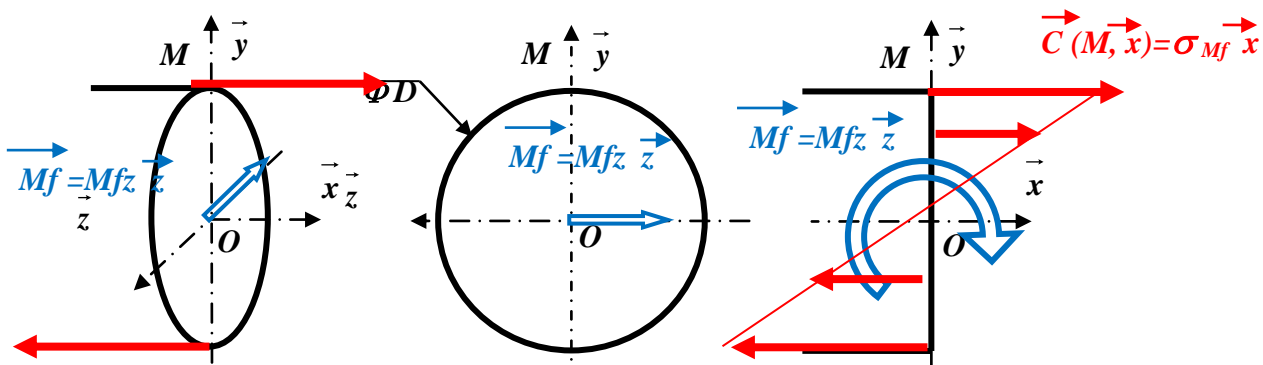
- La matrice des contraintes de traction. $N = 400000 \text{ N}$



En tout point M de la section de centre O et dans une base $(\vec{x}, -, -)$

$$[\sigma_t(M)] = \begin{bmatrix} \sigma_t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\vec{x}, -, -)} \quad \sigma_t = \frac{N}{S} = \frac{4N}{\pi D^2}$$

- La matrice des contraintes de flexion. $Mf = Mfz = -2000 \text{ N.m}$



Nous choisissons le point M parmi les deux points les plus sollicités de la section de centre O , en effet au point M nous avons :

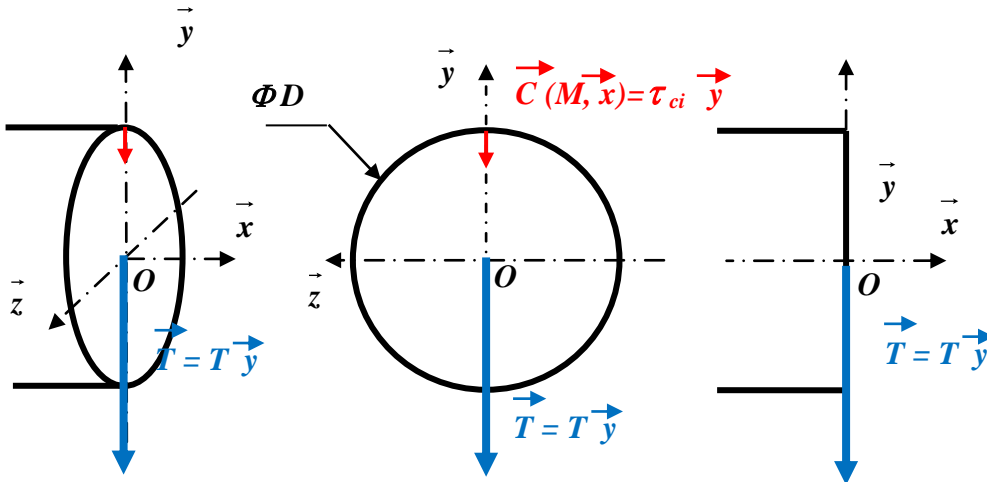
- Contrainte normale de flexion : $\sigma_{Mf} > 0$
- Contrainte normale de traction : $\sigma_t > 0$

$$[\sigma_f(M)] = \begin{bmatrix} \sigma_{Mf} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} \quad \sigma_{Mf} = -\frac{Mf}{I(O, \vec{z}_3)} y_M \quad \text{avec} \begin{cases} y_M = \frac{D}{2} \\ I(O, \vec{z}_3) = \frac{\pi D^4}{64} \end{cases}$$

$$\sigma_{Mf} = -\frac{32Mf}{\pi D^3}$$

- La matrice des contraintes de cisaillement. $T = Ty = -5000 \text{ N}$

On a $\vec{T} = T \vec{y}$

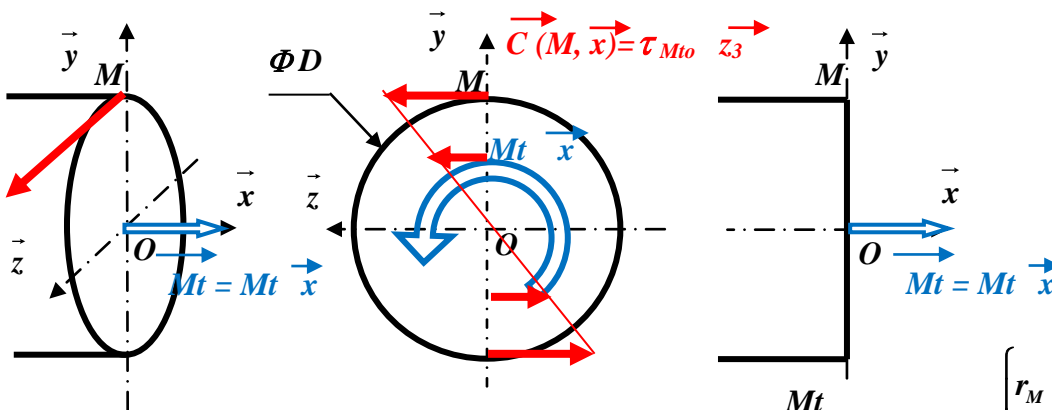


$$\tau_{ci} = \frac{T}{S} = \frac{4T}{\pi D^2}$$

En tout point M de la section de centre O et dans une base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

$$[\sigma_{ci}(M)] = \begin{bmatrix} 0 & \tau_{ci} & 0 \\ \tau_{ci} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

- La matrice des contraintes de torsion. $Mt = 250 \text{ N.m}$



$$[\sigma_{to}(M)] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{Mto} \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau_{Mto} & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

$$\tau_{Mto} = \frac{Mt}{I_O} r_M \quad \text{avec} \quad \begin{cases} r_M = \frac{D}{2} \\ I_O = \frac{\pi D^4}{32} \end{cases}$$

$$\tau_{Mto} = \frac{16Mt}{\pi D^3}$$

- La matrice des contraintes au point M le plus sollicité de la section de centre O .

En utilisant le PRINCIPE DE SUPERPOSITION on a :

$$[\sigma(M)] = [\sigma_t(M)] + [\sigma_{ci}(M)] + [\sigma_f(M)] + [\sigma_{to}(M)]$$

$$[\sigma(M)] = \begin{bmatrix} \sigma_t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} + \begin{bmatrix} 0 & \tau_{ci} & 0 \\ \tau_{ci} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} + \begin{bmatrix} \sigma_{Mf} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{Mto} \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau_{Mto} & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

$$[\sigma(M)] = \begin{bmatrix} \sigma_t + \sigma_{Mf} & \tau_{ci} & \tau_{Mto} \\ \tau_{ci} & 0 & 0 \\ \tau_{Mto} & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & 0 & 0 \\ \tau_{xz} & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

Diagonalisation de la matrice $[\sigma(M)]$

$$\det([\sigma(M)] - \lambda[I_3]) = \begin{vmatrix} \sigma_x - \lambda & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & -\lambda & 0 \\ \tau_{xz} & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \tau_{xz} \begin{vmatrix} \tau_{xy} & -\lambda \\ \tau_{xz} & 0 \end{vmatrix} + (-\lambda) \begin{vmatrix} \sigma_x - \lambda & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\det([\sigma(M)] - \lambda[I_3]) = \tau_{xz} (\lambda \tau_{xz}) + (-\lambda) [(\sigma_x - \lambda)(-\lambda) - (\tau_{xy} \tau_{xy})] = 0$$

$$\begin{cases} \lambda \tau_{xz}^2 + \lambda \tau_{xy}^2 + \lambda^2 (\sigma_x - \lambda) = 0 \\ \lambda (-\lambda^2 + \lambda \sigma_x + \tau_{xz}^2 + \tau_{xy}^2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_Y = \lambda_1 = 0 \\ \sigma_X = \lambda_2 = \frac{-\sigma_x - \sqrt{\sigma_x^2 + 4(\tau_{xz}^2 + \tau_{xy}^2)}}{-2} \\ \sigma_Z = \lambda_2 = \frac{-\sigma_x + \sqrt{\sigma_x^2 + 4(\tau_{xz}^2 + \tau_{xy}^2)}}{-2} \end{cases}$$

Dimensionnons l'arbre à la torsion idéale.

