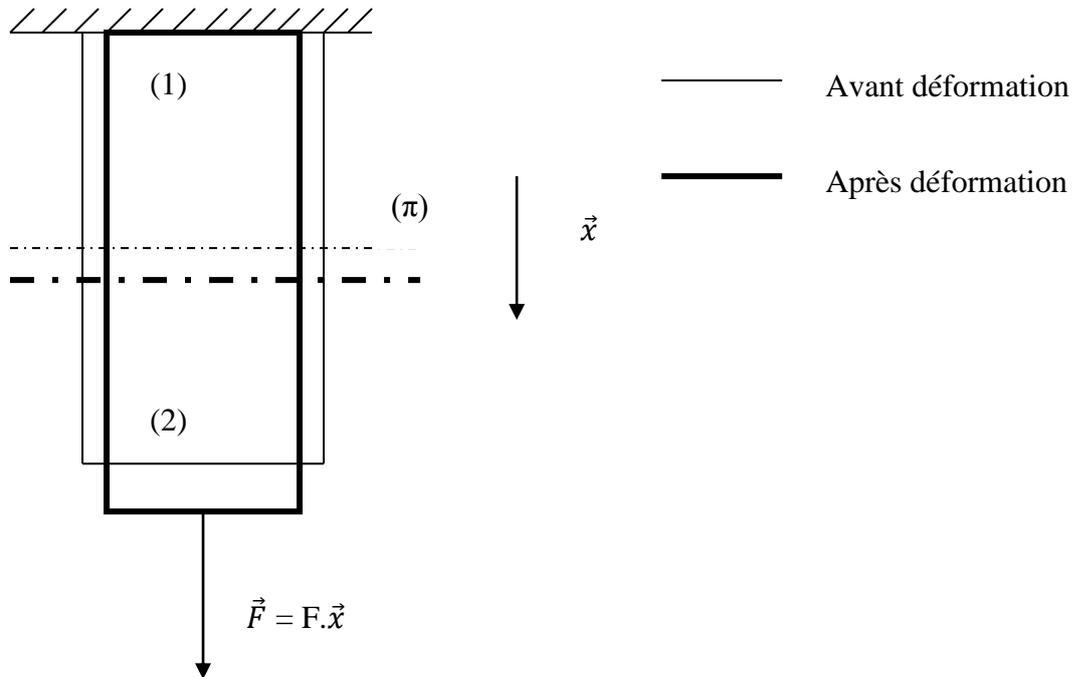


Livre 2

Chapitre III : sollicitations simples

Elles correspondent aux termes N, T, Mt et Mf du tenseur de cohésion (CF page 13)

**I : la traction (effort normal N)**

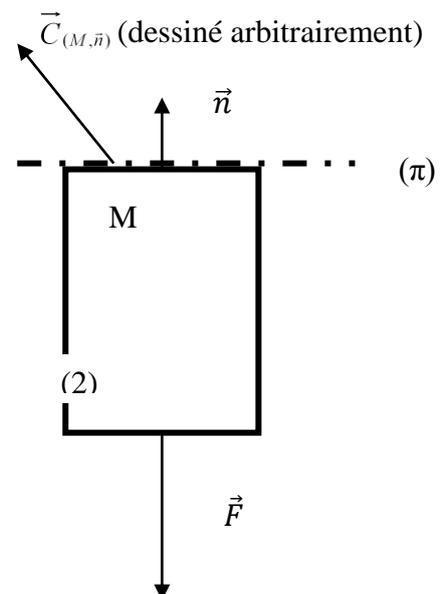


Observation de la déformée d'une section ( $\pi$ ): la déformation est uniforme suivant  $\vec{X}$  (tous les points d'une même section se déplacent de la même distance dans la même direction)

On isole (2) :

$\vec{n} = -\vec{x}$ ; normale sortante à ( $\pi$ )

$$\vec{C}_{(M, \vec{n})} = \vec{C}_{(M, -\vec{x})} = -\vec{C}_{(M, \vec{x})}$$



PFS :

$$\vec{F} + \int_{M \in \pi} -\vec{C}_{(M,\vec{x})} \cdot dS = \vec{0}$$

La déformation étant uniforme, la contrainte sera donc uniforme en tout point de la section (loi de Hooke) :

$$\forall M \in (\pi), \vec{C}_{(M,\vec{x})} = \overrightarrow{\text{constante}}$$

donc

$$\vec{F} - \vec{C}_{(M,\vec{x})} \cdot S = \vec{0} \Rightarrow \vec{C}_{(M,\vec{x})} = \frac{\vec{F}}{S} = \sigma \cdot \vec{x} + \tau \cdot \vec{y}$$

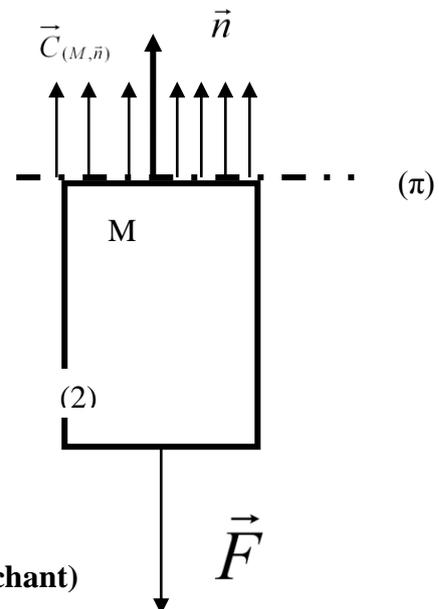
D'où les contraintes de traction :  $\sigma = \frac{F}{S}; F > 0$  traction,  $F < 0$  compression  
 $\tau = 0$

Matrice des contraintes :

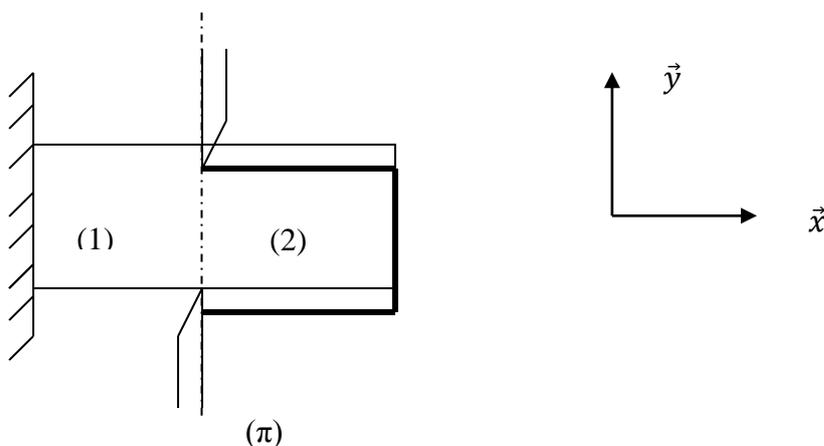
$$[\sigma_{(M)}] = \begin{bmatrix} \frac{F}{S} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \vec{x} \\ \vec{y}; \forall M \in (\pi) \\ \vec{z} \end{matrix}$$

Directions principales :  $\vec{X} = \vec{x}, \vec{Y} = \vec{y}, \vec{Z} = \vec{z}$

Répartition de la contrainte :



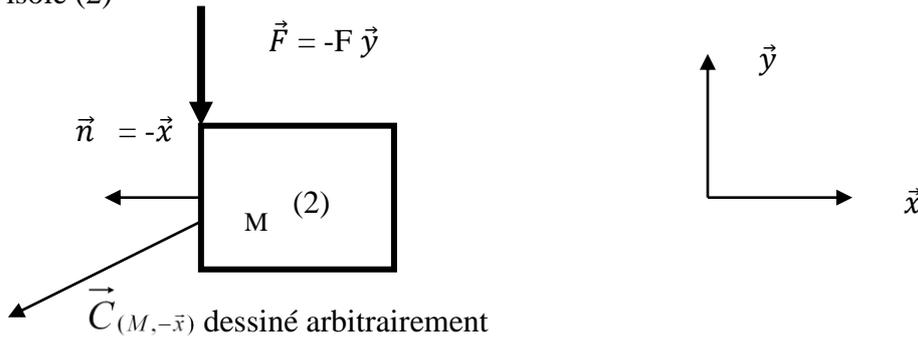
**II : le cisaillement (effort tangentiel T ou effort tranchant)**  
(modèle couramment utilisé et poutre inexact)



Observation de la déformé d'une section ( $\pi$ ) :

La déformation est uniforme\* dans le plan ( $\pi$ ) ; il y a glissement de (2)/(1)

On isole (2)



PFS :

$$\vec{F} + \int_{M \in \pi} \vec{C}_{(M, -\vec{x})} \cdot dS = \vec{0}$$

La déformation étant uniforme\* dans  $(\pi)$ , la contrainte l'est aussi :

$$\vec{C}_{(M, \vec{x})} = \frac{\vec{F}}{S} = \frac{-F}{S} \cdot \vec{y} = \sigma \cdot \vec{x} + \tau \cdot \vec{y}$$

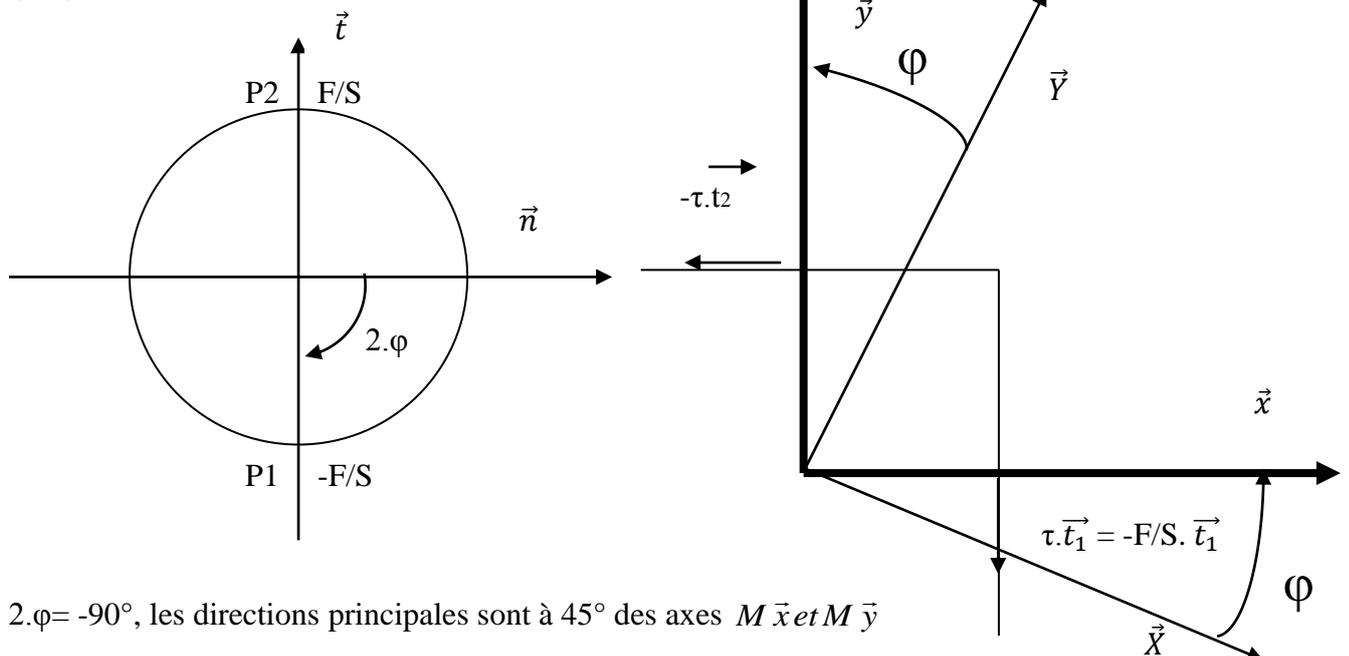
Contraintes de cisaillement :  $\sigma = 0$   
 $\tau = \frac{-F}{S}$ , le signe dépend du choix du repère

Matrice des contraintes :

$$[\sigma_{(M)}] = \begin{bmatrix} \vec{C}_{(M, \vec{x})} & \vec{C}_{(M, \vec{y})} & \vec{C}_{(M, \vec{z})} \\ 0 & \frac{-F}{S} & 0 \\ \frac{-F}{S} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \vec{x} \\ \vec{y}; \forall M \in (\pi) \\ \vec{z} \end{matrix}$$

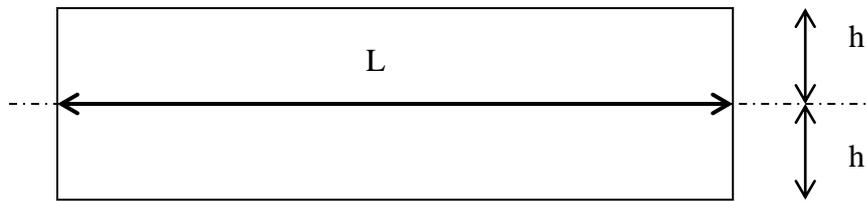
\* : la contrainte de cisaillement n'est pas uniforme en réalité. Sa répartition est parabolique. L'expérience montre que le rôle du cisaillement est insignifiant par rapport à la torsion et la flexion. On négligera donc la contrainte de cisaillement à la périphérie de la section.

