

Livre 1

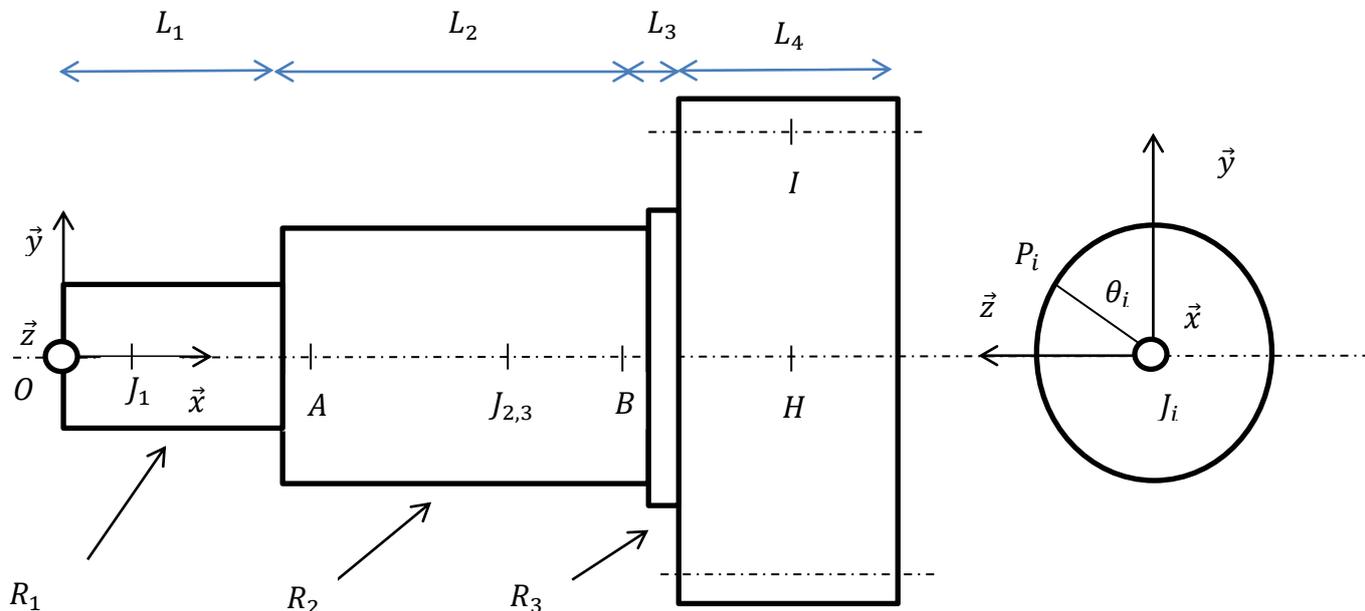
**Projet de Résistance Des Matériaux**

**Sujet du projet:** il est souvent très difficile de déterminer les efforts qui s'appliquent sur une structure (modélisation complexe, efforts dynamiques...).

Une méthode expérimentale très utilisée consiste à coller des rosettes de jauges de déformations (appelées à tort « jauges de contraintes ») à la surface d'une pièce afin de déterminer la charge qui s'y applique réellement puis de vérifier le dimensionnement.

L'étude qui vous est proposée consiste, à partir de données fournies par des rosettes, à déterminer le coefficient de sécurité d'un arbre de géométrie connue, soumis à des efforts inconnus, selon le critère de Tresca.

Pièce étudiée : arbre en alliage d'aluminium 7075 monté sur deux roulements (rotule en A, linéaire annulaire en B), bloqué en rotation en O (non encastré), sur lequel un effort est appliqué en I (ponctuelle : résultante à 3 composantes inconnues). 3 rosettes de 3 jauges de déformations à 45° sont collées à la périphérie de la pièce, jauge i en  $P_i$  ( $i = 1, 2, 3$ )



Des éprouvettes du même alliage que l'arbre sont disponibles pour des essais de traction (bancs Deltalab en B021).