M_{it} : moment idéal de torsion selon le critère de Tresca : $M_{it} = \sqrt{Mf^2 + Mt^2}$

$$\tau_{torsion\ idéale} = \frac{M_{it}}{I_P} r \quad \text{avec} \quad \begin{cases} r_M = \frac{D}{2} \\ I_O = \frac{\pi D^4}{32} \end{cases} \quad \tau_{torsion\ idéale} = \frac{16 M_{it}}{\pi D^3}$$

Condition de résistance $\tau_{torsion\ idéale} \leq R_{pg} = \frac{R_{eg}}{s}$ avec $R_{eg} = \frac{1}{2} R_e$

$$\tau_{torsion\ idéale} = \frac{16 M_{it}}{\pi D^3} \leq R_{pg} = \frac{R_{eg}}{s} = \frac{R_e}{2s} \quad \Rightarrow \quad \frac{32s M_{it}}{\pi R_e} \leq D^3$$

$$D = \left(\frac{32s M_{it}}{\pi R_e} \right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{32s M_{it}}{\pi R_e}}$$

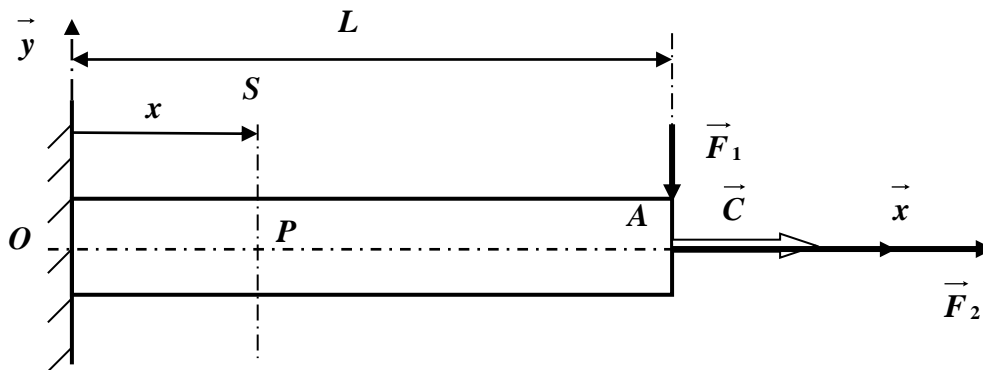
A.N. : $D = 0,0434\text{ m}$ soit $R = 21,7\text{ mm}$

Exercice 2: détermination du coefficient de sécurité (critère de Tresca – critère de Von Mises)

Une poutre circulaire en acier de rayon $R = 21,7$ mm, de longueur $L = 0,4$ m est encastée au point O .

Elle est soumise aux actions suivantes :

- action modélisée par le glisseur: $G_1 = {}_A \begin{Bmatrix} -F_1 \vec{y} & \vec{0} \end{Bmatrix}$
- action modélisée par le glisseur: $G_2 = {}_A \begin{Bmatrix} F_2 \vec{x} & \vec{0} \end{Bmatrix}$
- action modélisée par le couple: $C = {}_A \begin{Bmatrix} \vec{0} & C \vec{x} \end{Bmatrix}$



Données :

- $E_{acier} = 200000$ MPa, $R_e = 500$ MPa.
- $F_1 = 5000$ N ; $F_2 = 40000$ N et $C = 250$ N.m .

En reprenant les résultats de l'exercice 1, déterminer le coefficient de sécurité de l'arbre s par application du critère de Tresca puis du critère de Von Mises. Conclure.

Reprenons les résultats de l'exercice 1

La matrice des contraintes au point M le plus sollicité de la section de centre O .

$$[\sigma(M)] = \begin{bmatrix} \sigma_t + \sigma_{Mf} & \tau_{ci} & \tau_{Mto} \\ \tau_{ci} & 0 & 0 \\ \tau_{Mto} & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & 0 & 0 \\ \tau_{xz} & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \sigma_t = \frac{4N}{\pi D^2} = 27,04 \text{ MPa} \\ \sigma_{Mf} = -\frac{32Mf}{\pi D^3} = 249,21 \text{ MPa} \\ \tau_{ci} = \frac{4T}{\pi D^2} = -3,38 \text{ MPa} \\ \tau_{Mto} = \frac{16Mt}{\pi D^3} = 15,58 \text{ MPa} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_Y = \lambda_1 = 0 \\ \sigma_X = \lambda_2 = \frac{-\sigma_x - \sqrt{\sigma_x^2 + 4(\tau_{xz}^2 + \tau_{xy}^2)}}{-2} = 277,17 \text{ MPa} \\ \sigma_Z = \lambda_3 = \frac{-\sigma_x + \sqrt{\sigma_x^2 + 4(\tau_{xz}^2 + \tau_{xy}^2)}}{-2} = -0,92 \text{ MPa} \end{cases}$$

Contrainte équivalente selon le critère de Tresca

$$\sigma_{eq} = \sup(|\sigma_i - \sigma_j|) = \sigma_X - \sigma_Z = 278,09 \text{ MPa}$$

$$\text{Condition de résistance } \sigma_{eq} \leq R_{pe} = \frac{R_e}{s} \implies \text{Coefficient de sécurité } s = \frac{R_e}{\sigma_{eq}} = 1,8$$

Contrainte équivalente selon le critère de Von Mises

$$\sigma_{eq} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_X - \sigma_Y)^2 + (\sigma_Y - \sigma_Z)^2 + (\sigma_Z - \sigma_X)^2} = 277,63 \text{ MPa}$$

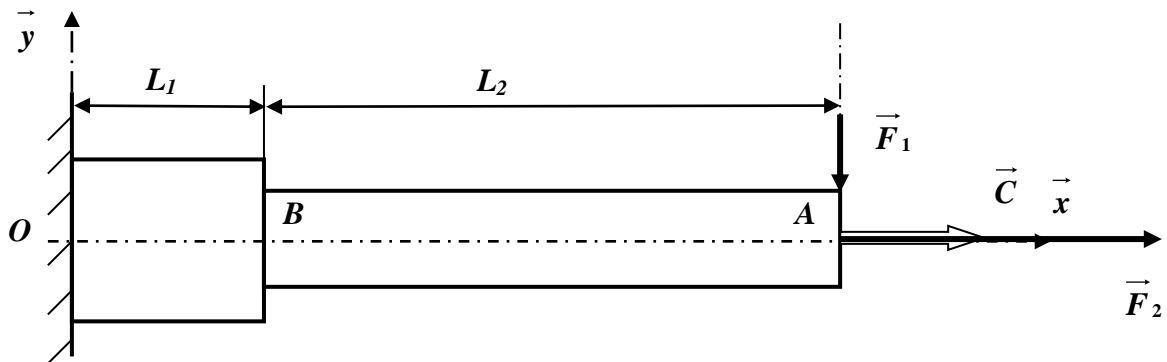
$$\text{Condition de résistance } \sigma_{eq} \leq R_{pe} = \frac{R_e}{s} \implies \text{Coefficient de sécurité } s = \frac{R_e}{\sigma_{eq}} = 1,8$$

Exercice 3 :

Une poutre circulaire en acier est encastree u point O . Elle est constituée de deux parties, l'une de diamètre $D_1 = 60$ mm et de longueur $L_1 = 0,1$ m, l'autre de diamètre $D_2 = 40$ mm et de longueur $L_2 = 0,3$ m avec un rayon de raccordement $r = 2$ mm.

Elle est soumise aux actions suivantes :

- action modélisée par le glisseur: $G_1 =_A \left\{ \begin{matrix} -F_1 \vec{y} & \vec{0} \end{matrix} \right\}$
- action modélisée par le glisseur: $G_2 =_A \left\{ \begin{matrix} F_2 \vec{x} & \vec{0} \end{matrix} \right\}$
- action modélisée par le couple: $C =_A \left\{ \begin{matrix} \vec{0} & C \vec{x} \end{matrix} \right\}$



Données :

- $E_{acier} = 200000$ MPa, $R_e = 500$ MPa.
- $F_1 = 5000$ N ; $F_2 = 40000$ N et $C = 250$ N m .

3.1. Déterminer le torseur des efforts de cohésion.

3.2. Déterminer la section la plus sollicitée.

3.3. Déterminer le coefficient de sécurité s appliqué à cette pièce (critère de Tresca).

Déterminons le torseur des efforts de cohésion.