Construction de Mohr

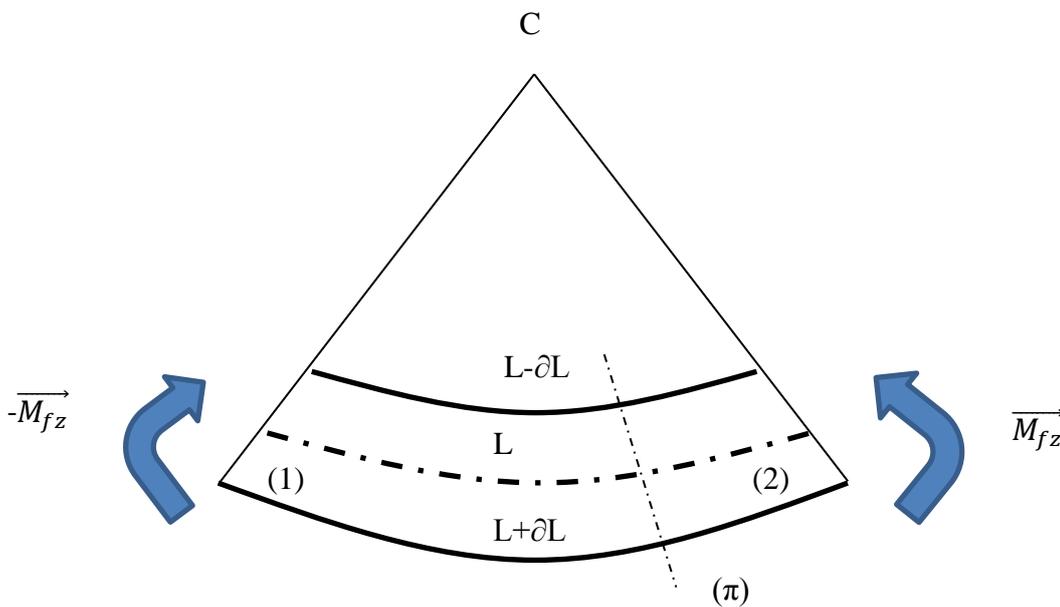
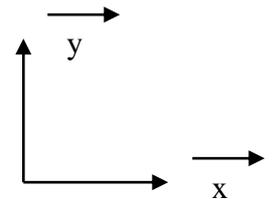


$2 \cdot \varphi = -90^\circ$ , les directions principales sont à  $45^\circ$  des axes  $M \vec{x}$  et  $M \vec{y}$

### III : la flexion (moment fléchissant $M_f$ )



Largeur  $b$



Observation de la déformé :

Longueur de la ligne  $L$  conservée (arc de cercle de centre  $C$ )

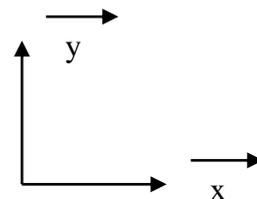
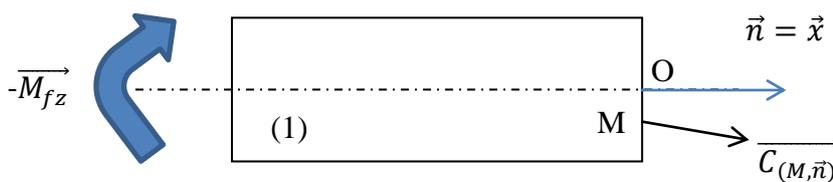
Rétrécissement de la face supérieure de  $L$  à  $L - \delta L$

Allongement de la face inférieure de  $L$  à  $L + \delta L$

Hauteur  $2h$  et largeur au niveau de la ligne moyenne inchangés

Extrémités restent planes

On isole (1) :



Vecteur contrainte :  $\overrightarrow{C_{(M,\vec{x})}}$

Hauteur et largeur restent constantes donc  $\overrightarrow{C_{(M,\vec{x})}}$  ne peut être porté que par  $\vec{x}$

Les extrémités restent planes donc la contrainte en M est proportionnelle à la distance  $OM = y$

D'où :  $\overrightarrow{C_{(M,\vec{x})}} = -K \cdot y \cdot \vec{x}$ , avec K constante positive ( $y < 0$  : traction,  $y > 0$  : compression)

PFS : équation du moment en O en projection sur  $\vec{Z}$

$$-\overrightarrow{M_{fz}} + \int_{M \in (\pi)} \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{C_{(M,\vec{x})}} dS = \vec{0}; \quad \overrightarrow{OM} = y \cdot \vec{y}; \quad \text{avec } -h \leq y \leq h$$

$$-M_{fz} \cdot \vec{z} + \int_{M \in (\pi)} y \cdot \vec{y} \wedge -K \cdot y \cdot \vec{x} dS = \vec{0};$$

$$-M_{fz} \cdot \vec{z} - K \vec{z} \int_{M \in (\pi)} y^2 \cdot dS = \vec{0};$$

Donc  $K = \frac{-M_{fz}}{\int_{M \in (\pi)} y^2 \cdot dS}$ ; on pose  $I_{Oz} = \int_{M \in (\pi)} y^2 \cdot dS$  : moment quadratique de la section /Oz

$$\overrightarrow{C_{(M,\vec{x})}} = \frac{-M_{fz}}{I_{Oz}} \cdot y \cdot \vec{x} = \sigma_{fl} \cdot \vec{x}$$

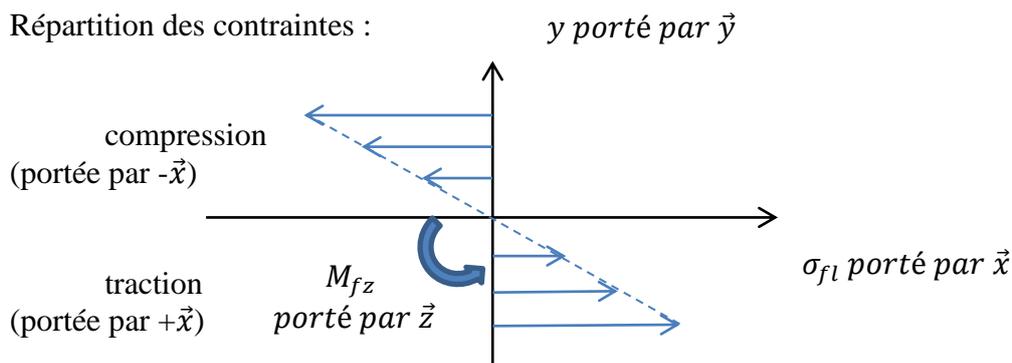
Contraintes de flexion :  $\sigma_{fl} = \frac{-M_{fz}}{I_{Oz}} \cdot y$

Matrice des contraintes :

$$[\sigma_{(M)}] = \begin{bmatrix} \sigma_{fl} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

NB : elle ressemble à la matrice de traction mais elle n'est pas uniforme dans  $(\pi)$

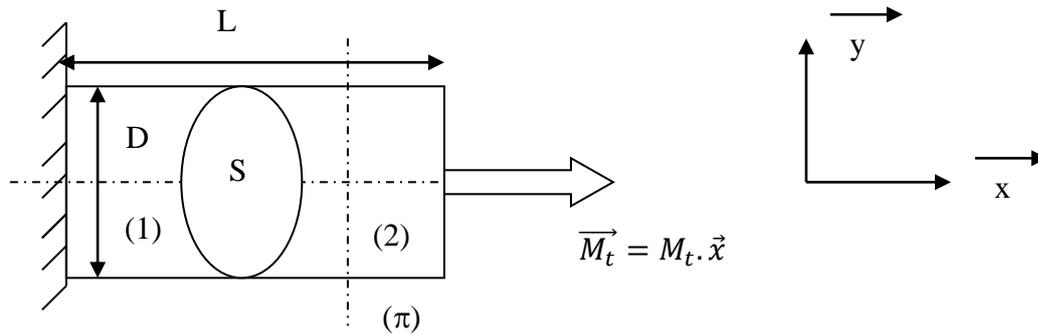
Répartition des contraintes :



Remarque :

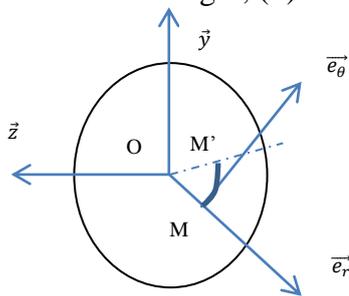
$|\sigma_{fl}|$  est maximale pour  $y=h$  et  $-h$  : en cas de rupture elle commencera à la surface de la pièce.

#### IV : la torsion (moment de torsion $M_t$ )



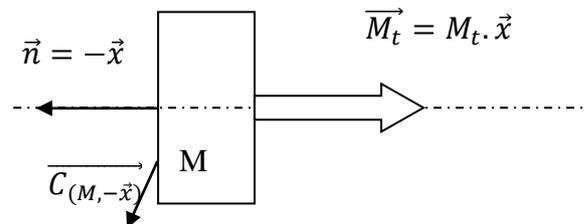
Observation de la déformée d'une section  $(\pi)$  :

$L$  et  $D$  restent inchangés,  $(\pi)$  tourne en bloc autour de  $(O\vec{x})$  :  $(OM)$  se déplace en  $(OM')$



Conclusion : la déformation (et donc la contrainte) est proportionnelle à  $r$  et orthoradiale (portée par  $\vec{e}_\theta$ )

On isole (2) :



vecteur contrainte :

$$\vec{C}_{(M, -\vec{x})} = \lambda \cdot r \cdot \vec{e}_\theta, \text{ avec } \lambda \text{ constante positive}$$

PFS : équation du moment en  $O$  suivant  $\vec{x}$  :

$$\vec{M}_t + \int_{M \in (\pi)} \overrightarrow{OM} \wedge \vec{C}_{(M, -\vec{x})} dS = \vec{0}; \quad \overrightarrow{OM} = r \cdot \vec{e}_r$$

$$M_t \cdot \vec{x} + \int_{M \in (\pi)} r \cdot \vec{e}_r \wedge \lambda \cdot r \cdot \vec{e}_\theta dS = \vec{0};$$

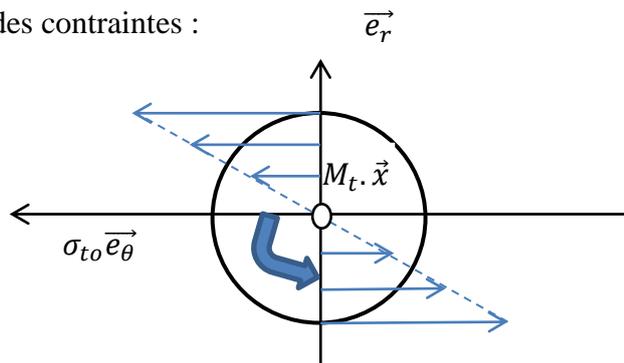
$M_t \cdot \vec{x} + \lambda \cdot \vec{x} \int_{M \in (\pi)} r^2 dS = \vec{0}$ ; on pose  $I_O = \int_{M \in (\pi)} r^2 \cdot dS$  : moment polaire de la section par rapport à son centre  $O$ .

$$\lambda = \frac{-M_t}{I_O},$$

$$\vec{C}_{(M, \vec{x})} = \frac{M_t}{I_O} \cdot r \cdot \vec{e}_\theta,$$

Contraintes de torsion :  $\sigma_{to} = \frac{M_t}{I_0} \cdot r$

Répartition des contraintes :



Matrice des contraintes :

$$[\sigma_{(M)}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sigma_{to} \\ 0 & 0 & 0 \\ \sigma_{to} & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(M, \vec{x}, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)}, \text{ cercle de Mohr et directions principales : CF cisaillement}$$

### V : application au dimensionnement de pièces

On détermine le torseur de cohésion en K, K point courant de la ligne moyenne.

On trace le diagramme des sollicitations simples.

L'effort normal crée la contrainte de traction

L'effort tangentiel crée la contrainte de cisaillement

Le moment de torsion crée la contrainte de torsion

Le moment fléchissant crée la contrainte de flexion

Dans le cas d'une sollicitation simple, il suffit de comparer cette contrainte à la limite élastique du matériau de la pièce (en tenant compte des facteurs de concentration de contraintes et des coefficients de sécurité) pour en déduire la dimension minimale d'une pièce.

Le cas des sollicitations composées sera traité à la fin du chapitre V.

#### Pour les arbres :

La flexion et la torsion sont prépondérantes par rapport à la traction et au cisaillement.