Dimensions en mm de l'arbre (rayons de raccordement entre les différents diamètres : 3 mm)

groupe	1	2	3	4	5	6	7	8	9
OJ <sub>1</sub>	10	15	20	10	15	20	10	15	20
OJ <sub>23</sub>	55	60	65	65	55	60	60	55	65
OA	40	35	30	40	35	30	40	30	35
OB	95	90	100	100	95	90	90	95	100
OH	125	120	130	120	130	125	125	120	130
HI	40	45	35	35	40	45	40	35	45
R <sub>1</sub>	15	14	16	16	15	14	14	15	16
R <sub>2</sub>	20	25	25	20	20	25	20	25	25
R <sub>3</sub>	22	27	27	22	22	27	22	27	27

$$L_1 = OA - 5, L_2 = AB + 10, L_3 = 2, L_4 = (BH - 7) * 2$$

Collage des rosettes :

Les jauges composant une rosette sont collées en  $P_i$  suivant 3 directions :  $\vec{a}_i, \vec{b}_i, \vec{c}_i$  ( $45^\circ$  entre 2 jauges)

rosette	$\theta_i$	$\vec{a}_i$	$\vec{c}_i$
1	$0^\circ$	$\vec{x}$	$-\vec{z}$
2	$0^\circ$	$\vec{x}$	$-\vec{z}$
3	$90^\circ$	$\vec{x}$	$\vec{y}$

Résultats des rosettes (en  $10^{-6}$ )

groupe	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\varepsilon_{a1}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\varepsilon_{b1}$	-221.7	-306.8	-159.9	-159.9	-221.7	-306.8	-272.7	-194.0	-205.5
$\varepsilon_{c1}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\varepsilon_{a2}$	45.5	39.0	36.9	53.3	55.8	44.1	64.8	28.4	39.5
$\varepsilon_{b2}$	-64.9	-32.1	-22.6	-55.4	-60.4	-29.7	-54.5	-26.2	-33.2
$\varepsilon_{c2}$	-13.6	-11.7	-11.1	-16.0	-16.7	-13.2	-19.4	-8.5	-11.8
$\varepsilon_{a3}$	10.4	6.7	6.7	10.4	10.4	6.7	10.4	6.7	6.7
$\varepsilon_{b3}$	-74.8	-41.1	-32.6	-67.1	-75.2	-41.4	-72.3	-32.5	-42.7
$\varepsilon_{c3}$	-3.1	-2.0	-2.0	-3.1	-3.1	-2.0	-3.1	-2.0	-2.0

**Déroulement du projet** : vous êtes en équipe de 3 ou 4 (groupes aléatoires). Chaque groupe est constitué d'un rapporteur et d'un planificateur (ces postes changent toutes les semaines, planning prédéfini fourni en début de semestre).

**Rôle du planificateur** : mise en place d'un planning numérique des tâches sur les 7 (ou 14) semaines du projet. Il met à jour ce planning (tâches effectuées, en cours et à faire) toutes les semaines et il le présente. Il rend un document final récapitulatif la progression du projet avec le temps passé par tâche.

**Rôle du rapporteur** : il s'approprie le travail du groupe; il l'explique ensuite pendant 5 à 10 minutes -à l'aide de documents clairs et concis- à l'enseignant. Il restitue ensuite au groupe les remarques.

**Rôle de chaque membre du groupe** : il tient à jour un portfolio numérique (outil non imposé) dans lequel il répertorie **les tâches qu'il a effectuées** à chaque séance, chronologiquement (seul ou en groupe), pendant et en dehors des cours avec le temps consacré, les problèmes rencontrés, les solutions apportées. Le temps total hors séance doit apparaître. L'étudiant doit faire apparaître qu'il a participé à chaque compétence visée du projet (pas d'étudiant mono tâche !). Les brouillons, ordonnés chronologiquement, feront foi (à présenter dans un classeur).