Reprenons les résultats de l'exercice 1 avec : $L = L_1 + L_2$

$$\tau_{coh}(D/G) = \tau_{coh} = \underset{P}{\left\{ \begin{array}{l} \bar{R}_{coh} \\ \bar{M}(P, coh) \end{array} \right\}} = \underset{P}{\left\{ \begin{array}{l} N \quad Mt \\ Ty \quad Mfy \\ Tz \quad Mfz \end{array} \right\}}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$$

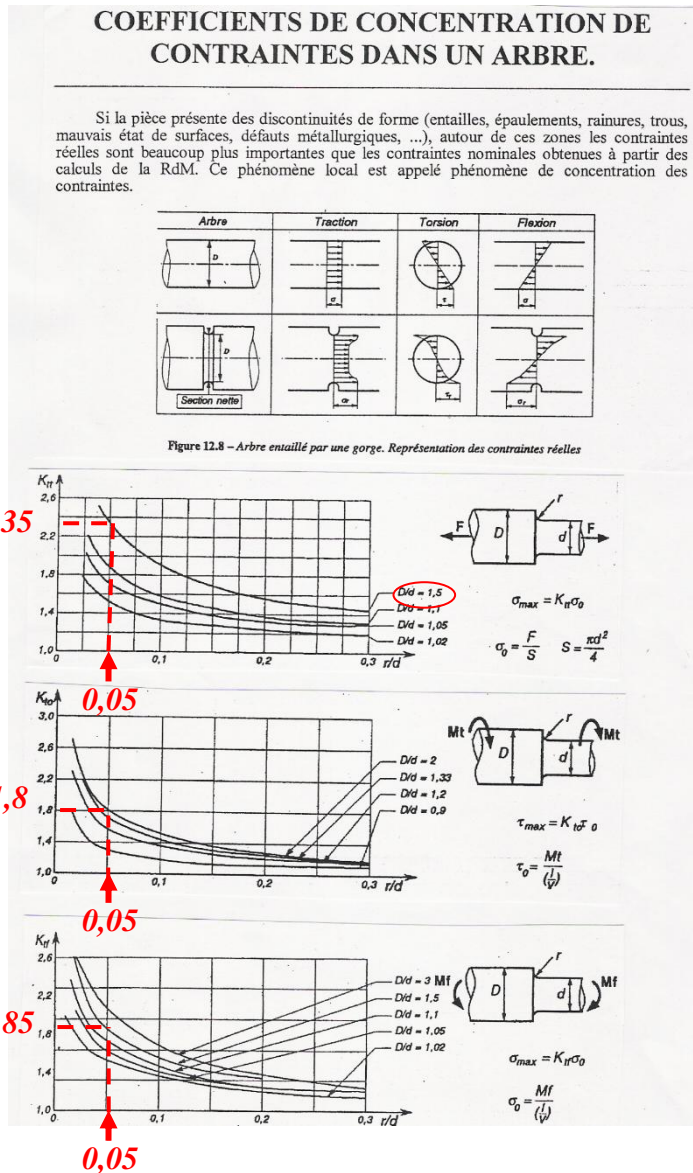
$$\left\{ \begin{array}{l} N = F_2 \\ Ty = -F_1 \\ Tz = 0 \\ Mt = -C \\ Mfy = 0 \\ Mfz = -(L-x)F_1 = [(L_1 + L_2) - x] F_1 \end{array} \right.$$

La section la plus sollicitée est la section de centre B ($x_B = L_1$)

En effet elle présente une variation brusque de section (épaulement). Il nous faut donc tenir compte du phénomène de **concentration des contraintes**.

$$\tau_{coh} = \underset{B}{\left\{ \begin{array}{l} \bar{R}_{coh} \\ \bar{M}(B, coh) \end{array} \right\}} = \underset{B}{\left\{ \begin{array}{l} N = 40000 \quad Mt = 250 \\ Ty = -5000 \quad Mfy = 0 \\ Tz = 0 \quad Mfz = -1500 \end{array} \right\}}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$$

(valeurs exprimées en N pour les résultantes et en Nm pour les moments)



La matrice des contraintes au point M le plus sollicité de la section de centre B .

$$[\sigma(M)] = \begin{bmatrix} K_{tt}\sigma_t + K_{tf}\sigma_{Mf} & \tau_{ci} & K_{to}\tau_{Mto} \\ \tau_{ci} & 0 & 0 \\ K_{to}\tau_{Mto} & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & 0 & 0 \\ \tau_{xz} & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \sigma_t = \frac{4N}{\pi D_2^2} = 31,83 \text{ MPa} \\ \sigma_{Mf} = -\frac{32Mf}{\pi D_2^3} = 238,73 \text{ MPa} \\ \tau_{ci} = \frac{4T}{\pi D_2^2} = -3,98 \text{ MPa} \\ \tau_{Mto} = \frac{16Mt}{\pi D_2^3} = 19,89 \text{ MPa} \end{cases}$$

Déterminons le coefficient de sécurité s appliqué à cette pièce (critère de Tresca).

$$\text{la diagonalisation donne} \quad \begin{cases} \sigma_Y = \lambda_1 = 0 \\ \sigma_X = \lambda_2 = \frac{-\sigma_x - \sqrt{\sigma_x^2 + 4(\tau_{xz}^2 + \tau_{xy}^2)}}{-2} = 518,95 \text{ MPa} \\ \sigma_Z = \lambda_2 = \frac{-\sigma_x + \sqrt{\sigma_x^2 + 4(\tau_{xz}^2 + \tau_{xy}^2)}}{-2} = -2,5 \text{ MPa} \end{cases}$$

Contrainte équivalente selon le critère de Tresca

$$\sigma_{eq} = \sup(|\sigma_I - \sigma_J|) = \sigma_X - \sigma_Z = 521,45 \text{ MPa}$$

$$\text{Condition de résistance } \sigma_{eq} \leq R_{pe} = \frac{R_e}{s} \quad \Rightarrow \quad \text{Coefficient de sécurité } s = \frac{R_e}{\sigma_{eq}} = 0,96$$

Problème de synthèse :

Le mécanisme de la page suivante représente un réducteur à axes perpendiculaires.

Objectif : vérifier le dimensionnement de l'arbre 3 par le critère de Tresca.

Données :

- Contraintes maximales admissibles pour l'acier XC38 utilisé pour l'arbre (3) :

$$R_e = \sigma_e = 500 \text{ MPa} ; R_{eg} = 250 \text{ MPa}$$

- Coefficient de sécurité : $s = 2$.

- $\overrightarrow{FE} = c \vec{x} ; \overrightarrow{FQ} = b \vec{x} ; \overrightarrow{QH} = c \vec{y}$ et $\overrightarrow{EG} = g \vec{x}$

$$a = 79 \text{ mm} ; b = 42 \text{ mm} ; c = 34 \text{ mm} \text{ et } g = 40 \text{ mm}$$

Efforts transmis :

- L'action du palier E modélisée par le glisseur: $G_E = {}_E \left\{ \begin{matrix} \vec{F}_e \\ \vec{0} \end{matrix} \right\} \quad \vec{F}_e = X_e \vec{x} + Y_e \vec{y} + Z_e \vec{z} \quad \text{avec} \begin{cases} X_e = -2350 \text{ N} \\ Y_e = 1920 \text{ N} \\ Z_e = -2165 \text{ N} \end{cases}$

- L'action du palier F modélisée par le glisseur: $G_F = {}_F \left\{ \begin{matrix} \vec{F}_f \\ \vec{0} \end{matrix} \right\} \quad \vec{F}_f = Y_f \vec{y} + Z_f \vec{z} \quad \text{avec} \begin{cases} Y_f = -210 \text{ N} \\ Z_f = -1905 \text{ N} \end{cases}$

- L'action du pignon modélisée en H par le glisseur: $G_H = {}_H \left\{ \begin{matrix} \vec{F}_h \\ \vec{0} \end{matrix} \right\} \quad \vec{F}_h = X_h \vec{x} + Y_h \vec{y} + Z_h \vec{z} \quad \text{avec} \begin{cases} X_h = 2350 \text{ N} \\ Y_h = -1710 \text{ N} \\ Z_h = 4070 \text{ N} \end{cases}$

- L'action du couple en G : $C_G = {}_G \left\{ \begin{matrix} \vec{0} \\ \vec{C} \end{matrix} \right\} \quad \vec{C} = C \vec{x} \quad \text{avec } C = -138 \text{ N.m}$

1. Déterminer les composantes des éléments de réduction du torseur des efforts de cohésion au point P d'abscisse x dans le repère $(F, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, centre de la surface de coupure S . On a $\overrightarrow{FP} = x \vec{x}$.

2. Tracer les diagrammes des états de sollicitation.

En déduire la section la plus sollicitée.

3. Les outils utilisés pour l'usinage de l'axe 3 ont un rayon de 3 mm en tournage et 1,6 mm en fraisage. Rainure de clavette : $h = 3 \text{ mm}$.