On définit un moment de torsion idéal qui permet de prendre en compte ces 2 sollicitations en même temps. **La contrainte obtenue sera comparée à la résistance élastique du matériau au cisaillement  $\sigma_{e\text{ cis}} = \sigma_{e\text{ traction}} / 2$  (en l'absence d'autres données)**

$$M_{ti} = \sqrt{M_t^2 + M_f^2}$$

Contrainte de torsion idéale :

$$\sigma_{toi} = \frac{M_{ti}}{I_0} \cdot r$$

Exemple I : Un parallélépipède, encastré à mi-hauteur, supporte un effort de compression  $\vec{P}$  suivant  $\vec{y}$  et un effort de cisaillement  $\vec{Q}$  suivant  $\vec{x}$ .  $\vec{P}$  et  $\vec{Q}$  passent par le cdm G du solide. On suppose les contraintes uniformément réparties dans la section d'encastrement ( $G, \vec{x}, \vec{z}$ )

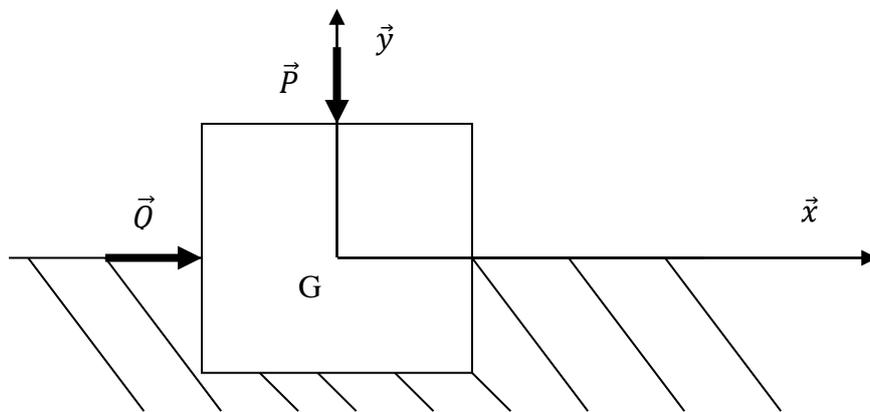
1 : écrire la matrice des contraintes en G dans les cas suivants :

1-1 : dû à l'effort de compression  $\vec{P}$  seul

1-2 : dû à l'effort de cisaillement  $\vec{Q}$  seul

1-3 : dû aux deux efforts

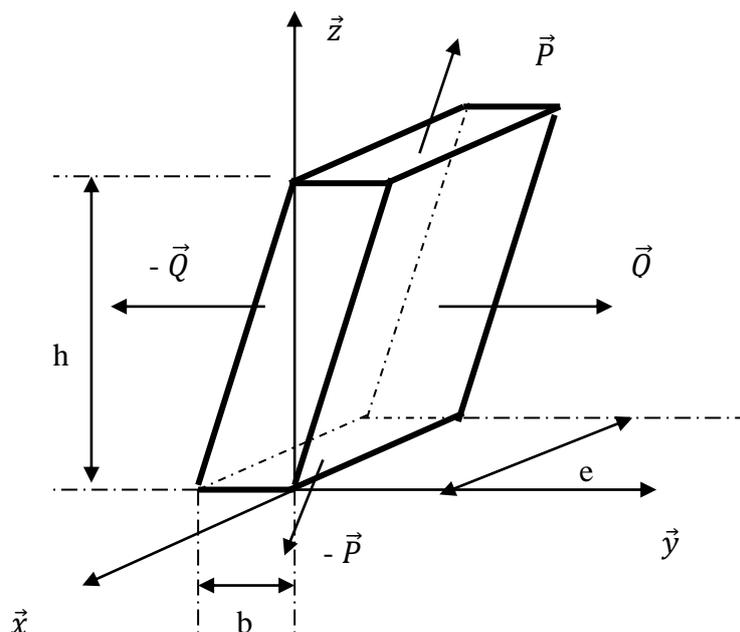
2 : tracer le cercle de Mohr au point G pour  $Q = P \frac{\sqrt{3}}{2}$ , donner les contraintes principales et les directions principales.



Exemple II : un prisme est chargé par deux efforts uniformément répartis  $\vec{P}$  et  $\vec{Q}$ .

1 : Déterminer la matrice des contraintes en supposant une répartition uniforme des contraintes.

2 : déterminer les directions principales pour  $P = 2 Q$ ,  $h = e = 4b$



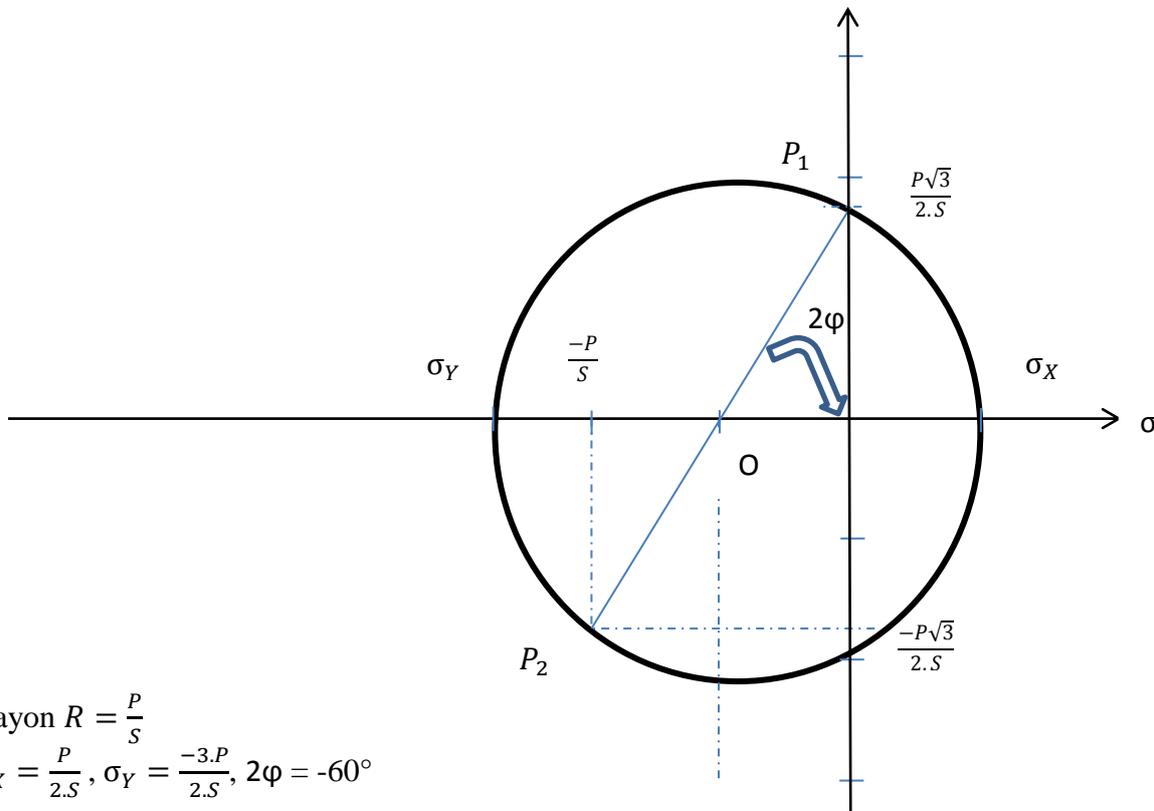
Solution 1 :

$$1-1 \quad [\sigma_{(M)}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-P}{S} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$1-2 \quad [\sigma_{(M)}] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{Q}{S} & 0 \\ \frac{Q}{S} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$1-3 \quad [\sigma_{(M)}] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{Q}{S} & 0 \\ \frac{Q}{S} & \frac{-P}{S} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$2 \quad Q = \frac{P\sqrt{3}}{2}$$



$$\text{Rayon } R = \frac{P}{S}$$

$$\sigma_X = \frac{P}{2.S}, \sigma_Y = \frac{-3.P}{2.S}, 2\varphi = -60^\circ$$

Solution 2

On coupe le prisme par une facette de normale  $\vec{x}$ , on isole la partie du fond, on applique un

$$\text{PFS, on en d\u00e9duit que } \vec{C}_{(M,\vec{x})} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

On coupe le prisme par une facette de normale  $\vec{y}$ , on isole la partie gauche, on applique un

$$\text{PFS, on en d\u00e9duit que } \vec{C}_{(M,\vec{y})} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{he} (Q + \frac{Pb}{\sqrt{b^2+h^2}}) \\ \frac{1}{he} (\frac{Ph}{\sqrt{b^2+h^2}}) \end{bmatrix}$$

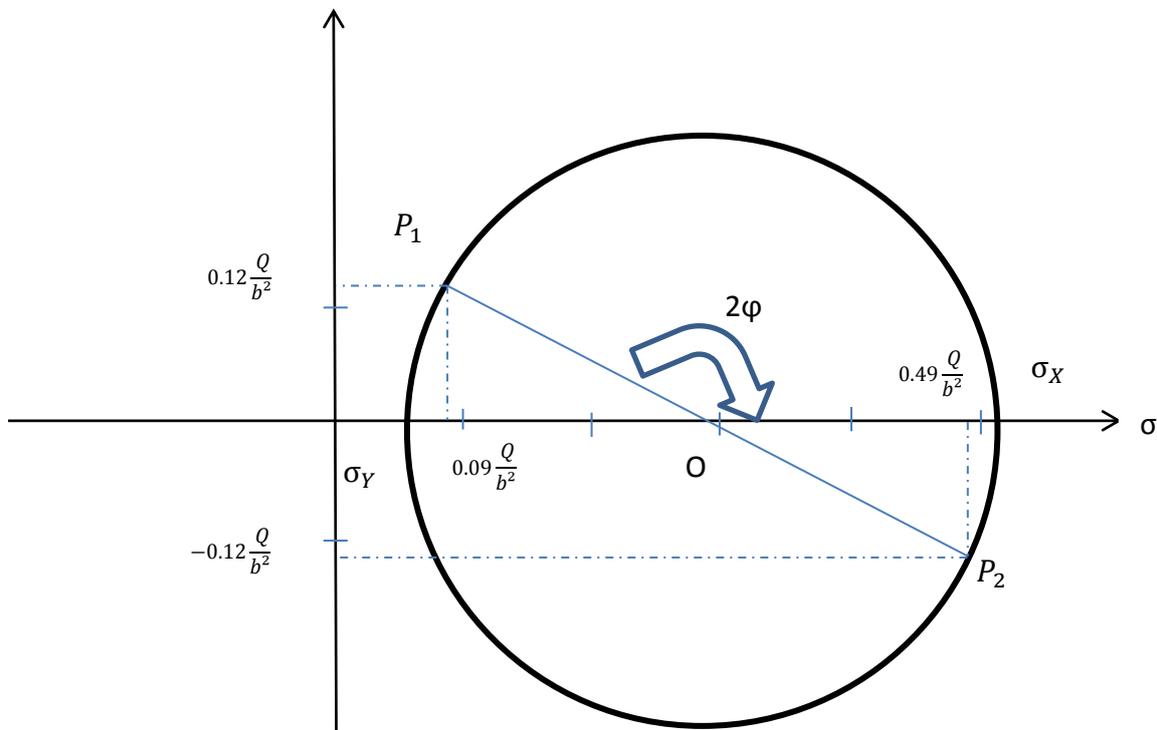
On coupe le prisme par une facette de normale  $\vec{z}$ , on isole la partie basse, on applique un PFS,

on en déduit que  $\vec{C}_{(M,\vec{z})} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{be} \left( \frac{Pb}{\sqrt{b^2+h^2}} \right) \\ \frac{1}{be} \left( \frac{Ph}{\sqrt{b^2+h^2}} \right) \end{bmatrix}$

$$[\sigma_{(M)}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{he} \left( Q + \frac{Pb}{\sqrt{b^2+h^2}} \right) & \frac{P}{e\sqrt{b^2+h^2}} \\ 0 & \frac{P}{e\sqrt{b^2+h^2}} & \frac{1}{be} \left( \frac{Ph}{\sqrt{b^2+h^2}} \right) \end{bmatrix},$$

Pour  $P=2Q$ ,  $h=e=4b$

$$[\sigma_{(M)}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{Q}{16b^2} \left( 1 + \frac{2}{\sqrt{17}} \right) & \frac{Q}{2b^2\sqrt{17}} \\ 0 & \frac{Q}{2b^2\sqrt{17}} & \frac{2Q}{b^2\sqrt{17}} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.09 \frac{Q}{b^2} & 0.12 \frac{Q}{b^2} \\ 0 & 0.12 \frac{Q}{b^2} & 0.49 \frac{Q}{b^2} \end{bmatrix},$$



Exemple III : Soit une canalisation rectiligne cylindrique dont la pression intérieure est  $P$  (Pression extérieure =  $P$  atmosphérique  $\ll P$ ). Rayon intérieur :  $r$ , épaisseur :  $e$ , longueur  $L$ . Déterminer la matrice des contraintes en tout point de la paroi (paroi mince qui ne travaille qu'à la traction, alors qu'une paroi épaisse travaille à la traction et au cisaillement).

Exemple IV : Une poutre rectangulaire en acier de hauteur  $h$ , de largeur  $b$ , de longueur  $L$  est encadrée en  $O$ . Elle est soumise en  $A$  à un effort  $F$

1 : déterminer le torseur de cohésion au sein de la poutre entre  $O$  et  $A$

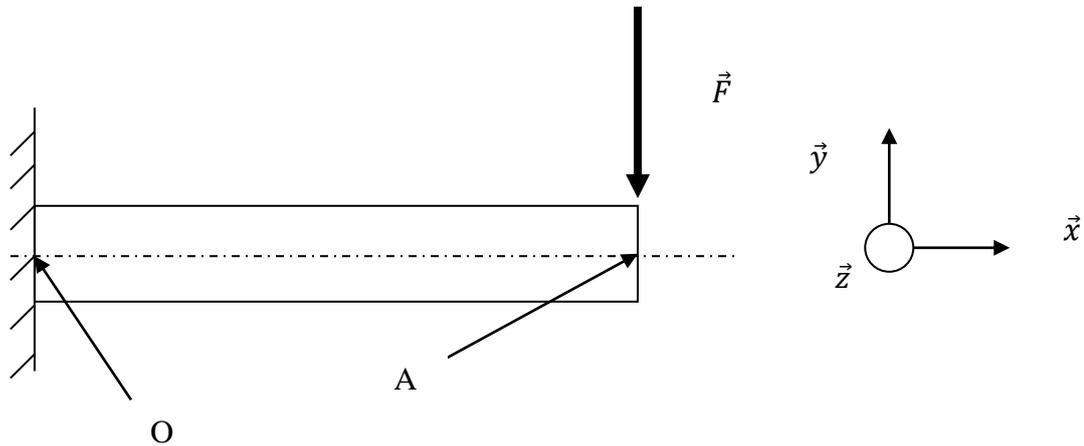
En déduire la section la plus sollicitée.

2 : écrire les matrices des contraintes -dans la section la plus sollicitée- pour chacune des sollicitations simples prises séparément.

En déduire le point  $K$  le plus sollicité de la section la plus sollicitée.