Temps à allouer au projet par personne : 21 (ou 42) heures encadrées + 10.5 (ou 21) heures « maison » environ.

De plus, « un classeur de projet » sera tenu à jour avec les documents exposés par le rapporteur, classeur consultable à tout moment par l'enseignant. L'évaluation prendra fortement en compte la capacité du groupe à fournir des documents rigoureux et exploitables : professionnels.

**Evaluation du projet** : chaque audition d'un rapporteur + planificateur est évaluée et contribue à la note de contrôle continu du groupe. Leurs portfolios sont examinés en même temps et leur apporte une note personnelle. L'évaluation finale (toute l'équipe) complète la note du groupe : pendant 5 minutes le résultat des travaux est présenté et commenté, un bilan est attendu (prendre du recul), mais aucun dossier (5 slides environ) : les conclusions étayées sont évaluées prioritairement, ainsi que le planning restituant la démarche scientifique.

### **Suggestion de progression du projet (non imposée)**

#### **Partie I :**

- 1 : Faire l'étude en littéral en prenant les efforts de denture d'engrenages en I :  $X_I, Y_I, Z_I$
- 2 : Déterminer les efforts aux appuis en fonction de  $X_I, Y_I, Z_I$
- 3 : Déterminer le torseur de cohésion en fonction de  $X_I, Y_I, Z_I$
- 4 : Déterminer les matrices des contraintes aux points  $P_i$  en fonction de  $X_I, Y_I, Z_I$

#### **Partie II :**

- 5 : exploiter les résultats des rosettes pour trouver les matrices des déformations aux points  $P_i$
  - 6 : en déduire les matrices des contraintes aux points  $P_i$
  - 7 : en identifiant les étapes 4 et 6, calculer les efforts en I :  $X_I, Y_I, Z_I$
- NB : vérification : la denture du pignon est hélicoïdale, angle de pression  $20^\circ$ , angle d'inclinaison  $30^\circ$ .

#### **Partie III :**

- 8 : déterminer la section la plus sollicitée en prenant en compte les facteurs de concentration de contraintes dues aux usinages de l'arbre
- 9 : dimensionner l'arbre par le critère de Tresca

**NB** : le module de Young sera obtenu expérimentalement par un essai de traction ; le coefficient de Poisson vaut 0,3

Voici une vidéo expliquant la résolution du problème (à voir et à revoir !) :

<https://youtu.be/pin2JqcRsaM>

### **Ressources**

#### **Livre 1**

- Chapitre 0 : introduction à la RDM – loi de Hooke**
- Chapitre I : efforts de cohésion**
- Chapitre II : étude des contraintes dans un solide**

#### **Livre 2**

- Chapitre III : sollicitations simples**
- Chapitre IV : étude de la déformation**
- Chapitre V : extensométrie**

#### **Livre 3**

- Chapitre VI : comportement élastique linéaire**
  - Chapitre VII : dimensionnement d'un arbre**
- Formulaire**

NB : l'ordre du cours donné en ressources suit la chronologie du projet

### **Planification du projet suggérée :**

Planifiez vos séances en découpant le cours pris dans l'ordre chronologique.

Y ajouter en parallèle la progression du projet.

Laissez libre la dernière semaine (2 séances) pour la présentation finale et les finitions.

## Chapitre 0 : introduction à la RDM - loi de Hooke

### I : définition de la RDM

Science expérimentale servant à dimensionner et étudier la stabilité des structures. C'est la traduction, pour des modèles simples, des résultats expérimentaux par des expressions mathématiques entre les principaux paramètres.

### II : principales hypothèses

Les matériaux seront considérés comme étant :

- homogènes : mêmes propriétés mécaniques et même composition en tout point.
- isotropes : mêmes propriétés dans toutes les directions.

### III : domaine d'application

Les poutres : solides ayant une dimension importante par rapport aux deux autres.