En tenant compte des concentrations de contraintes, calculer dans la section la plus sollicitée:

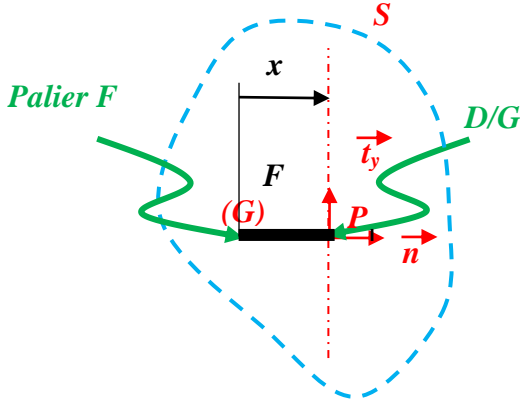
- La matrice des contraintes de traction.
- La matrice des contraintes de cisaillement.
- La matrice des contraintes de torsion.
- La matrice des contraintes de flexion.

4. Vérifier si l'axe 3 est bien dimensionné suivant le critère de Tresca.

Problème de synthèse : correction

1. Déterminer les composantes des éléments de réduction du torseur des efforts de cohésion au point P d'abscisse x dans le repère $(F, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, centre de la surface de coupure S . On a $\vec{FP} = x \vec{x}$. ON DISTIGUE 3 CAS

1^{er} cas P situé entre F et Q ($0 \leq x < b$)



On isole le morceau de gauche (G)

par déf.:

$$\tau_{coh} = \tau(D/G)$$

$$R = (P, \vec{n}, \vec{t}_y, \vec{t}_z) = (P, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$$

repère local associé à la surface de coupure S

Bilan des actions extérieures

- action du morceau de droite D :

$$\tau(D/G) = \tau_{coh} = \underset{P}{\left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{coh} \\ \vec{M}(P, coh) \end{array} \right\}} = \underset{(\vec{n}, \vec{t}_y, \vec{t}_z)}{\left\{ \begin{array}{l} N \\ Mt \\ Ty \\ Mfy \\ Tz \\ Mfz \end{array} \right\}}$$

- action de pesanteur : négligée / aux autres

- action du palier F :

$$G_F \equiv \left\{ \vec{F}_f, \vec{0} \right\} \quad \vec{F}_f = Y_f \vec{y} + Z_f \vec{z} \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{l} Y_f = -210N \\ Z_f = -1905N \end{array} \right.$$

$$\vec{M}(P, G_F) = \vec{M}(F, G_F) + \vec{PF} \wedge \vec{F}_f = \vec{0} + ((-x \vec{x}) \wedge (Y_f \vec{y} + Z_f \vec{z})) = (x Z_f) \vec{y} + (-x Y_f) \vec{z}$$

Le morceau de gauche (G) est en équilibre par rapport au repère galiléen R , on peut donc appliquer le PFS

$$\tau(\bar{G}/G) = \tau_{coh} + G_F = \vec{0} \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(\bar{G}/G) = \vec{R}_{coh} + \vec{F}_f = \vec{0} \\ \vec{M}(P, \bar{G}/G) = \vec{M}(P, \tau_{coh}) + \vec{M}(P, G_F) = \vec{0} \end{array} \right.$$

même point P

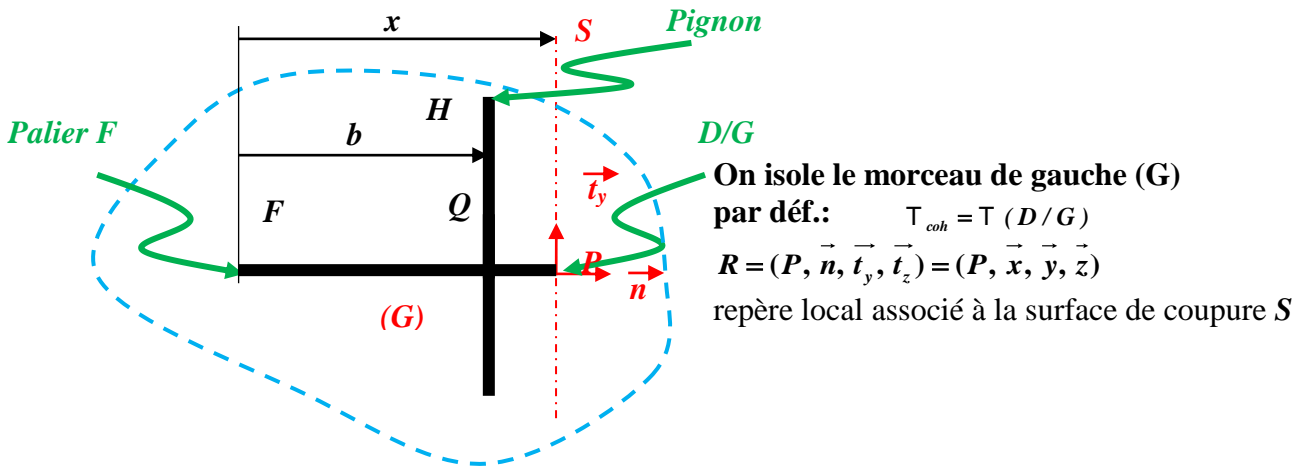
En projetant dans la **base locale** $(\vec{n}, \vec{t}_y, \vec{t}_z) = (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(\bar{G}/G) \cdot \vec{x} = N + 0 = 0 \\ \vec{R}(\bar{G}/G) \cdot \vec{y} = Ty + Y_f = 0 \\ \vec{R}(\bar{G}/G) \cdot \vec{z} = Tz + Z_f = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} N = 0 \\ Ty = -Y_f \\ Tz = -Z_f \\ Mt = 0 \\ Mfy = -x Z_f \\ Mfz = x Y_f \end{array} \right. \quad \underline{\text{A.N.:}} \quad \left\{ \begin{array}{l} N = 0 \\ Ty = 210 \\ Tz = 1905 \end{array} \right\} \text{ en } N$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{M}(P, \bar{G}/G) \cdot \vec{x} = Mt + 0 = 0 \\ \vec{M}(P, \bar{G}/G) \cdot \vec{y} = Mfy + x Z_f = 0 \\ \vec{M}(P, \bar{G}/G) \cdot \vec{z} = Mfz - x Y_f = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} Mt = 0 \\ Mfy = 1905x \\ Mfz = -210x \end{array} \right\} \text{ en } N.m$$

On vérifie que $\frac{dMfy}{dx} = -Z_f = Tz$ $\frac{dMfz}{dx} = Y_f = -Ty$

2^{ème} cas P situé entre Q et E ($b \leq x < a$)



Bilan des actions extérieures

Bilan du 1er cas

- action du morceau de droite D : $T(D/G) = T_{coh} = {}_P \{ \vec{R}_{coh} \quad \vec{M}(P, coh) \} = \begin{Bmatrix} N & Mt \\ Ty & Mfy \\ Tz & Mfz \end{Bmatrix}_{(\vec{n}, \vec{t}_y, \vec{t}_z)}$
- action de pesanteur : négligée / aux autres
- action du palier F : $G_F = {}_F \{ \vec{F}_f \quad \vec{0} \} \quad \vec{F}_f = Y_f \vec{y} + Z_f \vec{z} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} Y_f = -210N \\ Z_f = -1905N \end{cases}$
- action du pignon : $G_H = {}_H \{ \vec{F}_h \quad \vec{0} \} \quad \vec{F}_h = X_h \vec{x} + Y_h \vec{y} + Z_h \vec{z} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} X_h = 2350N \\ Y_h = -1710N \\ Z_h = 4070N \end{cases}$

$$\vec{M}(P, G_F) = \vec{M}(F, G_F) + \vec{P}F \wedge \vec{F}_f = \vec{0} + ((-x \vec{x}) \wedge (Y_f \vec{y} + Z_f \vec{z})) = (x Z_f) \vec{y} + (-x Y_f) \vec{z}$$

$$\vec{M}(P, G_H) = \vec{M}(H, G_H) + \vec{P}H \wedge \vec{F}_h = \vec{0} + [(b-x) \vec{x} + c \vec{y}] \wedge (X_h \vec{x} + Y_h \vec{y} + Z_h \vec{z}) = (c Z_h) \vec{x} - (b-x) Z_h \vec{y} + [(b-x) Y_h - c X_h] \vec{z}$$

Le morceau de gauche (G) est en équilibre par rapport au repère galiléen R , on peut donc appliquer le PFS

$$T(\vec{G}/G) = T_{coh} + G_F + G_H = \vec{0} \quad \begin{cases} \vec{R}(\vec{G}/G) = \vec{R}_{coh} + \vec{F}_f + \vec{F}_h = \vec{0} \\ \vec{M}(P, \vec{G}/G) = \vec{M}(P, T_{coh}) + \vec{M}(P, G_F) + \vec{M}(P, G_H) = \vec{0} \end{cases}$$

En projetant dans la **base locale** $(\vec{n}, \vec{t}_y, \vec{t}_z) = (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