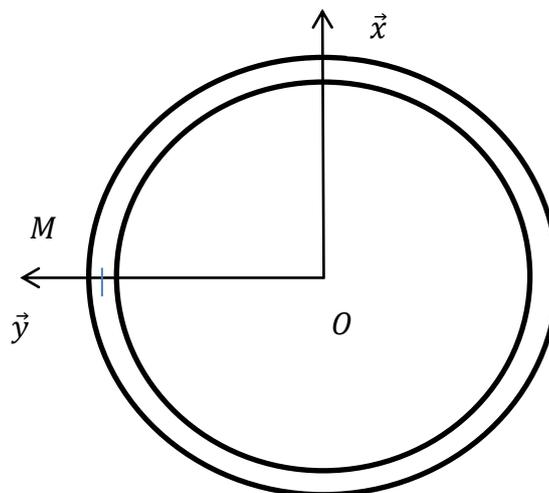
Ecrire la matrice des contraintes en  $K$ .

3 : déterminer les contraintes principales en  $K$

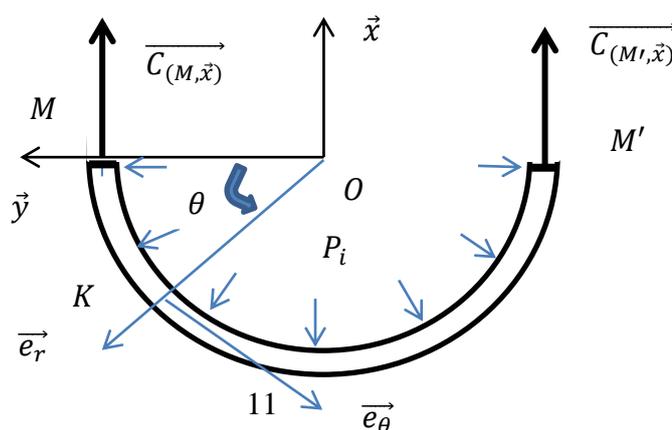


*Solution III :*

On prend un point particulier  $M$  de la section de la canalisation (permet de rester en cartésien, sinon polaire)



On coupe la canalisation par un plan  $(O, \vec{y}, \vec{z})$ , on isole la partie basse, par symétrie  $\overrightarrow{C}_{(M, \vec{x})} = \overrightarrow{C}_{(M', \vec{x})}$



PFS : équation de la résultante

2.  $\int \overrightarrow{C_{(M,\vec{x})}} \cdot dS + \int P_i \overrightarrow{e_r} \cdot dS = \vec{0}$  : hypothèse  $\overrightarrow{C_{(M,\vec{x})}}$  est constant sur la surface de coupure (paroi mince)

$$2. \overrightarrow{C_{(M,\vec{x})}} \cdot e \cdot L + P_i \cdot L \int_0^\pi \overrightarrow{e_r} \cdot r d\theta = \vec{0}$$

$$2. \overrightarrow{C_{(M,\vec{x})}} \cdot e \cdot L + P_i \cdot L \cdot r \int_0^\pi (-\sin\theta \vec{x} + \cos\theta \vec{y}) d\theta = \vec{0}$$

$$2. \overrightarrow{C_{(M,\vec{x})}} \cdot e \cdot L - 2 \cdot P_i \cdot L \cdot r \vec{x} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{C_{(M,\vec{x})}} = P_i \cdot \frac{r}{e} \vec{x}$$

$$[\sigma_{(M)}] = \begin{bmatrix} P_i \cdot \frac{r}{e} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

Solution 2 :

L'exercice a déjà été traité. La section O est la plus sollicitée.

$$\{T_{\text{cohésion portion 1}}\} = \begin{Bmatrix} 0 & / \\ -F & / \\ / & -FL \end{Bmatrix}_O$$

Cisaillement

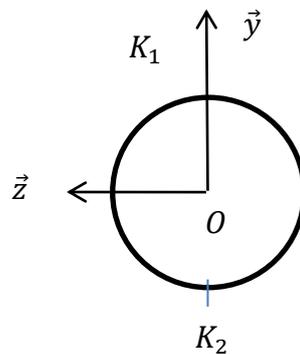
$$[\sigma_{(M)}] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-F}{S} & 0 \\ \frac{-F}{S} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

Flexion

$$[\sigma_{(K)}] = \begin{bmatrix} \sigma_{fl} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

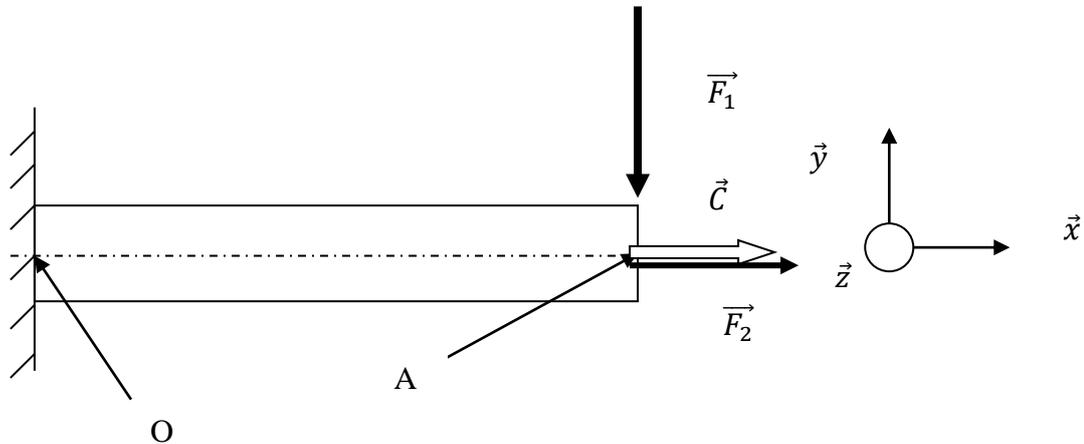
Point K :

$K_1$  en traction ( $\sigma_{fl} > 0$ ),  $K_2$  en compression ( $\sigma_{fl} < 0$ )



Exemple V : dimensionnement d'arbres (flexion + torsion)

Une poutre circulaire en acier de rayon R, de longueur L = 0.4 m est encadrée en O. Elle est soumise en A à un effort F1 = 5000 N et à un couple pur : C = 250 N.m ; F2 = 40000 N



Données : Eacier = 200000 MPa,  $\sigma_e$  traction = 500 MPa, coefficient de sécurité  $k_{et} = 2$ .

1 : déterminer le torseur de cohésion entre O et A.

2 : écrire les matrices des contraintes pour chacune des sollicitations simples prises séparément.

En déduire le point K le plus sollicité de la section la plus sollicitée.

Ecrire la matrice des contraintes en K.

Déterminer les contraintes principales en K.

Dimensionner l'arbre (R) à la torsion idéale.

*Solution V :*

*Etape 1 : PFS afin d'obtenir les efforts aux appuis*

On isole la poutre :



$$\{T_1\} = \begin{pmatrix} X_0 & L_0 \\ Y_0 & M_0 \\ Z_0 & N_0 \end{pmatrix}_O, \{T_2\} = \begin{pmatrix} F_2 & C \\ -F_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_A,$$

PFS en O

$$\{T_2\} = \begin{pmatrix} F_2 & C \\ -F_1 & 0 \\ 0 & -F_1 L \end{pmatrix}_O,$$

Et on obtient les 6 équations :

$$\begin{cases} X_0 + F_2 = 0 \\ Y_0 - F_1 = 0 \\ Z_0 = 0 \end{cases} \begin{cases} L_0 + C = 0 \\ M_0 = 0 \\ N_0 - F_1 L = 0 \end{cases}$$

$$D'o\grave{u} \begin{cases} X_0 = -F_2 \\ Y_0 = F_1 \\ Z_0 = 0 \end{cases} \begin{cases} L_0 = -C \\ M_0 = 0 \\ N_0 = F_1 L \end{cases}$$

Etape 2 : Torseur de cohésion défini en K:

K point courant de la ligne moyenne :  $\overrightarrow{OK} = x \cdot \vec{x}$

Repère local confondu avec le repère global :

$$\vec{n} = \vec{x}, \vec{t}_1 = \vec{y}, \vec{t}_2 = \vec{z}, \{T_{cohésion\ 1/2}\} = \begin{pmatrix} N & M_t \\ T_1 & M_{f1} \\ T_2 & M_{f2} \end{pmatrix}_{(K, \vec{n}, \vec{t}_1, \vec{t}_2)}$$

Il y a une portion de la poutre à étudier : OA

**Portion 1 :  $K \in [OA[$**

On isole [OK]

$\overrightarrow{OK} = x \cdot \vec{x}$  avec  $0 \leq x < L$

O K

---

$$\{T_1\} = \begin{pmatrix} -F_2 & -C \\ F_1 & 0 \\ 0 & F_1 L \end{pmatrix}_O \{T_{cohésion\ portion\ 1}\} = \begin{pmatrix} N & M_t \\ T_1 & M_{f1} \\ T_2 & M_{f2} \end{pmatrix}_K$$

PFS en K :

$$\{T_1\} = \begin{pmatrix} -F_2 & -C \\ F_1 & 0 \\ 0 & F_1(L-x) \end{pmatrix}_K,$$

$$\begin{cases} N - F_2 = 0 \\ T_1 + F_1 = 0 \\ T_2 = 0 \end{cases} \begin{cases} M_t - C = 0 \\ M_{f1} = 0 \\ M_{f2} + F_1(L-x) = 0 \end{cases}$$

Torseur de cohésion sur la portion 1 :

$$\{T_{cohésion\ portion\ 1}\} = \begin{pmatrix} F_2 & C \\ -F_1 & 0 \\ 0 & F_1(x-L) \end{pmatrix}_K$$

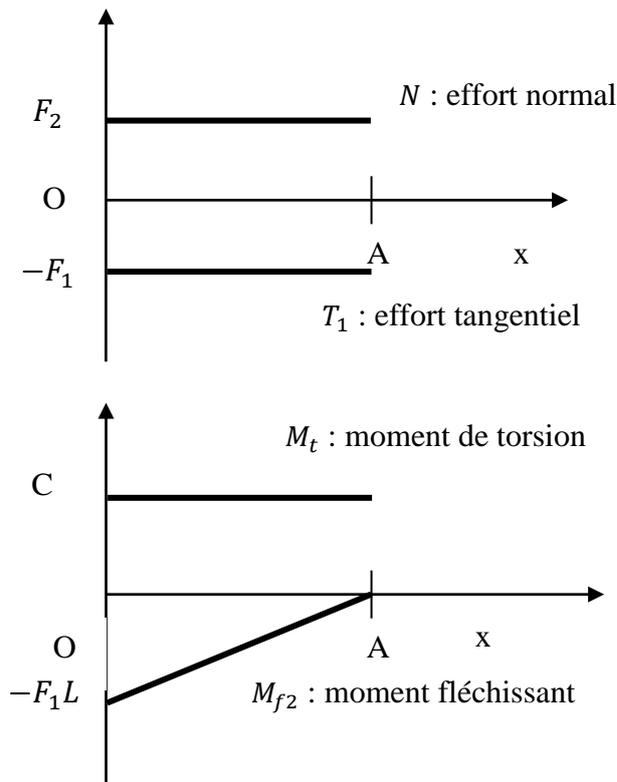
Vérifications :

$$T_1 = -\frac{dM_{f2}}{dx} = -F_1,$$

Et

$$\lim_{x \rightarrow L} \{T_{cohésion\ portion\ 1}\} = \{T_2\} = \begin{pmatrix} F_2 & C \\ -F_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_A$$

### Diagrammes des sollicitations simples



**Conclusion :** la section la plus sollicitée passe par le point O  
Car  $|N|, |T_1|, |M_{f2}|, |M_t|$  maximaux en O

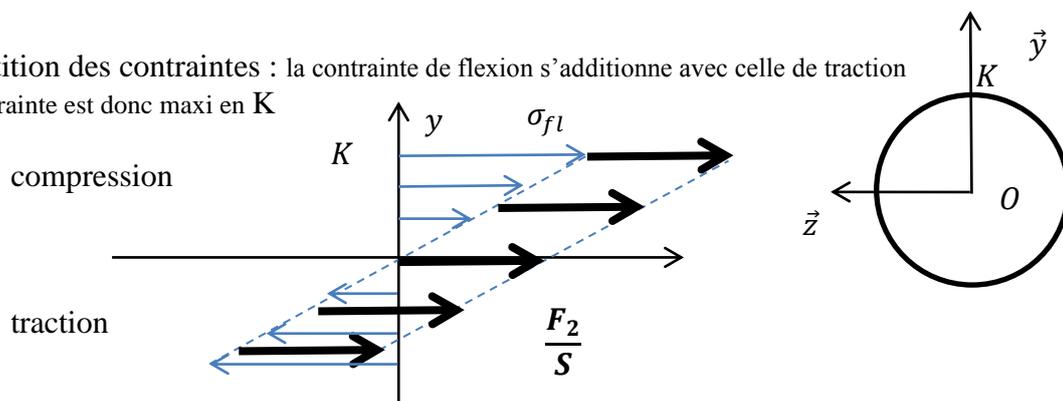
Matrice des contraintes :

$$\text{Traction } [\sigma_{(M)}] = \begin{bmatrix} \frac{F_2}{S} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Cisaillement } [\sigma_{(M)}] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-F_1}{S} & 0 \\ \frac{-F_1}{S} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Flexion

$$[\sigma_{(K)}] = \begin{bmatrix} \sigma_{fl} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_{fl} = \frac{-M_{fz}}{I_{Oz}} \cdot y = \frac{F_1 L}{I_{Oz}} \cdot R$$

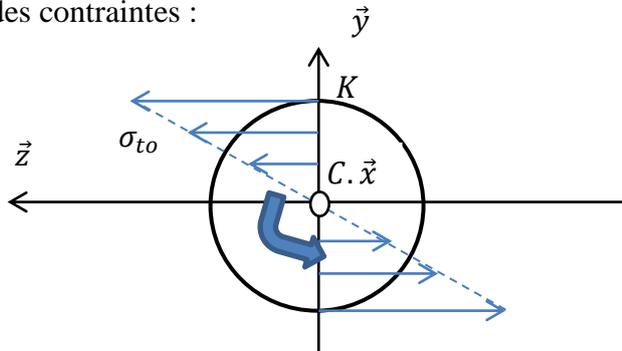
Répartition des contraintes : la contrainte de flexion s'additionne avec celle de traction  
La contrainte est donc maxi en K



Torsion en K :

$$[\sigma_{(K)}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sigma_{to} \\ 0 & 0 & 0 \\ \sigma_{to} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_{to} = \frac{M_t}{I_o} \cdot y = \frac{C}{I_o} \cdot R$$

Répartition des contraintes :



Matrice des contraintes totale :

$$[\sigma_{(K)}] = \begin{bmatrix} \frac{F_1 L}{I_{Oz}} \cdot R + \frac{F_2}{s} & \frac{-F_1}{s} & \frac{C}{I_o} \cdot R \\ \frac{-F_1}{s} & 0 & 0 \\ \frac{C}{I_o} \cdot R & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Torsion idéale :

$$M_{ti} = \sqrt{M_t^2 + M_f^2} = \sqrt{C^2 + (-F_1 L)^2}$$

Contrainte de torsion idéale :  $\sigma_{toi} = \frac{M_{ti}}{I_o} \cdot R$

$\sigma_{toi} < \frac{\sigma_{e \text{ traction}}}{k_{et}}$  d'où  $R > 21.7 \text{ mm}$

Encore des difficultés ?  
Voici une [vidéo](#) explicative  
sur le passage du torseur de cohésion à la  
matrice des contraintes

## Chapitre IV : étude de la déformation

Introduction :

Soit un solide en état d'équilibre initial noté état (0), et pris comme référence. On soumet le solide à un chargement qui passe progressivement de la valeur (0) à la valeur finale (1). Pendant le régime transitoire, les déformations prennent leurs valeurs définitives. On arrive à l'état d'équilibre final (état 1).