Les plaques et coques : solides ayant deux dimensions importantes par rapport à la troisième.

### IV : essai de traction

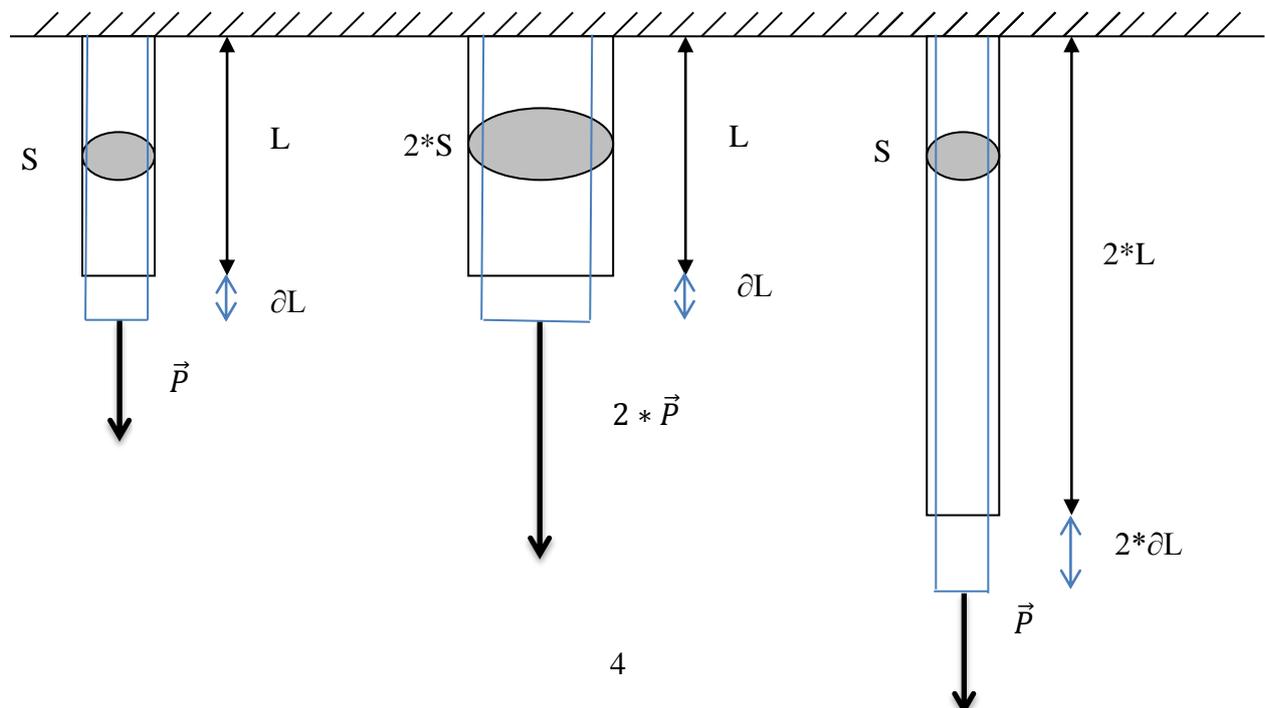
#### IV 1 : élasticité

Les forces moléculaires à l'intérieur d'un corps matériel s'opposent au changement de forme que tentent de créer les efforts extérieurs. Un équilibre s'établit entre les efforts intérieurs et extérieurs : le corps est en état de déformation, le travail des efforts extérieurs se transforme en énergie de déformation, et inversement quand on supprime les efforts extérieurs.

Elasticité (complète ou partielle) : propriété physique d'un corps à reprendre sa forme initiale après suppression des sollicitations extérieures.

#### IV 2 : loi de Hooke

Hooke réalise des séries d'expériences (1678). Il effectue des essais de traction sur 3 poutres de section circulaire, constituées d'un même matériau.