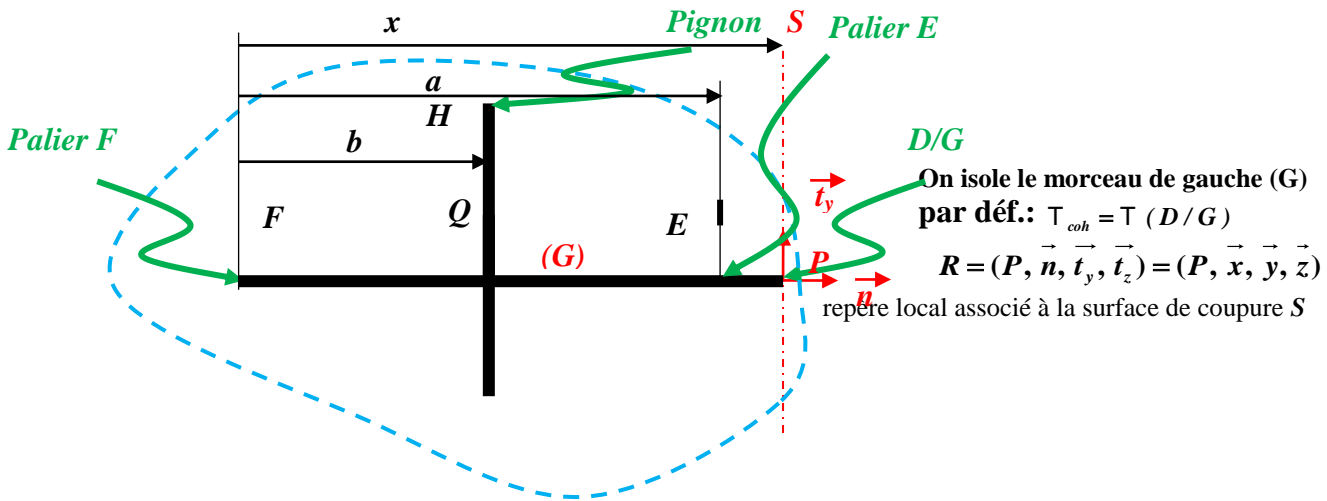
même point P

$$\begin{cases} \vec{R}(\vec{G}/G) \cdot \vec{x} = N + 0 + X_h = 0 \\ \vec{R}(\vec{G}/G) \cdot \vec{y} = Ty + Y_f + Y_h = 0 \\ \vec{R}(\vec{G}/G) \cdot \vec{z} = Tz + Z_f + Z_h = 0 \\ \vec{M}(P, \vec{G}/G) \cdot \vec{x} = Mt + 0 + c Z_h = 0 \\ \vec{M}(P, \vec{G}/G) \cdot \vec{y} = Mfy + x Z_f - (b-x) Z_h = 0 \\ \vec{M}(P, \vec{G}/G) \cdot \vec{z} = Mfz - x Y_f + (b-x) Y_h - c X_h = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N = -X_h \\ Ty = -Y_f - Y_h \\ Tz = -Z_f - Z_h \\ Mt = -c Z_h \\ Mfy = -x Z_f + (b-x) Z_h \\ Mfz = -x Y_f - (b-x) Y_h + c X_h \end{cases} \quad \underline{\text{A.N.:}} \quad \begin{cases} N = -2350 \\ Ty = 1920 \\ Tz = -2165 \\ Mt = -138 \\ Mfy = -2165x + 171 \\ Mfz = -1920x + 151,72 \end{cases} \begin{matrix} \text{en } N \\ \text{en } N.m \end{matrix}$$

On vérifie que $\frac{dMfy}{dx} = -Z_f - Z_h = Tz$

$$\frac{dMfz}{dx} = Y_f + Y_h = -Ty$$

3^{ème} cas P situé entre E et G ($a \leq x < a + g$)



Bilan des actions extérieures

Bilan du 2^{ème} cas

- action du morceau de droite D : $T(D/G) = T_{coh} = \underset{P}{\vec{R}_{coh}} \quad \vec{M}(P, coh) = \begin{Bmatrix} N & Mt \\ Ty & Mfy \\ Tz & Mfz \end{Bmatrix}_{(\vec{n}, \vec{t}_y, \vec{t}_z)}$

- action de pesanteur : négligée / aux autres

- action du palier F : $\vec{G}_F = \underset{F}{\vec{F}_f} \quad \vec{F}_f = Y_f \vec{y} + Z_f \vec{z} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} Y_f = -210 \text{ N} \\ Z_f = -1905 \text{ N} \end{cases}$
 $\vec{M}(P, G_F) = \vec{M}(F, G_F) + \vec{PF} \wedge \vec{F}_f = \vec{0} + ((-x \vec{x}) \wedge (Y_f \vec{y} + Z_f \vec{z})) = (x Z_f) \vec{y} + (-x Y_f) \vec{z}$

- action du pignon : $\vec{G}_H = \underset{H}{\vec{F}_h} \quad \vec{F}_h = X_h \vec{x} + Y_h \vec{y} + Z_h \vec{z} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} X_h = 2350 \text{ N} \\ Y_h = -1710 \text{ N} \\ Z_h = 4070 \text{ N} \end{cases}$
 $\vec{M}(P, G_H) = \vec{M}(H, G_H) + \vec{PH} \wedge \vec{F}_h = \vec{0} + [(b-x) \vec{x} + c \vec{y}] \wedge (X_h \vec{x} + Y_h \vec{y} + Z_h \vec{z}) = (c Z_h) \vec{x} - (b-x) Z_h \vec{y} + [(b-x) Y_h - c X_h] \vec{z}$

- action du palier E : $\vec{G}_E = \underset{E}{\vec{F}_e} \quad \vec{F}_e = X_e \vec{x} + Y_e \vec{y} + Z_e \vec{z} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} X_e = -2350 \text{ N} \\ Y_e = 1920 \text{ N} \\ Z_e = -2165 \text{ N} \end{cases}$
 $\vec{M}(P, G_E) = \vec{M}(E, G_E) + \vec{PE} \wedge \vec{F}_e = \vec{0} + (a-x) \vec{x} \wedge (X_e \vec{x} + Y_e \vec{y} + Z_e \vec{z}) = -(a-x) Z_e \vec{y} + (a-x) Y_e \vec{z}$

Le morceau de gauche (G) est en équilibre par rapport au repère galiléen R , on peut donc appliquer le PFS

$$T(\vec{G}/G) = T_{coh} + \vec{G}_F + \vec{G}_H + \vec{G}_E = \vec{0} \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(\vec{G}/G) = \vec{R}_{coh} + \vec{F}_f + \vec{F}_h + \vec{F}_e = \vec{0} \\ \vec{M}(P, \vec{G}/G) = \vec{M}(P, \vec{R}_{coh}) + \vec{M}(P, \vec{G}_F) + \vec{M}(P, \vec{G}_H) + \vec{M}(P, \vec{G}_E) = \vec{0} \end{array} \right.$$