But : étude de la transformation géométrique qui fait correspondre l'état final (1) à l'état initial (0).

### I : déplacement et déformation

Soit  $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  lié au solide. On isole au sein de (S) un domaine élémentaire (D). Soient P et Q deux particules voisines de (D)

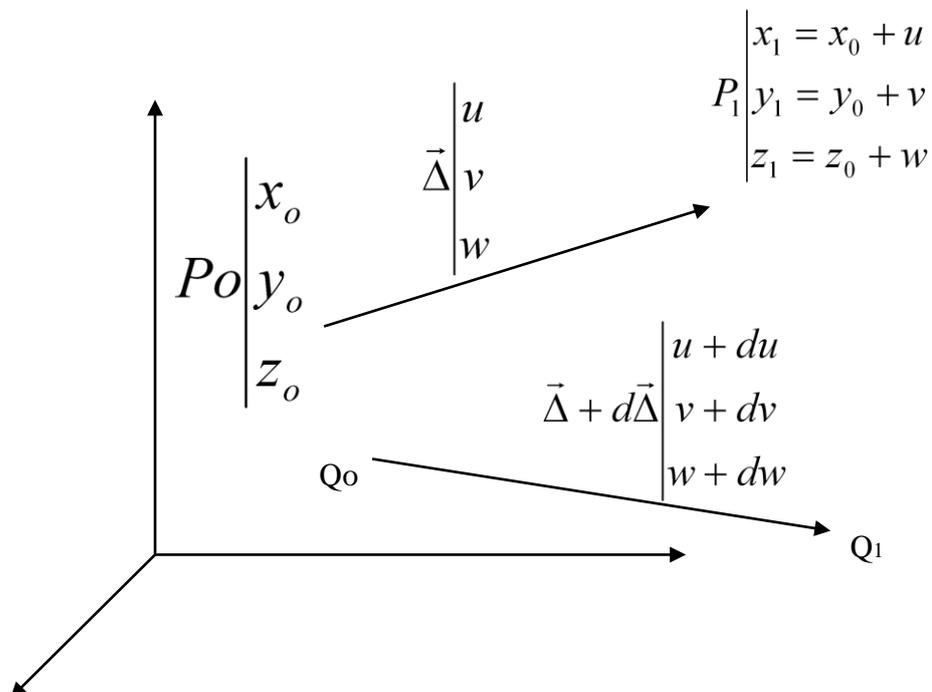
P : état (0) :  $P_0(x_0, y_0, z_0)$

P : état (1) :  $P_1(x_1, y_1, z_1)$

$$\overrightarrow{P_0P_1} = \vec{\Delta} \begin{vmatrix} u \\ v \\ w \end{vmatrix}$$

Q : état (0) :  $Q_0(x_0 + dx, y_0 + dy, z_0 + dz)$

Q : état (1) :  $Q_1$  tel que  $\overrightarrow{Q_0Q_1} = \vec{\Delta} + d\vec{\Delta}$



Hypothèse :  $u, v, w$  fonctions continues et dérivables de  $x, y, z$  :  $u(x, y, z)$  ;  $v(x, y, z)$  ;  $w(x, y, z)$

$$\overrightarrow{Q_0 Q_1} = \begin{pmatrix} u + du \\ v + dv \\ w + dw \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \\ v + \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz \\ w + \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz \end{pmatrix} ; \quad \overrightarrow{P_0 Q_0} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} ; \quad \overrightarrow{P_0 P_1} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{Q_0 Q_1} = \overrightarrow{P_0 P_1} + (\text{grad} \overrightarrow{P_0 P_1}) \cdot \overrightarrow{P_0 Q_0}$$

$(\text{grad} \overrightarrow{P_0 P_1})$ : matrice des dérivées partielles

$$(\text{grad} \overrightarrow{P_0 P_1}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

on décompose cette matrice comme suit:

$$(\text{grad} \overrightarrow{P_0 P_1}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \quad \left. \begin{array}{l} \text{matrice des déformations} \\ \text{symétrique: } [\varepsilon_{(M)}] \end{array} \right\}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) & -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) & 0 \end{bmatrix} \quad \left. \begin{array}{l} \text{matrice des rotations} \\ \text{antisymétrique: } [\Omega_{(M)}] \end{array} \right\}$$

matrice des déformations :  $[\varepsilon_{(M)}]$  ; matrice des rotations :  $[\Omega_{(M)}]$

$$\overrightarrow{Q_0 Q_1} = \overrightarrow{P_0 P_1} + [\varepsilon_{(M)}] \cdot \overrightarrow{P_0 Q_0} + [\Omega_{(M)}] \cdot \overrightarrow{P_0 Q_0}$$

Interprétation géométrique :

Hypothèse : le solide étant peu déformable, des particules voisines ont des déplacements peu différents (petits gradients de déplacement).

Donc toutes les dérivées partielles sont des infiniment petits du premier ordre.

$$1 : \text{si } [\varepsilon_{(M)}] = [\Omega_{(M)}] = [0], \quad \overline{Q_0 Q_1} = \overline{P_0 P_1}$$

C'est une translation, il n'y a pas de déformation.

$$2 : \text{analyse de } [\Omega_{(M)}] \cdot \overline{P_0 Q_0}$$

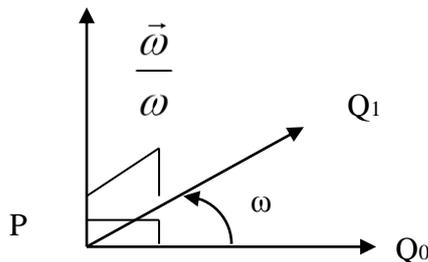
$$\overline{Q_0 Q_1} = [\Omega_{(M)}] \cdot \overline{P_0 Q_0} = \vec{\omega} \wedge \overline{P_0 Q_0} \text{ avec } \vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot.} \overline{P_0 P_1}; \quad \overline{P_0 Q_0} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}; \quad \overline{P_0 P_1} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$\overline{Q_0 Q_1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) dz - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dy \\ - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) dz + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) dy - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) dx \end{pmatrix}$$

$$\omega = \|\vec{\omega}\| \ll 1$$

On l'assimile à une rotation d'angle  $\omega$ , d'axe passant par P et porté par  $\vec{\omega}$ .



3 : analyse de  $[\varepsilon_{(M)}] \cdot \overrightarrow{P_0 Q_0}$  : traduit la déformation pure du domaine élémentaire (D).

On appelle

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}; \gamma_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right); \gamma_{zy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right); \gamma_{zx} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

$$[\varepsilon_{(M)}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} & \varepsilon_y & \gamma_{zy} \\ \gamma_{xz} & \gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

4 : bilan de la décomposition du petit déplacement

$$\overrightarrow{Q_0 Q_1} = \underbrace{\overrightarrow{P_0 P_1}}_{\text{translation}} + \underbrace{[\Omega_{(M)}] \cdot \overrightarrow{P_0 Q_0}}_{\text{rotation}} + \underbrace{[\varepsilon_{(M)}] \cdot \overrightarrow{P_0 Q_0}}_{\text{déformation pure}}$$

comportement du solide indéformable

Le solide indéformable est traité en mécanique générale. Nous ne nous intéresserons ici plus qu'à la déformation pure. Pour ce faire, nous prendrons **un repère lié à la pièce**.

## II : étude de la déformation pure

Repère local  $(P, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  fixe par rapport au solide initial (avant déformation).

Dans ce repère :  $\overrightarrow{Q_0 Q_1} = [\varepsilon_{(M)}] \cdot \overrightarrow{P_0 Q_0}$

$$\begin{cases} du = \varepsilon_x dx + \gamma_{xy} dy + \gamma_{zx} dz \\ dv = \gamma_{xy} dx + \varepsilon_y dy + \gamma_{zy} dz \\ dw = \gamma_{zx} dx + \gamma_{zy} dy + \varepsilon_z dz \end{cases}$$

### II 1 : dilatation et glissement

Soient P et Q deux particules de (D) distantes de L. Au cours de la déformation, elle varie de L0 à L1. La direction de  $\overrightarrow{PQ}$  change.

NB : le repère étant lié à P, P devient donc un point fixe :  $P = P_0 = P_1$

$\vec{n}_0$  direction initiale

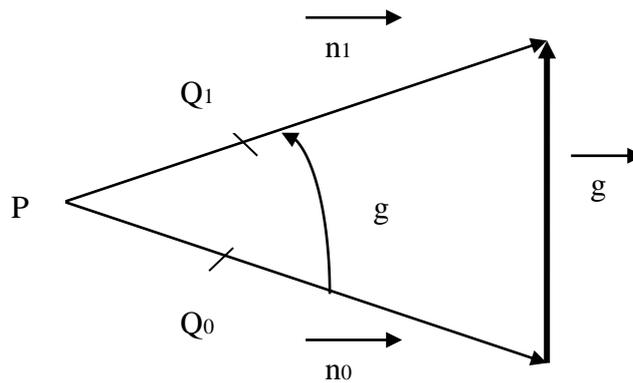
$\vec{n}_1$  direction finale (vecteurs unitaires).

On définit :

$$\text{La dilatation linéique : } \varepsilon = \frac{L1 - L0}{L0} = \frac{\partial PQ}{PQ_0}$$

Le vecteur glissement :  $\vec{g} = \vec{n}_1 - \vec{n}_0 = \partial \vec{n}$

Le module de g, ou taux de glissement, correspond à la mesure en radian de l'angle (car ils sont unitaires !).



Avec  $\varepsilon$  et  $g$  sans dimension et petits.

### Calcul de $\varepsilon$ et $g$

$$\overrightarrow{PQ_0} = PQ_0 \cdot \vec{n}_0 \Rightarrow \partial \overrightarrow{PQ} = \partial PQ \cdot \vec{n}_0 + PQ_0 \cdot \partial \vec{n} = \underbrace{\overrightarrow{PQ_1} - \overrightarrow{PQ_0}}_{\text{final-initial}} = \overrightarrow{Q_0Q_1}$$

$$\text{donc } \partial \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{Q_0Q_1} = \varepsilon \cdot PQ_0 \cdot \vec{n}_0 + PQ_0 \cdot \vec{g}$$

$$\text{or on a vu que: } \overrightarrow{Q_0Q_1} = [\varepsilon_{(M)}] \cdot \overrightarrow{PQ_0}$$

$$\text{d'où } [\varepsilon_{(M)}] \cdot \vec{n}_0 = \varepsilon \cdot \vec{n}_0 + \vec{g}$$

$$\text{vecteur déformation en P relatif à la direction } \vec{n}_0 : \vec{d}_{(P, \vec{n}_0)} = [\varepsilon_{(M)}] \cdot \vec{n}_0$$

Remarque : signe de  $\varepsilon$  :

$\varepsilon > 0$  : dilatation suivant  $\vec{n}_0$

$\varepsilon < 0$  : rétrécissement suivant  $\vec{n}_0$

$$\varepsilon = \vec{d} \cdot \vec{n}_0$$

### II 2 : coefficients de la matrice des déformations

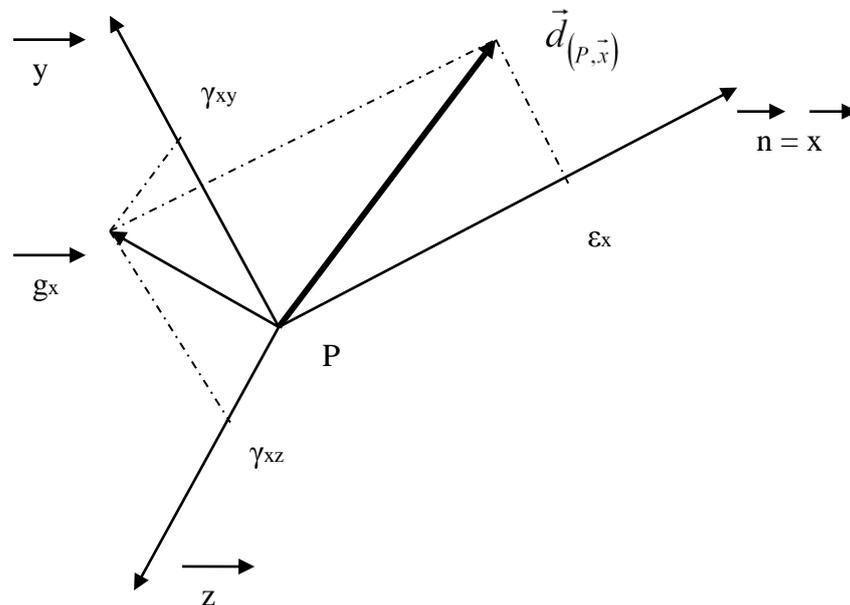
$$[\varepsilon_{(P)}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} & \varepsilon_y & \gamma_{zy} \\ \gamma_{xz} & \gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

si  $\overrightarrow{PQ}$  est porté par  $\vec{x} : \vec{n}(1,0,0)$

$$\vec{d}_{(P, \vec{x})} \begin{vmatrix} \varepsilon_x \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \end{vmatrix} ; \varepsilon = \vec{d}_{(P, \vec{x})} \cdot \vec{x} = \varepsilon_x : \text{dilatation linéique suivant } \vec{x}$$

$$\vec{g}_x = \vec{d}_{(P, \vec{x})} - \varepsilon_x \cdot \vec{x} = \begin{vmatrix} 0 \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \end{vmatrix}$$

$\gamma_{xy}$  et  $\gamma_{xz}$  sont les composantes du vecteur glissement lors d'une déformation suivant la direction  $\vec{x}$ .