**Observations** : la poutre s'allonge suivant le sens de l'effort, se rétrécit dans le plan perpendiculaire à l'effort. Il mesure l'allongement de la poutre  $\partial L$  en fonction de la longueur  $L$ , de la section  $S$  et de l'effort  $P$ . Il trouve une loi de proportionnalité entre la force surfacique et l'allongement relatif de la poutre. Suivant le matériau utilisé pour les éprouvettes, on retrouve le même comportement mais avec des allongements différents

Il en déduit la loi suivante : **loi de Hooke**

$$\frac{P}{S} = E \cdot \frac{\partial L}{L}$$

Avec  $E$  : module de Young (ou module d'élasticité). C'est une constante pour un matériau homogène et isotrope donné.

Unité :  $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$  ;  $1 \text{ MPa} = 1 \text{ N/mm}^2$

On définit

le taux de déformation :  $\varepsilon = \frac{\partial L}{L}$  Et la contrainte :  $\sigma = \frac{P}{S}$

d'où la loi de Hooke :  $\sigma = E \cdot \varepsilon$

Par convention :

$\partial L > 0$ : travail en traction du matériau suivant la direction de mesure de l'allongement.

$\partial L < 0$ : travail en compression du matériau suivant la direction de mesure de l'allongement.

#### IV 3 : loi de Poisson

Variation d'une dimension  $a$  de la section

$$\partial a = \frac{-\nu}{E} \cdot \frac{P}{S} \cdot a$$

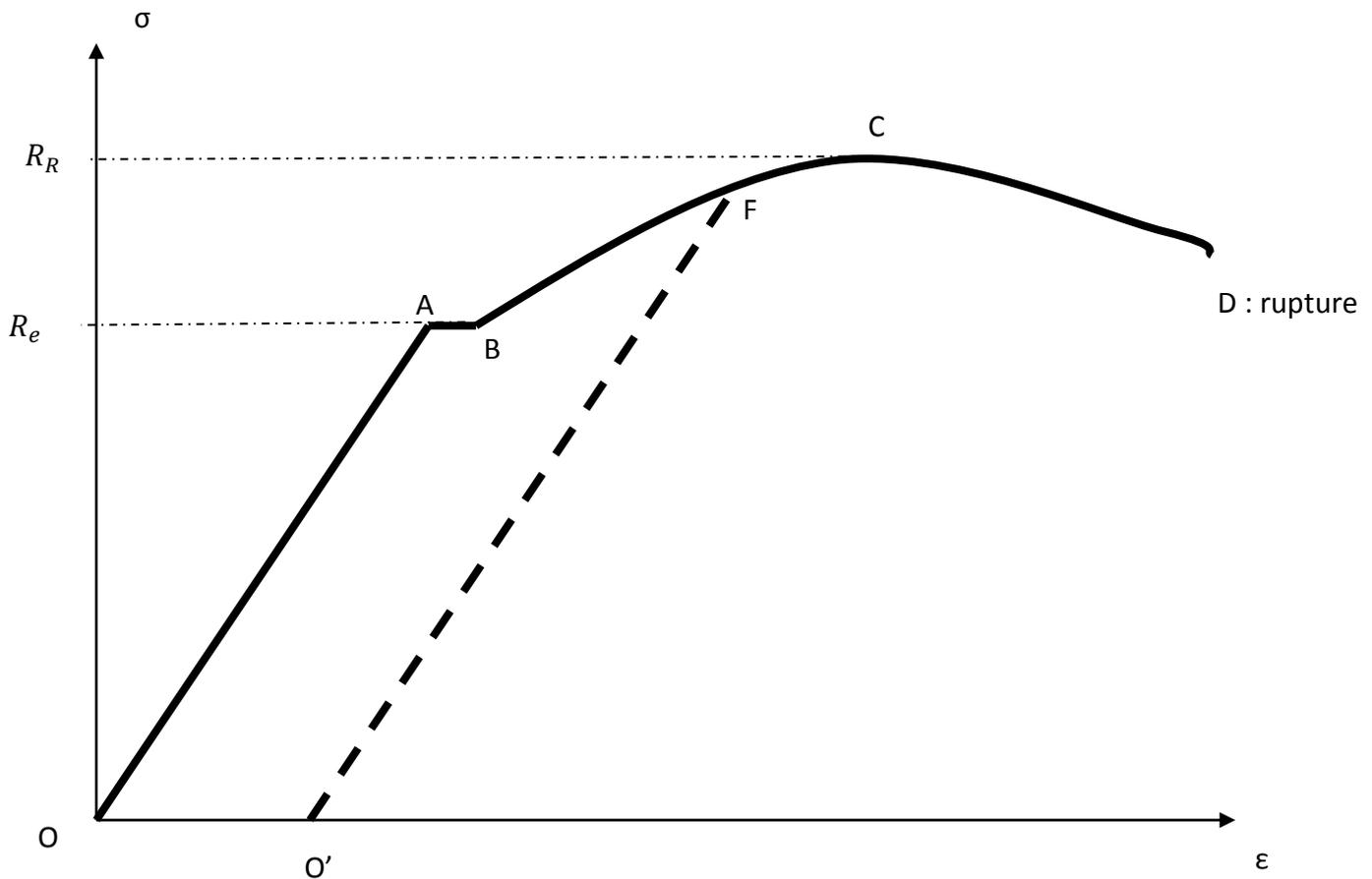
Avec  $\nu$  coefficient de Poisson ( $0 < \nu \leq 0.5$ )