même point P

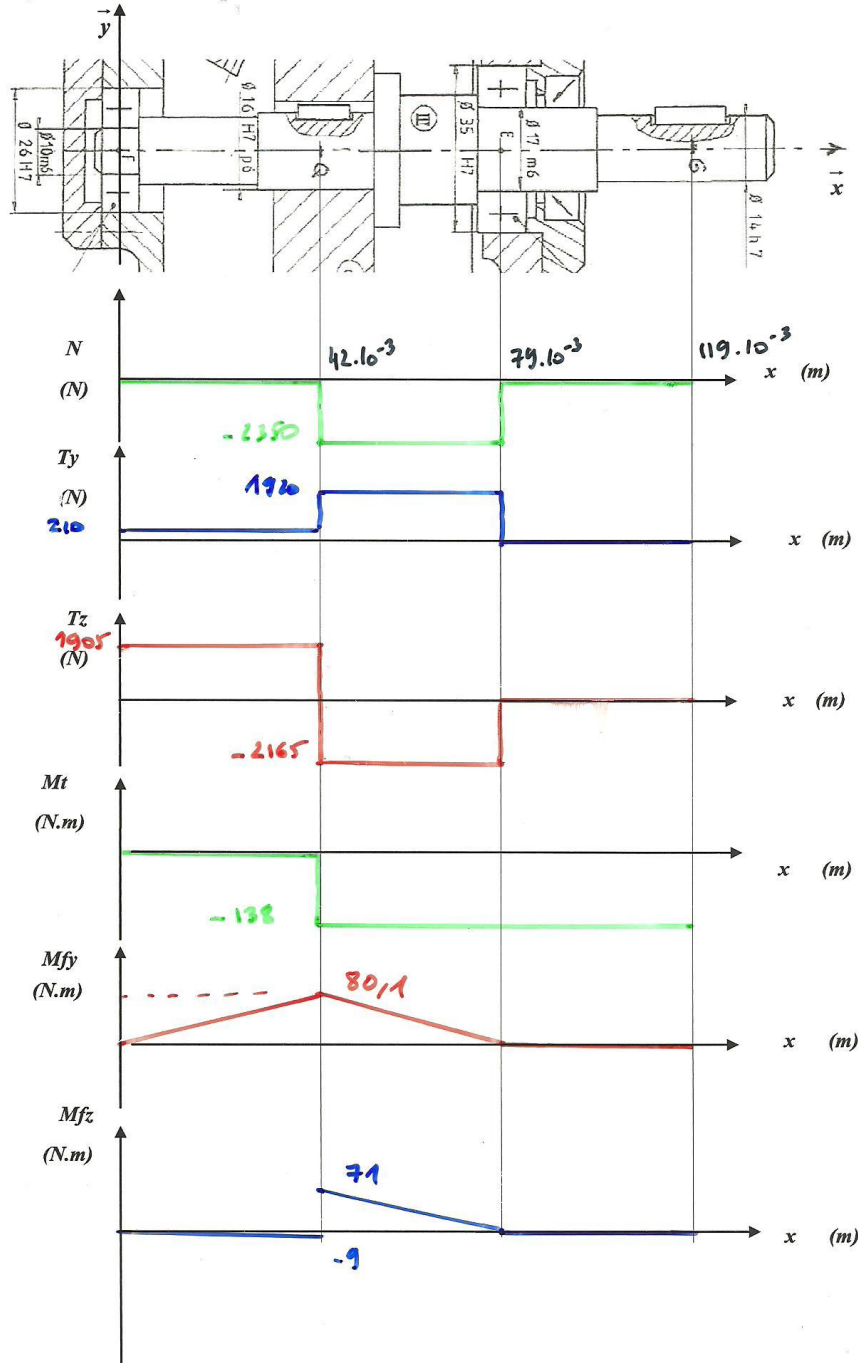
En projetant dans la **base locale** $(\vec{n}, \vec{t}_y, \vec{t}_z) = (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(\vec{G}/G) \cdot \vec{x} = N + 0 + X_h + X_e = 0 \\ \vec{R}(\vec{G}/G) \cdot \vec{y} = Ty + Y_f + Y_h + Y_e = 0 \\ \vec{R}(\vec{G}/G) \cdot \vec{z} = Tz + Z_f + Z_h + Z_e = 0 \\ \vec{M}(P, \vec{G}/G) \cdot \vec{x} = Mt + 0 + c Z_h = 0 \\ \vec{M}(P, \vec{G}/G) \cdot \vec{y} = Mfy + x Z_f - (b-x) Z_h - (a-x) Z_e = 0 \\ \vec{M}(P, \vec{G}/G) \cdot \vec{z} = Mfz - x Y_f + (b-x) Y_h - c X_h + (a-x) Y_e = 0 \end{array} \right. \quad \underline{\text{A.N.:}} \quad \left\{ \begin{array}{l} N = -X_h - X_e \\ Ty = -Y_f - Y_h - Y_e \\ Tz = -Z_f - Z_h - Z_e \\ Mt = -c Z_h \\ Mfy = -x Z_f + (b-x) Z_h + (a-x) Z_e \\ Mfz = -x Y_f - (b-x) Y_h + c X_h - (a-x) Y_e \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} N = 0 \\ Ty = 0 \\ Tz = 0 \\ Mt = -138 \text{ N.m} \\ Mfy = 0 \\ Mfz = 0 \end{array} \right.$$

\Rightarrow On vérifie que $\frac{dMfy}{dx} = -Z_f - Z_h - Z_e = Tz$ $\frac{dMfz}{dx} = Y_f + Y_h + Y_e = -Ty$

\Rightarrow Au point G on vérifie que $T_{coh} = C_G = \underset{G}{\vec{0}} \quad \vec{C} = C \vec{x} \quad \text{avec} \quad C = -138 \text{ N.m}$

2. Tracer les diagrammes des états de sollicitation.
Quelle est la section la plus sollicitée?

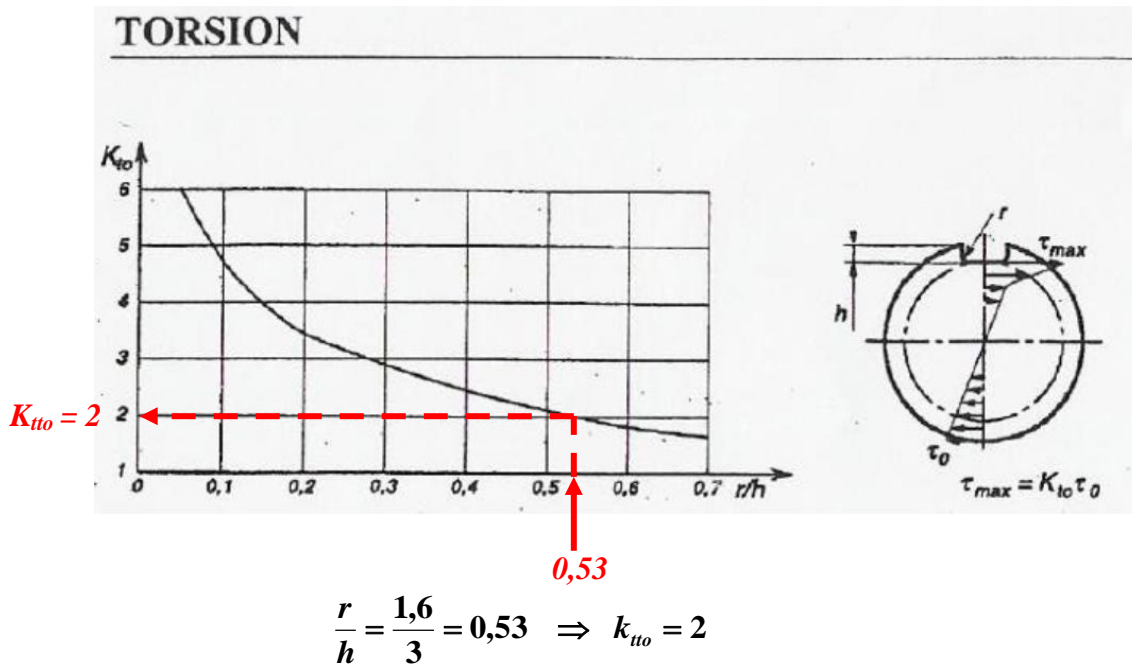


La section de centre Q est la plus sollicitée

$$T_{coh} = {}_Q \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{coh} \\ \vec{M}(Q, coh) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ll} N = -2350 & Mt = -138 \\ Ty = 1920 & Mfy = 80 \\ Tz = -2165 & Mfz = 71 \end{array} \right\}_{(x, y, z)}$$

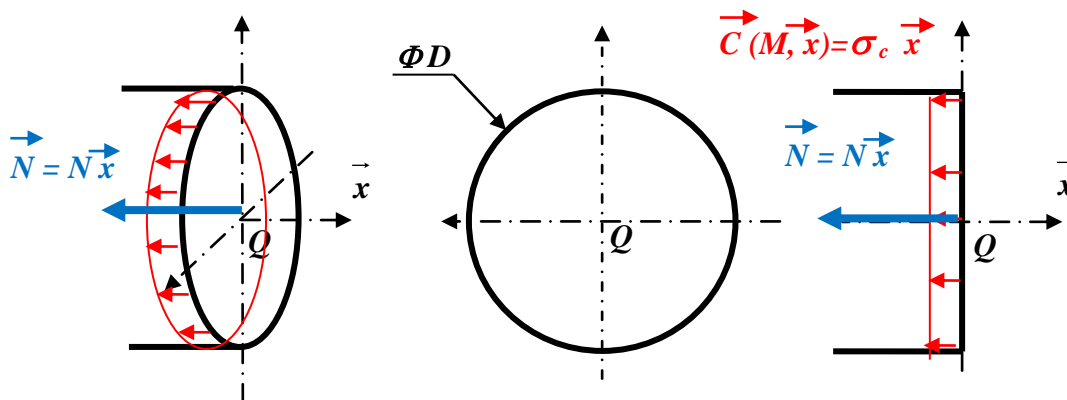
(valeurs exprimées en N pour les résultantes et en Nm pour les moments)

3. Calculer le coefficient de concentration de contrainte à la torsion en ce point.
(rainure de clavette : $h = 3 \text{ mm}$ et $r_f = 1,6 \text{ mm}$)



Donner au point M le plus sollicité de la section de centre Q (point M à préciser).