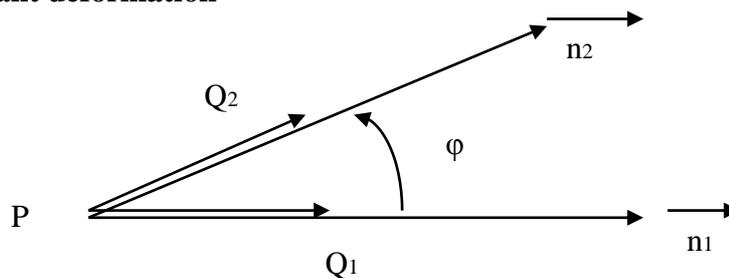
$$\vec{d}_{(P,\vec{x})} = \vec{g}_x + \epsilon_x \cdot \vec{x}$$

### II 3 : calcul de la distorsion (déformation angulaire)

Soient trois particules P, Q1, Q2 appartenant à (D) tel que :

$\vec{PQ}_1$  porté par  $\vec{n}_1$ ,  $\vec{PQ}_2$  porté par  $\vec{n}_2$ ,  $\varphi = (\vec{n}_1, \vec{n}_2)$  avec  $\vec{n}_1$  et  $\vec{n}_2$  unitaires.

#### NB : dessin avant déformation



Question : quelle est la variation de  $\varphi$  au cours de la déformation ?

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = \cos \varphi \Rightarrow \partial(\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2) = -\sin \varphi \cdot \partial \varphi = \vec{n}_1 \cdot \partial \vec{n}_2 + \partial \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2$$

$$\partial \varphi = -\frac{\vec{n}_1 \cdot \partial \vec{n}_2 + \partial \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{\sin \varphi}$$

on a montré que :  $\partial \vec{n}_1 = \vec{g}_1 = [\epsilon_{(P)}] \cdot \vec{n}_1 - \epsilon_1 \cdot \vec{n}_1$  et  $\partial \vec{n}_2 = \vec{g}_2 = [\epsilon_{(P)}] \cdot \vec{n}_2 - \epsilon_2 \cdot \vec{n}_2$

d'où

$$\partial \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = \left\{ [\epsilon_{(P)}] \cdot \vec{n}_1 - \epsilon_1 \cdot \vec{n}_1 \right\} \cdot \vec{n}_2 = \vec{d}_1 \cdot \vec{n}_2 - \epsilon_1 \cdot \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = \underbrace{\gamma_{12}}_{\text{projection de } d_1 \text{ sur } n_2} - \epsilon_1 \cdot \cos \varphi$$

$$\text{demême : } \vec{n}_1 \cdot \partial \vec{n}_2 = \underbrace{\gamma_{21}}_{\gamma_{12} \text{ par symétrie}} - \varepsilon_2 \cdot \cos \varphi$$

conclusion:

$$\partial \varphi = \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \cdot \cos \varphi - 2 \cdot \gamma_{12}}{\sin \varphi}$$

Cas particulier :

$$\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 : \cos \varphi = 0, \sin \varphi = 1$$

$$d'ou \partial \varphi = -2 \cdot \gamma_{12}$$

$$\vec{n}_1 = \vec{x}, \vec{n}_2 = \vec{y} \Rightarrow \partial \varphi = -2 \cdot \gamma_{xy}$$

Les  $\gamma$  de la matrice des déformations sont les demi variations angulaires des angles du repère.

#### II 4 : déformations principales et directions principales des déformations

La matrice des déformations est symétrique et donc diagonalisable. Les valeurs propres sont appelées déformations principales, et les vecteurs propres associés les directions principales des déformations.

$$[\varepsilon_{(M)}] = \begin{bmatrix} \vec{d}_{(M, \vec{x})} & \vec{d}_{(M, \vec{y})} & \vec{d}_{(M, \vec{z})} \\ \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} \begin{matrix} \vec{X} \\ \vec{Y} \\ \vec{Z} \end{matrix}$$

Remarques :

Pas de distorsion dans le repère principal (pas de glissement).

$$\text{Trace : } tr[\varepsilon_{(M)}] = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \text{constante}$$

#### II 5 : diagramme de Mohr

But : représenter sur un dessin en deux dimensions l'état de déformation autour d'un point.

On va représenter l'extrémité P du vecteur déformation  $\vec{d}_{(M, \vec{n})}$  dans le demi plan représentatif

( $\varepsilon, g$ ). On cherche le lieu de P lorsque l'on considère toutes les directions autour de M.

$$\vec{n} \begin{matrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{matrix} \begin{matrix} \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = \vec{d}_{(M, \vec{n})} \cdot \vec{n} = \varepsilon_x \cdot \alpha^2 + \varepsilon_y \cdot \beta^2 + \varepsilon_z \cdot \gamma^2 \\ \varepsilon^2 + g^2 = \varepsilon_x^2 \cdot \alpha^2 + \varepsilon_y^2 \cdot \beta^2 + \varepsilon_z^2 \cdot \gamma^2 = \vec{d}_{(M, \vec{n})} \cdot \vec{d}_{(M, \vec{n})} \\ 1 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \end{array} \right. \end{matrix}$$

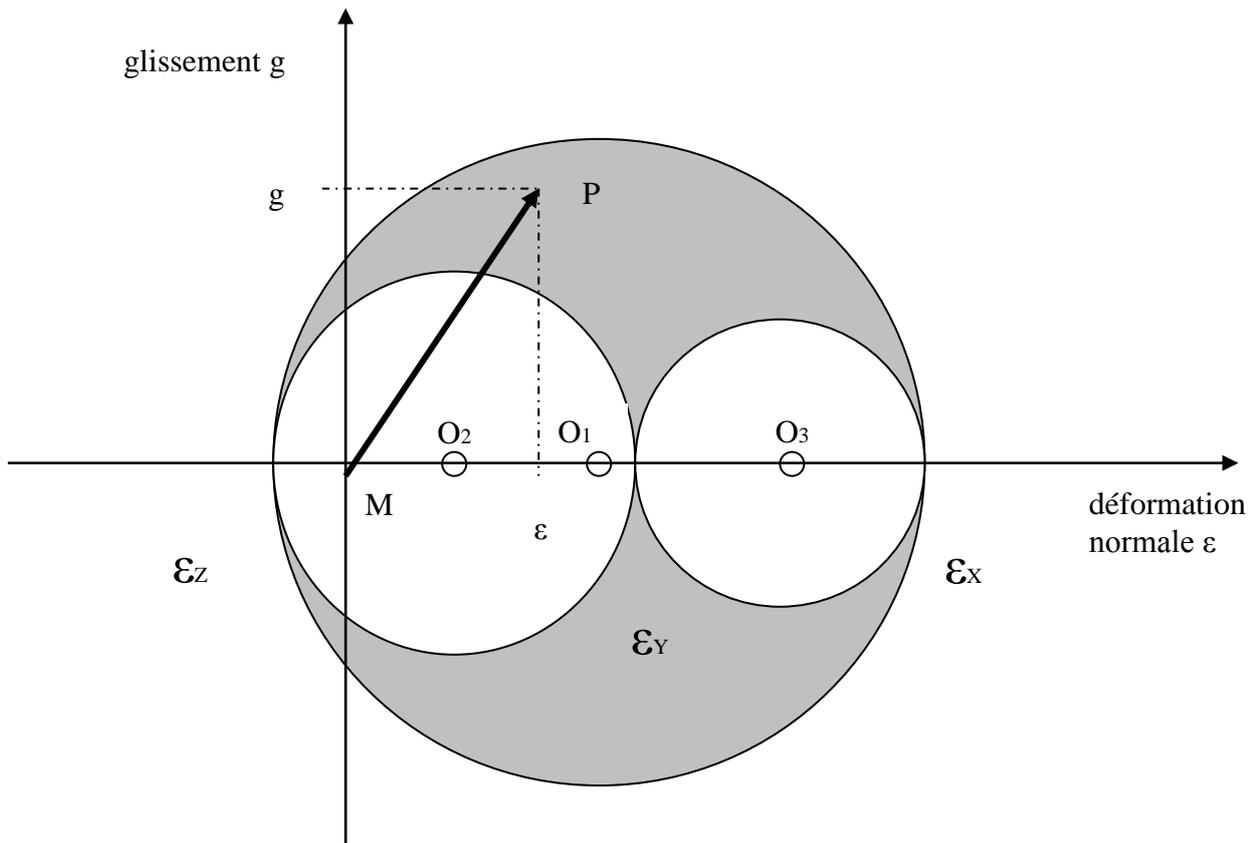
$$\begin{cases} \alpha^2 = \frac{g^2 + (\varepsilon - \varepsilon_y)(\varepsilon - \varepsilon_z)}{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)(\varepsilon_x - \varepsilon_z)} \geq 0 \\ \beta^2 = \frac{g^2 + (\varepsilon - \varepsilon_x)(\varepsilon - \varepsilon_z)}{(\varepsilon_y - \varepsilon_z)(\varepsilon_y - \varepsilon_x)} \geq 0 \\ \gamma^2 = \frac{g^2 + (\varepsilon - \varepsilon_x)(\varepsilon - \varepsilon_y)}{(\varepsilon_z - \varepsilon_x)(\varepsilon_z - \varepsilon_y)} \geq 0 \end{cases}$$

*hypothèse:  $\varepsilon_x > \varepsilon_y > \varepsilon_z$*

$$\begin{cases} \varepsilon^2 + g^2 - \varepsilon \cdot (\varepsilon_y + \varepsilon_z) + \varepsilon_y \cdot \varepsilon_z \geq 0 \\ \varepsilon^2 + g^2 - \varepsilon \cdot (\varepsilon_x + \varepsilon_z) + \varepsilon_x \cdot \varepsilon_z \leq 0 \\ \varepsilon^2 + g^2 - \varepsilon \cdot (\varepsilon_y + \varepsilon_x) + \varepsilon_y \cdot \varepsilon_x \geq 0 \end{cases}$$

*Ce sont des inéquations de disques*

donc P est en dehors de deux cercles et à l'intérieur du troisième.

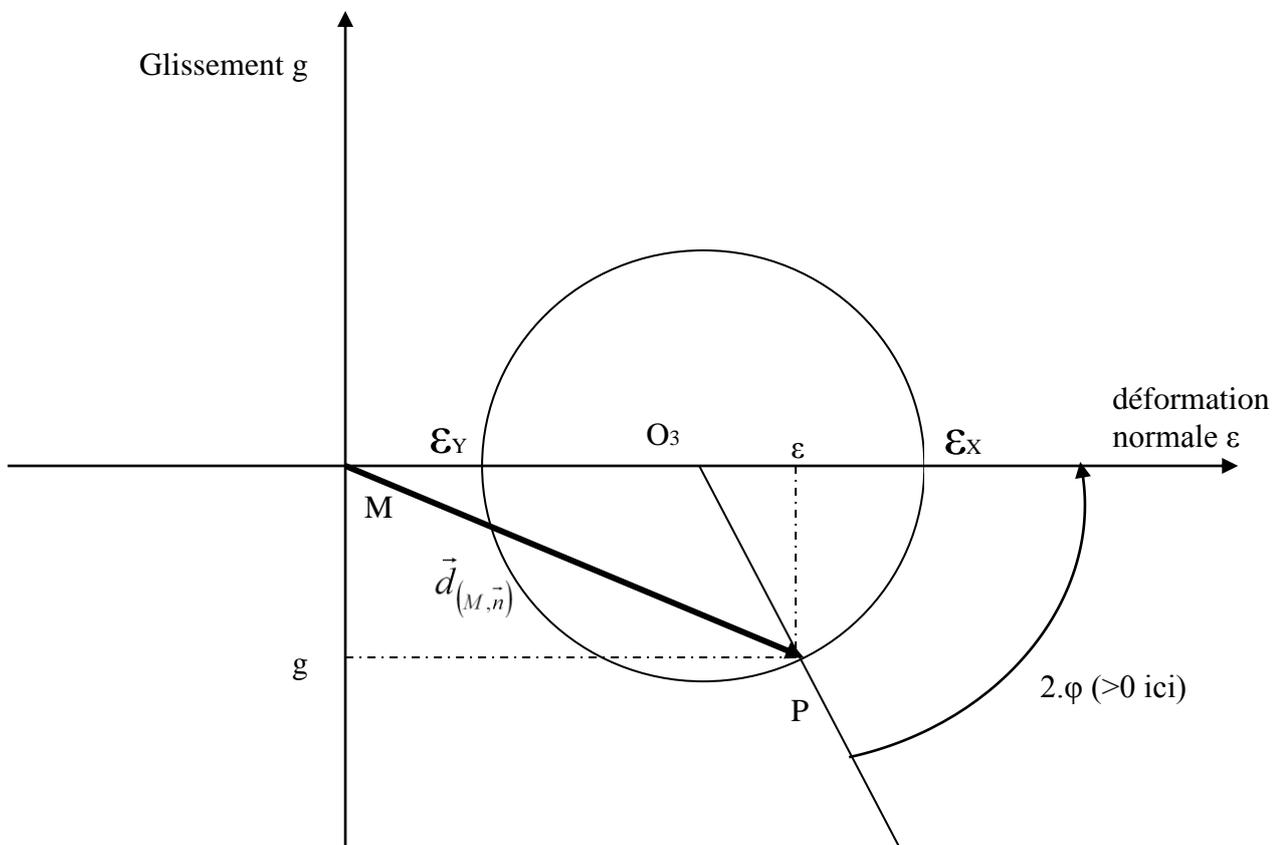
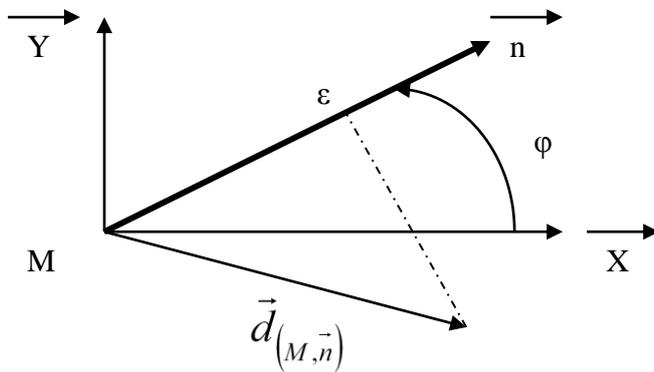