Ou **loi de Poisson**

$$\frac{\partial a}{a} = -\nu \cdot \frac{\partial L}{L}$$

#### IV 4 : essai de traction

On place une éprouvette entre les mors d'une machine de traction. Cette machine est asservie pour exercer une vitesse de déformation constante à l'éprouvette. On enregistre l'évolution de la déformation de l'éprouvette en fonction de l'effort appliqué. (ou le taux de déformation en fonction de la force surfacique).



$OA$  : domaine élastique (loi de Hooke)

$AB$  : domaine d'instabilité, de grands glissements (plus ou moins visible selon les matériaux utilisés)

$BCD$  : domaine plastique (déformation non réversible)

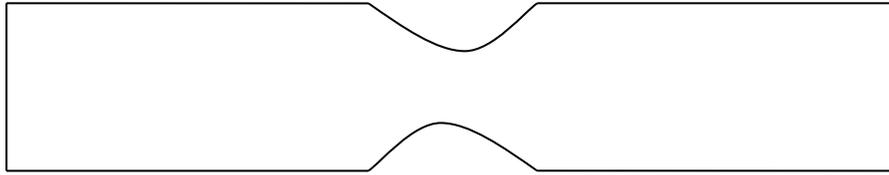
$BC$  : domaine d'écrouissage . Le cycle  $OFO'$  entraîne une déformation permanente (allongement relatif de l'éprouvette de  $OO'$ ) et une augmentation du domaine élastique (nouveau  $\sigma_e$ ). Ce procédé est utilisé dans le laminage et le forgeage afin d'augmenter la limite élastique du matériau.

$R_R$  : résistance à la rupture (MPa)