- La matrice des contraintes de compression. $N = -2350 \text{ N}$

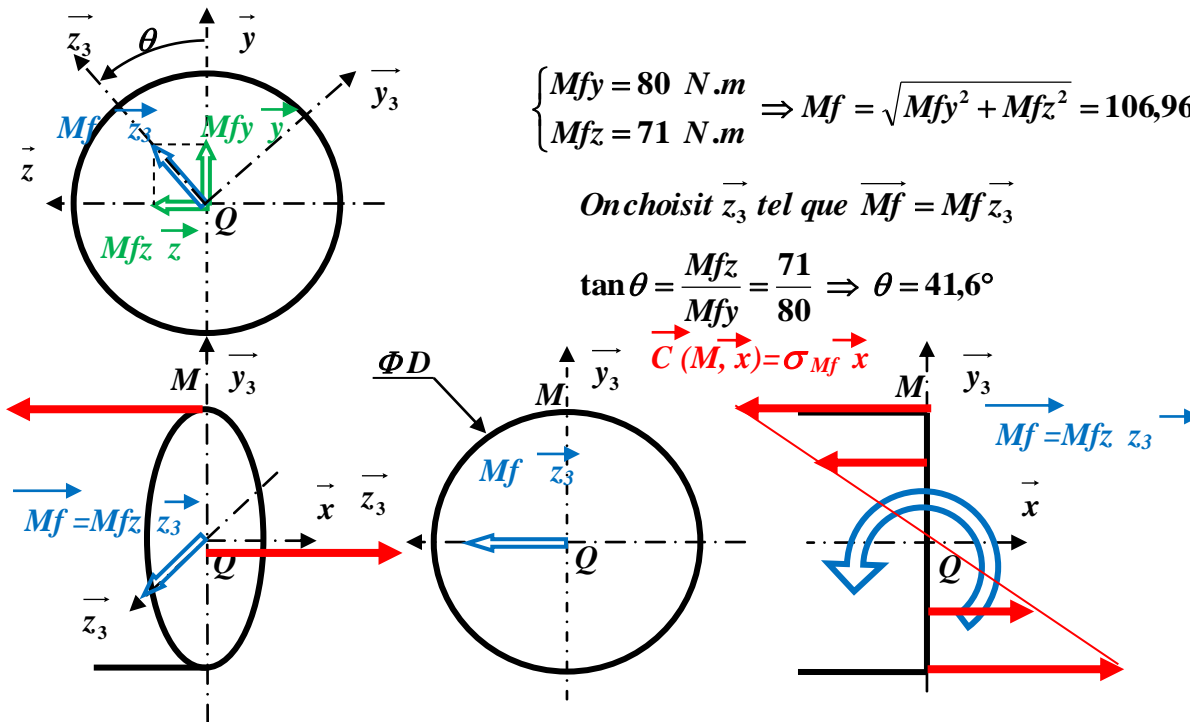


En tout point M de la section de centre Q et dans une base $(\vec{x}, -, -)$

$$[\sigma_c(M)] = \begin{bmatrix} \sigma_c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\vec{x}, -, -)} \quad \sigma_c = \frac{N}{S} = \frac{4N}{\pi D^2}$$

$$A.N.: \begin{cases} N = -2350 \text{ N} \\ D = 16 \text{ mm} \end{cases} \Rightarrow \sigma_c = -11,7 \text{ MPa}$$

- **La matrice des contraintes de flexion.** (effectuer éventuellement un changement de base)



$$\begin{cases} Mfy = 80 \text{ N.m} \\ Mfz = 71 \text{ N.m} \end{cases} \Rightarrow Mf = \sqrt{Mfy^2 + Mfz^2} = 106,96 \text{ N.m}$$

On choisit \vec{z}_3 tel que $\vec{Mf} = Mf \vec{z}_3$

$$\tan \theta = \frac{Mfz}{Mfy} = \frac{71}{80} \Rightarrow \theta = 41,6^\circ$$

$$\vec{C}(M, x) = \sigma_{Mf} \vec{x}$$

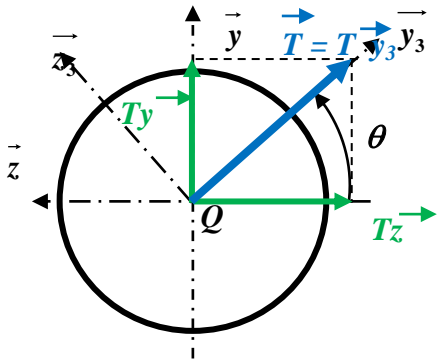
Nous choisissons le point M parmi les deux points les plus sollicités de la section de centre Q , en effet au point M nous avons :

- Contrainte normale de flexion : $\sigma_{Mf} < 0$
- Contrainte normale de compression : $\sigma_c < 0$

$$[\sigma_f(M)] = \begin{bmatrix} \sigma_{Mf} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}_3, \vec{z}_3)} \quad \sigma_{Mf} = -\frac{Mf}{I(Q, \vec{z}_3)} y_M \quad \text{avec} \begin{cases} y_M = \frac{D}{2} \\ I(Q, \vec{z}_3) = \frac{\pi D^4}{64} \end{cases}$$

$$\sigma_{Mf} = -\frac{32Mf}{\pi D^3} \quad \text{A.N.:} \begin{cases} Mf = 106,96 \text{ N.m} \\ D = 16 \text{ mm} \end{cases} \Rightarrow \sigma_{Mf} = -266 \text{ MPa}$$

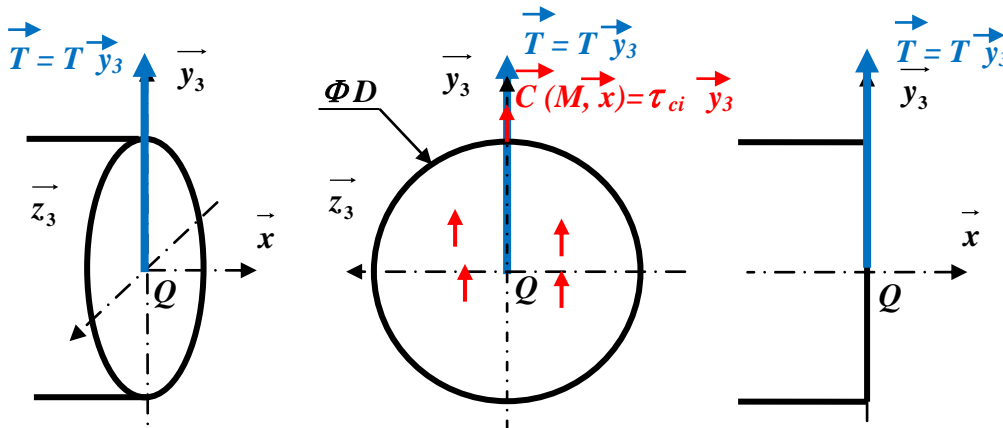
▪ La matrice des contraintes de cisaillement.



$$\begin{cases} T_y = 1920 \text{ N} \\ T_z = -2165 \text{ N} \end{cases} \Rightarrow T = \sqrt{T_y^2 + T_z^2} = 2893,72 \text{ N}$$

$$\text{Comme } \tan \theta = \frac{|T_y|}{|T_z|} = \frac{1920}{2165} \Rightarrow \theta = 41,6^\circ$$

$$\text{On a } \vec{T} = T \vec{y}_3$$

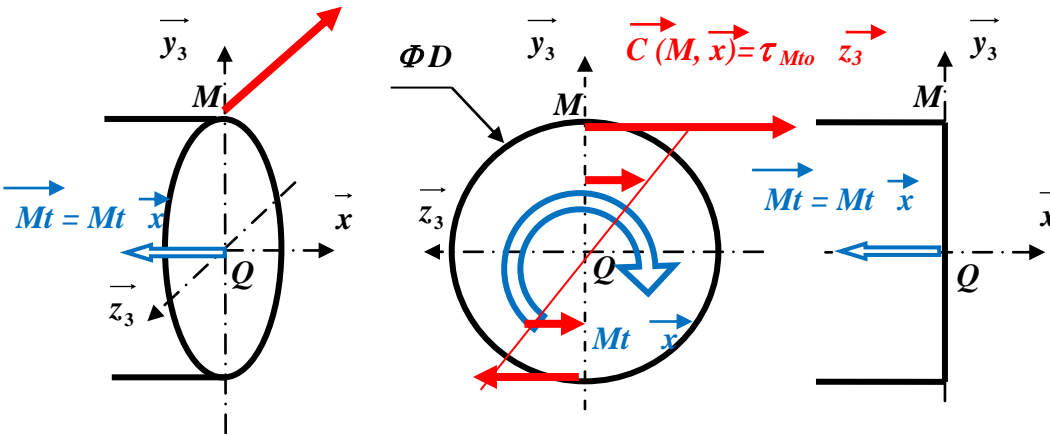


En tout point M de la section de centre Q et dans une base $(\vec{x}, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$

$$[\sigma_f(M)] = \begin{bmatrix} 0 & \tau_{ci} & 0 \\ \tau_{ci} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}_3, \vec{z}_3)} \quad \tau_{ci} = \frac{T}{S} = \frac{4T}{\pi D^2}$$

$$\text{A.N.: } \begin{cases} T = 2893,72 \text{ N} \\ D = 16 \text{ mm} \end{cases} \Rightarrow \tau_{ci} = 14,4 \text{ MPa}$$

- La matrice des contraintes de torsion. $Mt = -138 \text{ N.m}$



$$[\sigma_{to}(M)] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{Mto} \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau_{Mto} & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}_3, \bar{z}_3)} \quad \tau_{Mto} = K_{to} \frac{Mt}{I_Q} r_M \quad \text{avec} \begin{cases} r_M = \frac{D}{2} \\ I_Q = \frac{\pi D^4}{32} \end{cases}$$

En effet, il faut tenir compte du phénomène de concentration de contrainte induit par la rainure pour la clavette.

$$\tau_{Mto} = K_{to} \frac{16Mt}{\pi D^3} \quad \text{A.N.} : \begin{cases} K_{to} = 2 \\ Mt = -138 \text{ N.m} \\ D = 16 \text{ mm} \end{cases} \Rightarrow \tau_{Mto} = -343,2 \text{ MPa}$$

- La matrice des contraintes au point M le plus sollicité de la section de centre Q .