Remarque : la dilatation linéique est maximale suivant les directions principales.

$g_{\max} = \text{rayon du plus grand des trois cercles.}$

Cas particulier :

$\vec{n}$  appartient au plan principal  $\vec{n} \in (M, \vec{X}, \vec{Y})$



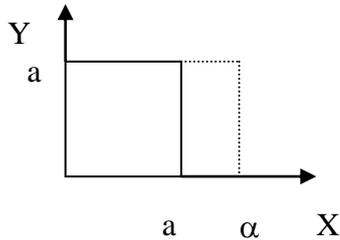
Remarque : le glissement est maximum suivant les directions à  $45^\circ$  par rapport aux directions principales.

Exemple I : Ecrire la matrice des déformations et des contraintes dans les deux cas suivants :

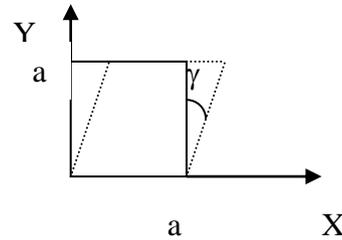
Avant déformation : \_\_\_\_\_

Après déformation : .....

1<sup>er</sup> cas :



2<sup>ème</sup> cas :



Exemple II : Soit la matrice des déformations en un point M dans le repère  $(M, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  :

$$[\varepsilon_{(M)}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.001 & 0.001 \\ 0 & 0.001 & 0.003 \end{bmatrix}$$

1 : Calculer le vecteur déformation puis les déformations normale et tangentielle sur la facette de normale  $(1,1,1)$ .

2 : calculer les déformations principales et les directions principales

*Solution I :*

Cas 1 : pas de distorsion donc la matrice est diagonale. Seule une déformation suivant X existe, donc  $\varepsilon_x = \frac{\alpha - a}{a}$

$$[\varepsilon_{(M)}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Cas 2 : pas d'allongements, que de la distorsion dans le plan  $(O, \vec{X}, \vec{Y})$ , donc  $\gamma_{xy} = \frac{-\gamma}{2}$  avec  $\gamma < 0$  (sens horaire sur le schéma)

$$[\varepsilon_{(M)}] = \begin{bmatrix} 0 & \gamma_{xy} & 0 \\ \gamma_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

*Solution II :*

Normalons le vecteur normal :

$$\vec{n} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \vec{d}_{(M, \vec{n})} = [\varepsilon_{(M)}] \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{0.004}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \varepsilon = \vec{d}_{(M, \vec{n})} \cdot \vec{n} = \frac{0.004}{3}; \gamma \vec{t} = \vec{d}_{(M, \vec{n})} - \varepsilon \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} -\frac{0.004}{3\sqrt{3}} \\ -\frac{0.004}{3\sqrt{3}} \\ \frac{0.008}{3\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Déformations principales et directions principales :

2 solutions ; soit par le calcul, soit par Mohr

On trouve  $\varepsilon_X = 0, \varepsilon_Y = 0.001 + \sqrt{0.0005}, \varepsilon_Z = 0.001 - \sqrt{0.0005}, \phi = -76.71^\circ$

## Chapitre V : Extensométrie électrique

### 1 principe

Pour déterminer les déformations principales, contraintes principales et directions principales en pratique, on colle à la surface d'une pièce des jauges de contrainte (qui mesurent des déformations !). La pièce est ensuite soumise à des sollicitations extérieures. Ces jauges révèlent alors les déformations à la surface de la pièce (à la surface règne un état plan de contraintes).

Le traitement de ces données permet d'obtenir les déformations principales et les directions principales. La connaissance des caractéristiques mécaniques du matériau donne accès aux contraintes.

Cette méthode permet de valider le dimensionnement de pièces complexes ou de pièces soumises à des sollicitations mal définies.

*(Extrait modifié d'un article de « National Instrument »)*

### 2. Aperçu des jauges de contrainte et de la mesure de déformation

Même s'il existe plusieurs méthodes différentes pour mesurer la déformation, la plus courante est le recours à la jauge de contrainte, matériel dont la résistance électrique varie en fonction de la charge exercée sur le matériau. La jauge la plus courante est la jauge de contrainte métallique encollée.

La jauge de contrainte métallique se compose d'un fil très fin, monté en spirale. On optimise ainsi la quantité de fil sujette à la déformation dans la direction longitudinale (Figure n°2). La grille repose sur un support fin, attaché directement au spécimen sous test. Par conséquent, la déformation subie par le spécimen sous test est transférée directement à la jauge de contrainte, qui réagit par un changement linéaire de sa résistance électrique. Les jauges de contrainte sont proposées dans le commerce avec des valeurs de résistance nominales comprises entre 30 et 3000  $\Omega$  (120, 350 et 1000  $\Omega$  étant les valeurs les plus courantes).

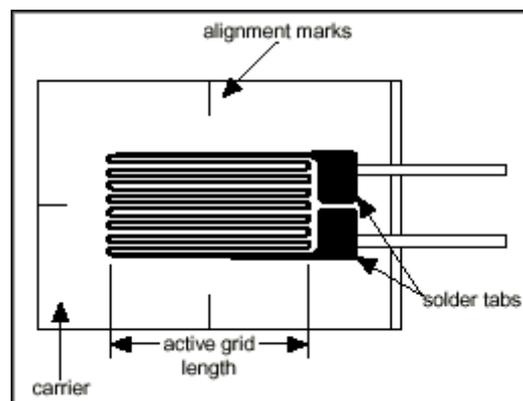


Figure n°2. Jauge de contrainte métallique encollée

### **Types de topologie**

En pratique, les mesures de déformation impliquent rarement des quantités supérieures à quelques microdéformations ( $\epsilon$  en  $10^{-6}$ ). Par conséquent, le fait de mesurer une déformation nécessite la mesure précise de très petites variations de la résistance. Pour mesurer des variations si petites de la résistance, les jauges de contrainte sont presque toujours utilisées dans une configuration en pont avec une source d'excitation de tension. Le pont de Wheatstone, illustré en Figure n°3, se compose de quatre branches résistives avec une tension d'excitation,  $V_{EX}$ , appliquée sur le pont.

$$V_O = \left[ \frac{R_3}{R_3 + R_4} - \frac{R_2}{R_1 + R_2} \right] \cdot V_{EX}$$

La tension de sortie du pont,  $V_O$ , équivaut à :

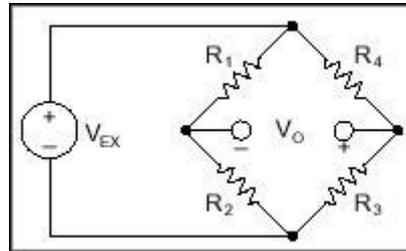


Figure n°3. Configuration en pont de Wheatstone

Cette équation indique que lorsque  $R_1/R_2 = R_4/R_3$ , la sortie de tension,  $V_O$ , est égale à zéro. Dans ces conditions, on dit que le pont est "équilibré". Tout changement de résistance dans une des branches du pont conduit à une tension de sortie non nulle. Par conséquent, si vous remplacez la résistance  $R_4$  dans la Figure n°3 par une jauge de contrainte active, tout changement dans la résistance de la jauge de contrainte déséquilibre le pont et produit une tension de sortie non égale à zéro. Si la résistance nominale de la jauge de contrainte est désignée par  $R_G$ , alors le changement induit par la contrainte dans la résistance,  $\Delta R$ , peut s'exprimer de la façon suivante :  $\Delta R = R_G \cdot GF \cdot \varepsilon$ . (GF représente le coefficient de proportionnalité entre la variation relative de résistance et la variation relative de déformation, appelé facteur de jauge).

En supposant que  $R_1 = R_2$  et  $R_3 = R_G$ , l'équation du pont ci-dessus peut se réécrire pour exprimer  $V_O/V_{EX}$  comme fonction de la contrainte (voir Figure n°4). Notez la présence du terme  $1/(1+GF \cdot \varepsilon / 2)$  qui indique la non-linéarité de la sortie du quart de pont en rapport avec la déformation.

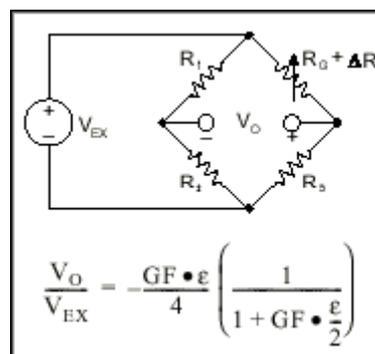


Figure n°4. Circuit en quart de pont

Dans l'idéal, vous voulez que la résistance de la jauge de contrainte change uniquement en réponse à la contrainte appliquée. Cependant, le matériau de la jauge de contrainte, ainsi que le matériau du spécimen auquel la jauge est appliquée, réagit aussi aux variations de température. Les fabricants de jauges de contrainte essaient de minimiser la sensibilité à la température en traitant le matériau. Même si les jauges compensées réduisent la sensibilité thermique, elles ne la font pas disparaître complètement.

En utilisant deux jauges de contrainte dans le pont, vous pouvez minimiser davantage l'effet de température. Par exemple, la Figure n°5 illustre la configuration d'une jauge de contrainte où une jauge est active ( $R_G + \Delta R$ ) et une seconde jauge est placée transversalement à la contrainte appliquée. Par conséquent, la contrainte a peu d'effet sur la seconde jauge,

qualifiée de "factice". Cependant, toute variation de température affecte les deux jauges de la même manière. Vu que les variations de température sont identiques dans les deux jauges, le rapport de leur résistance ne change pas, la tension  $V_O$  non plus, et les effets de la variation de température sont réduits au strict minimum.

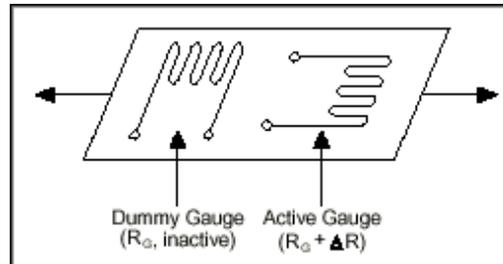
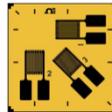


Figure n°5. Utilisez une jauge "factice" pour éliminer les effets de température

### 3 : interprétation des résultats

Pour obtenir l'état de déformation et de contrainte en un point M de la surface d'une pièce, on colle une rosette en M. (rosette : rassemblement sur une même plaquette de trois jauges de contrainte orientées suivant trois directions  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ )



Les résultats remarquables seront obtenus en partant du problème résolu.

#### A : problème résolu

Soit une pièce sur laquelle on colle (surface libre) une rosette à 45° en M (directions  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ )

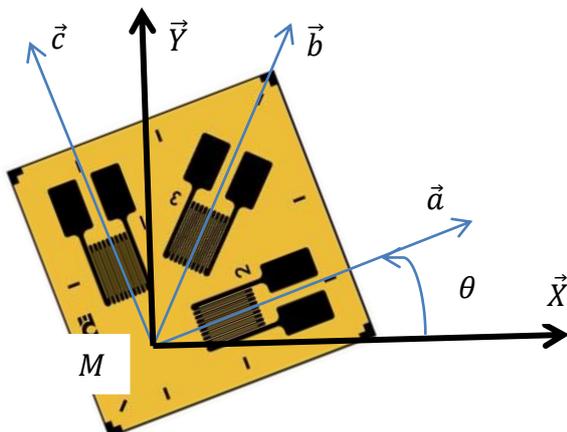
On suppose connues les déformations principales en M :  $(\varepsilon_X, \varepsilon_Y, \varepsilon_Z)$

Et les directions principales :  $\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}$

Avec  $(\vec{X}, \vec{a}) = \theta$  connu

$$[\varepsilon_{(M)}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_X & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_Y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_Z \end{bmatrix}_{(M, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})},$$

On mesure  $\varepsilon_a, \varepsilon_b, \varepsilon_c$  à l'aide des trois jauges : que représentent ces 3 mesures ?