En utilisant le PRINCIPE DE SUPERPOSITION on a :

$$[\sigma(M)] = [\sigma_c(M)] + [\sigma_{ci}(M)] + [\sigma_f(M)] + [\sigma_{to}(M)]$$

$$[\sigma(M)] = \begin{bmatrix} \sigma_c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\bar{x}, -, -)} + \begin{bmatrix} 0 & \tau_{ci} & 0 \\ \tau_{ci} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}_3, \bar{z}_3)} + \begin{bmatrix} \sigma_{Mf} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}_3, \bar{z}_3)} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{Mto} \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau_{Mto} & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}_3, \bar{z}_3)}$$

$$[\sigma(M)] = \begin{bmatrix} \sigma_c + \sigma_{Mf} & \tau_{ci} & \tau_{Mto} \\ \tau_{ci} & 0 & 0 \\ \tau_{Mto} & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}_3, \bar{z}_3)} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & 0 & 0 \\ \tau_{xz} & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}_3, \bar{z}_3)} \quad \text{avec} \begin{cases} \sigma_x = -277,7 \text{ MPa} \\ \tau_{xy} = 14,4 \text{ MPa} \\ \tau_{xz} = -343,2 \text{ MPa} \end{cases}$$

4. Vérifions si l'axe 3 est bien dimensionné suivant le critère de Tresca.

Diagonalisation de la matrice $[\sigma(M)] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & 0 & 0 \\ \tau_{xz} & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}_3, \bar{z}_3)}$ avec $\begin{cases} \sigma_x = -277,7 \text{ MPa} \\ \tau_{xy} = 14,4 \text{ MPa} \\ \tau_{xz} = -343,2 \text{ MPa} \end{cases}$

$$\det([\sigma(M)] - \lambda[I_3]) = \begin{vmatrix} \sigma_x - \lambda & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & -\lambda & 0 \\ \tau_{xz} & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \tau_{xz} \begin{vmatrix} \tau_{xy} & -\lambda \\ \tau_{xz} & 0 \end{vmatrix} + (-\lambda) \begin{vmatrix} \sigma_x - \lambda & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\det([\sigma(M)] - \lambda[I_3]) = \tau_{xz}(\lambda\tau_{xz}) + (-\lambda)[(\sigma_x - \lambda)(-\lambda) - (\tau_{xy}\tau_{xy})] = 0$$

$$\begin{cases} \lambda\tau_{xz}^2 + \lambda\tau_{xy}^2 + \lambda^2(\sigma_x - \lambda) = 0 \\ \lambda(-\lambda^2 + \lambda\sigma_x + \tau_{xz}^2 + \tau_{xy}^2) = 0 \end{cases} \begin{cases} \sigma_Y = \lambda_1 = 0 \\ \sigma_X = \lambda_2 = \frac{-\sigma_x - \sqrt{\sigma_x^2 + 4(\tau_{xz}^2 + \tau_{xy}^2)}}{-2} = 509,4 \text{ MPa} \\ \sigma_Z = \lambda_2 = \frac{-\sigma_x + \sqrt{\sigma_x^2 + 4(\tau_{xz}^2 + \tau_{xy}^2)}}{-2} = -231,7 \text{ MPa} \end{cases}$$

$$[\sigma(M)] = \begin{bmatrix} \sigma_X & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_Y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_Z \end{bmatrix}_{(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})}$$

Contrainte équivalente selon le critère de Tresca

$$\sigma_{eq} = \sup(|\sigma_I - \sigma_J|) = \sigma_X - \sigma_Z = 509,4 - (-231,7) = 741,1 \text{ MPa}$$

$$R_{pe} = \frac{R_e}{s} = \frac{500}{2} = 250 \text{ MPa}$$

Comme $\sigma_{eq} > R_{pe}$ l'arbre n'est pas bien dimensionné selon le critère de Tresca

Formulaire RDM

Loi de Hooke : $\sigma = E \cdot \varepsilon$; $\sigma = \frac{F}{S}$; $\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$

Loi de Poisson : $\frac{\Delta a}{a} = -\nu \cdot \varepsilon$

Torseur de cohésion

$$\left\{ T_{cohésion1/2} \right\}_K = \left\{ \begin{array}{cc} N & Mt \\ T_1 & Mf_1 \\ T_2 & Mf_2 \end{array} \right\}_{(K, \vec{n}, \vec{t}_1, \vec{t}_2)}$$

N effort normal ; $T = \sqrt{T_1^2 + T_2^2}$: effort tangentiel

Mt moment de torsion ; $Mf = \sqrt{Mf_1^2 + Mf_2^2}$: moment de flexion

Formule de Bresse : $y'' = \frac{Mfz(x)}{I_{GZ} \times E}$; $I_{GZ} = \int_{M \in \pi} y^2 \cdot dS$; moment quadratique de la section par rapport à $G_{\vec{z}}$

Contraintes

La **matrice des contraintes** est symétrique $[\sigma_{(M)}] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$

Vecteur contrainte $\vec{C}_{(M, \vec{n})} = [\sigma_{(M)}] \bullet \vec{n}$

Il existe un repère $R'(M, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ tel que $[\sigma_{(M)}] = \begin{bmatrix} \sigma_X & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_Y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_Z \end{bmatrix}$

$\sigma_X, \sigma_Y, \sigma_Z$ sont les contraintes principales (valeurs propres)

$\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}$ sont les directions principales (vecteurs propres)

Tout vecteur contrainte en M suivant une des directions principales est porté par cette direction principale : la contrainte est purement normale : $\vec{C}_{(M, \vec{X})} = \sigma_X \cdot \vec{X}$

$(M, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ repère global, $(M, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ repère principal, $(M, \vec{n}_1, \vec{t}_1, \vec{Z})$ et $(M, \vec{n}_2, \vec{t}_2, \vec{Z})$ repères locaux

Contraintes liées aux sollicitations simples :

Contrainte de traction : $\sigma = \frac{F}{S}$; ($F > 0$ traction, $F < 0$ compression)

Contrainte de cisaillement : $\tau = \frac{-F}{S}$, le signe dépend du choix du repère

Contrainte de flexion : $\sigma_{fl} = \frac{-Mfz.y}{I_{oz}}$ Contrainte de torsion $\tau_{torsion} = \frac{Mt.r}{I_o}$

Déformations

Matrice des déformations

$$[\varepsilon_{(M)}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} & \varepsilon_y & \gamma_{zy} \\ \gamma_{xz} & \gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}; \varepsilon_x \text{ dilatation linéique suivant } \vec{x}; \gamma_{xy} \text{ demi variation angulaire}$$

Les γ de la matrice des déformations sont les demi variations angulaires des angles du repère.

Lois de comportements

$$s = tr[\sigma_{(M)}] = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E} [(1 + \nu) \cdot \sigma_{ij} - \nu \cdot s \cdot Id_{ij}]$$

$$e = tr[\varepsilon_{(M)}] = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

$$\sigma_{ij} = \underbrace{\frac{E}{(1 + \nu)}}_{2 \cdot \mu} \cdot \varepsilon_{ij} + \underbrace{\frac{\nu \cdot E}{(1 + \nu) \cdot (1 - 2\nu)}}_{\lambda} \cdot e \cdot Id_{ij}$$

Critères de dimensionnement

Critère de **Tresca** (utilisation plus large que Von Mises) : $\sigma_{eq} = 2 \cdot \left[\sup \left(\left| \frac{\sigma_I - \sigma_J}{2} \right| \right) \right]$ à

comparer à $\sigma_{traction}$ (limite élastique du matériau à la traction)

Critère de **Von Mises** (plus précis que Tresca pour la torsion pure et le cisaillement pur)

$\sigma_{eq} = [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2 \cdot \nu \cdot (\sigma_x \cdot \sigma_y + \sigma_x \cdot \sigma_z + \sigma_z \cdot \sigma_y)]^{1/2}$ à comparer à $\sigma_{traction}$ (limite élastique du matériau à la traction)

Contrainte de torsion idéale : $\tau_{torsion\ idéale} = \frac{Mt_i \cdot r}{I_o}$; $Mt_i = \sqrt{Mf^2 + Mt^2}$ (flexion et torsion

uniquement)