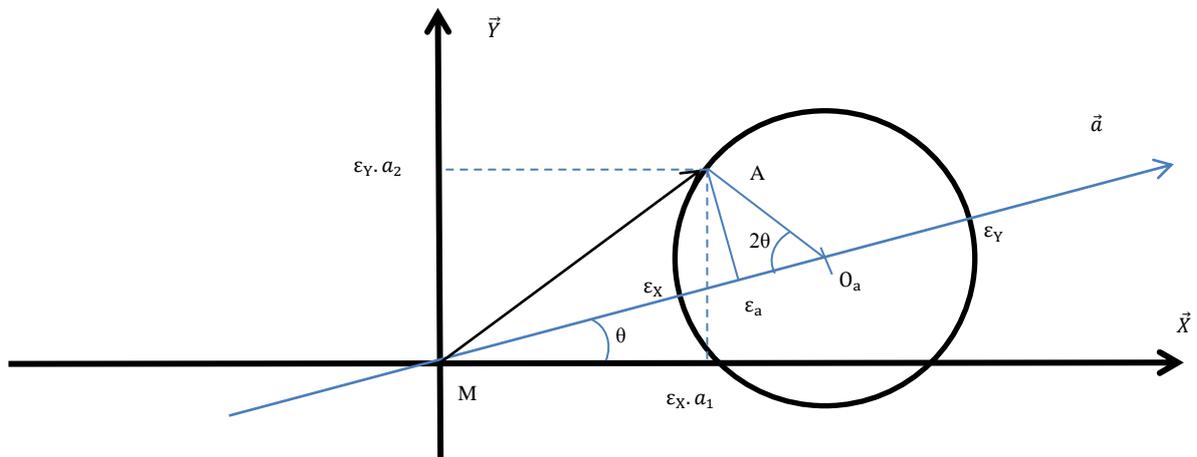


$$\vec{a} \begin{cases} a_1 = \cos\theta \\ a_2 = \sin\theta \\ 0 \end{cases} \quad (M, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$$

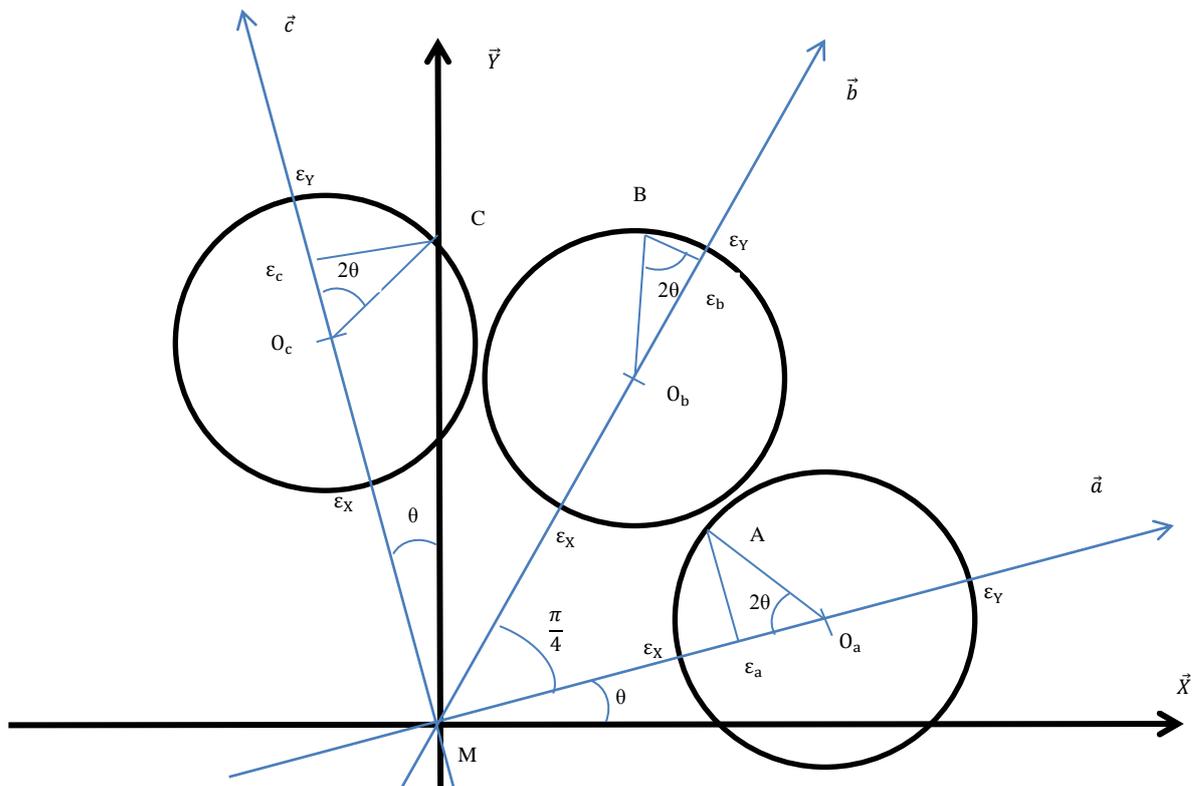
$$\varepsilon_a = \vec{d}_{(M, \vec{a})} \cdot \vec{a} = \begin{bmatrix} \varepsilon_X & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_Y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_Z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{a} = \underbrace{(\varepsilon_X a_1 \vec{X} + \varepsilon_Y a_2 \vec{Y})}_{\vec{MA}}$$

De même  $\varepsilon_b = \vec{MB} \cdot \vec{b}$ ,  $\varepsilon_c = \vec{MC} \cdot \vec{c}$

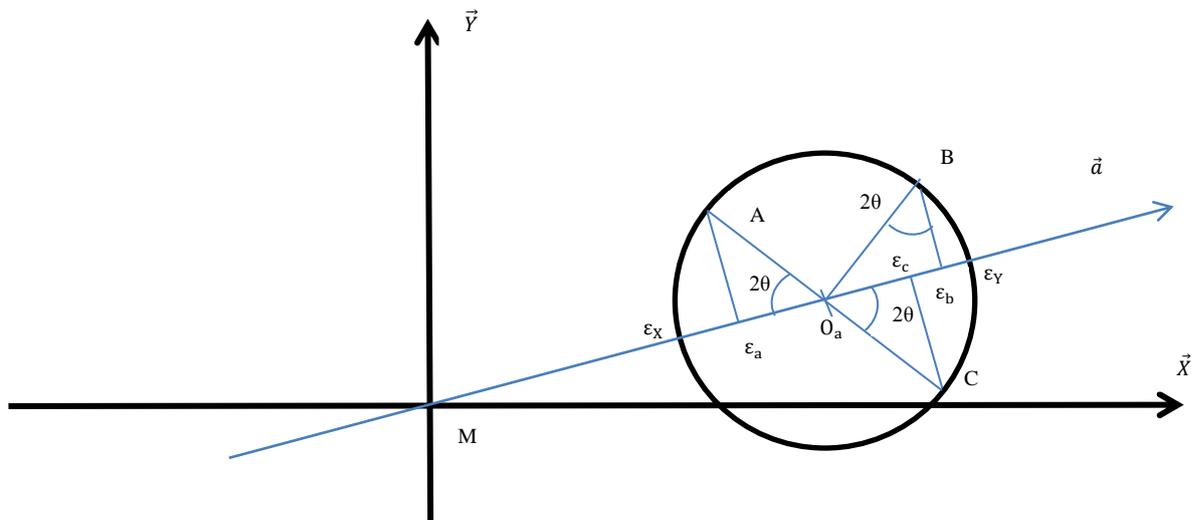
Construisons  $\vec{MA}$  en faisant varier  $\theta$  de 0 à  $2\pi$  : on obtient un cercle de centre  $O_a$  et de diamètre  $[\varepsilon_X \varepsilon_Y]$  (pour  $\theta=0$ ,  $\vec{a} = \vec{X}$ ,  $\vec{MA} = \varepsilon_X \vec{X}$  ; pour  $\theta=\frac{\pi}{2}$ ,  $\vec{a} = \vec{Y}$ ,  $\vec{MA} = \varepsilon_Y \vec{Y}$  ; etc...)



Effectuons la construction graphique pour situer A, B, C en faisant varier  $\theta$  de 0 à  $2\pi$  : on obtient 3 cercles de centre  $O_a, O_b, O_c$  et de diamètre  $[\varepsilon_X \varepsilon_Y]$



On superpose ensuite les 3 cercles



$O_aB = O_aA, \widehat{AO_a\varepsilon_a} = \widehat{O_aB\varepsilon_b} = 2\theta, \widehat{A\varepsilon_aO_a} = \widehat{B\varepsilon_bO_a} = \frac{\pi}{2}$ , donc  $A\varepsilon_aO_a$  et  $B\varepsilon_bO_a$  sont des triangles identiques.

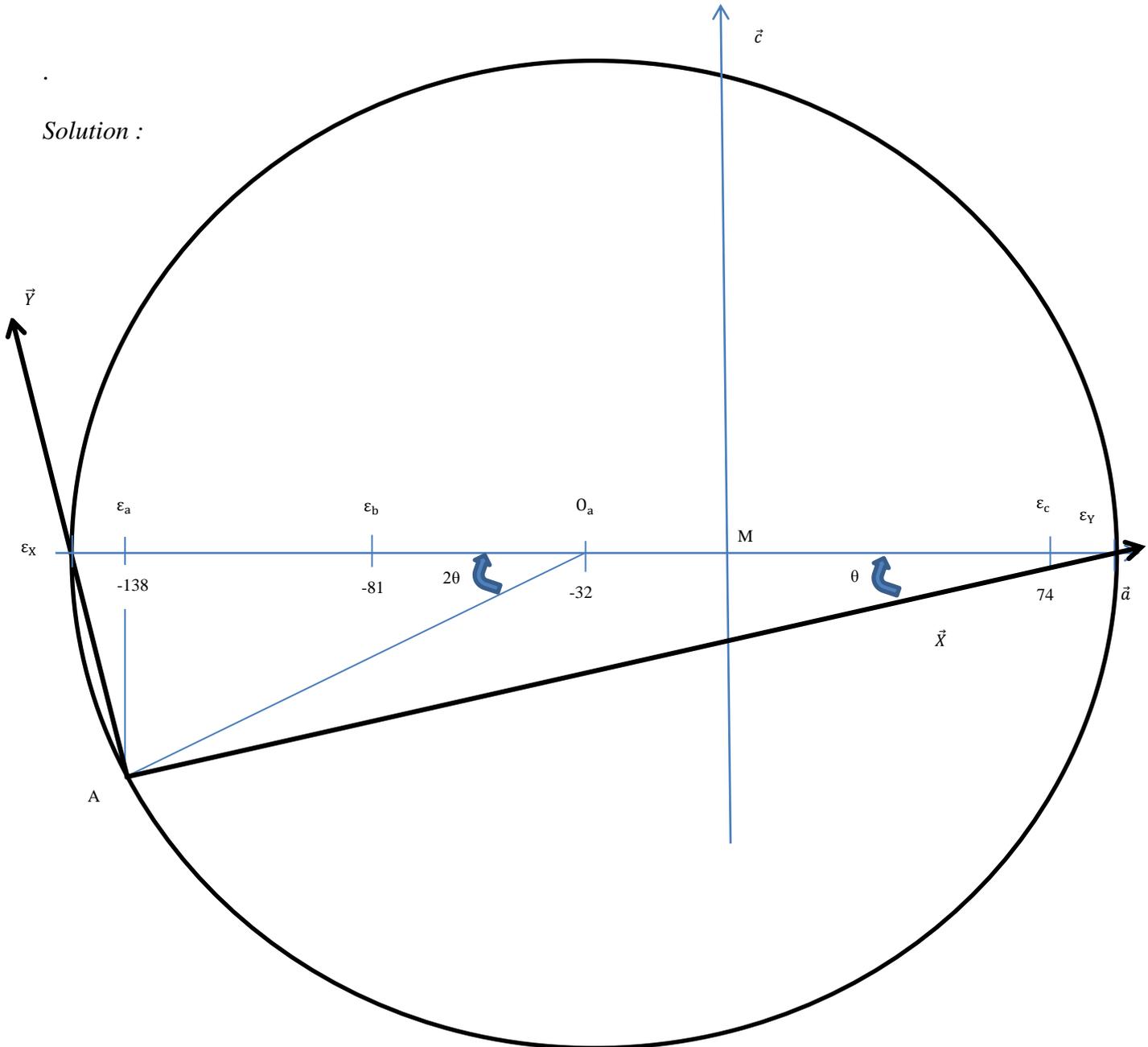
On en déduit que :

$$\begin{cases} \overrightarrow{O_a\varepsilon_b} \cdot \vec{a} = \overrightarrow{\varepsilon_a A} \cdot \vec{c} \\ O_a \text{ milieu de } [\varepsilon_a \varepsilon_c] \end{cases}$$

**B : problème réel**

On dépouille pour un chargement les données issues d'une rosette à 45°  
Les mesures donnent :  $\varepsilon_a = -138.10^{-6}$ ,  $\varepsilon_b = -81.10^{-6}$ ,  $\varepsilon_c = 74.10^{-6}$   
Déterminer les déformations et les directions principales en M

*Solution :*



$$\begin{cases} \overline{O_a \varepsilon_b} \cdot \vec{a} = \overline{\varepsilon_a A} \cdot \vec{c} = -49 \\ \left\{ \begin{array}{l} O_a \text{ lieu de } [\varepsilon_a \varepsilon_c] : -32 \\ \varepsilon_x = -150.10^{-6}, \varepsilon_y = 88.10^{-6}, \theta = -13^\circ \end{array} \right. \end{cases}$$