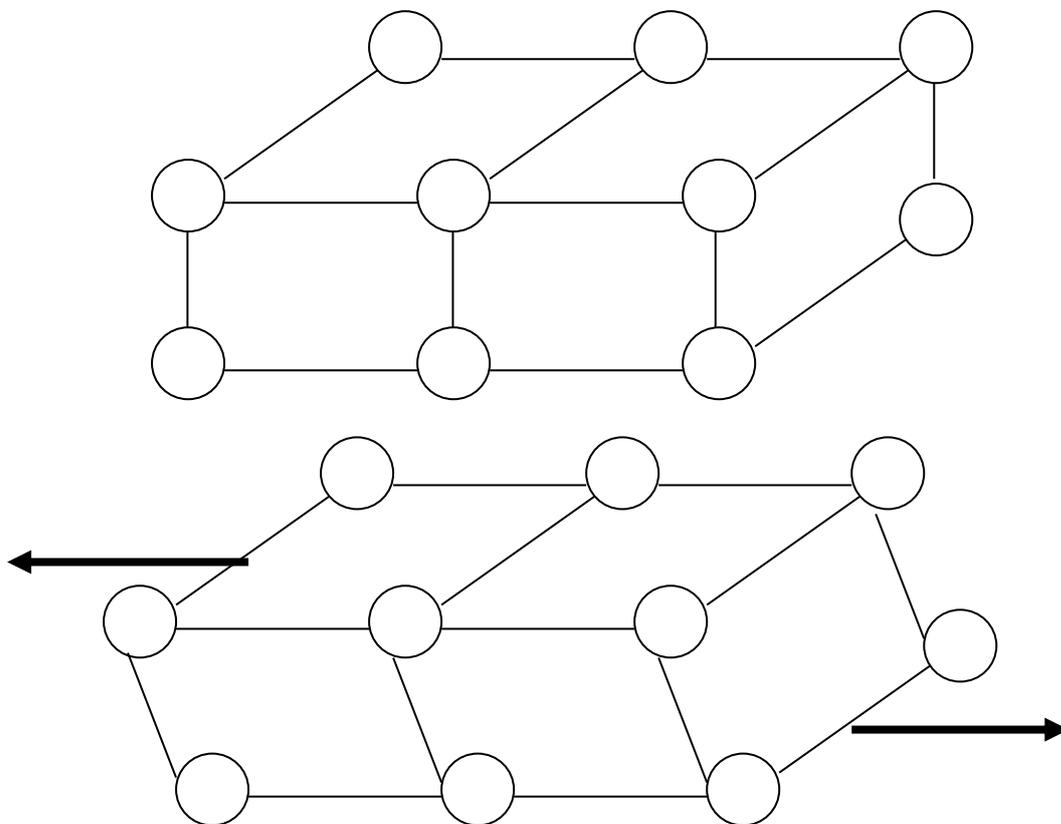
$R_e$  : résistance élastique (MPa)

Remarque : la diminution de contrainte de  $C$  à  $D$  est due au mode opératoire : la vitesse de déformation est imposée. La rupture de l'éprouvette est effective en  $C$ .

A partir de C, il y a détérioration de l'éprouvette : phénomène de striction. Toute la déformation est prise par une petite partie de l'éprouvette plus fragile : il y a rupture en ce point.



Explication atomique :



Force faible : petit déplacement puis retour à la position initiale.

Force supérieure à la limite élastique : déplacement jusqu'à la position d'équilibre stable voisine, sans possibilité de retour à la position initiale.

### Exemple 1 : essai de traction

On donne, sous forme de tableau, les résultats d'un essai de traction d'un matériau inconnu (vitesse de déformation imposée). Le but de l'étude est de déterminer la famille de ce matériau.

**Données :** éprouvette circulaire de diamètre 8 mm, longueur entre mors 200 mm.

I 1 : remplir le tableau ( F : force appliquée,  $\Delta L$  : allongement relevé). Après la dernière mesure, l'éprouvette casse. Donner l'expression et l'unité de la contrainte et du taux de déformation.

F (N)	0	5026	10053	12566	15080	17593	20106	22620	25133	27143	25133
$\Delta L$ (mm)	0	0.12	0.2	0.26	0.32	0.46	0.68	0.94	1.3	2.1	3
$\sigma =$ ( )											
$\varepsilon =$ ( )											

I 2 : Tracer  $\sigma = f(\varepsilon)$ . En déduire le module d'Young, la limite élastique et la contrainte de rupture.

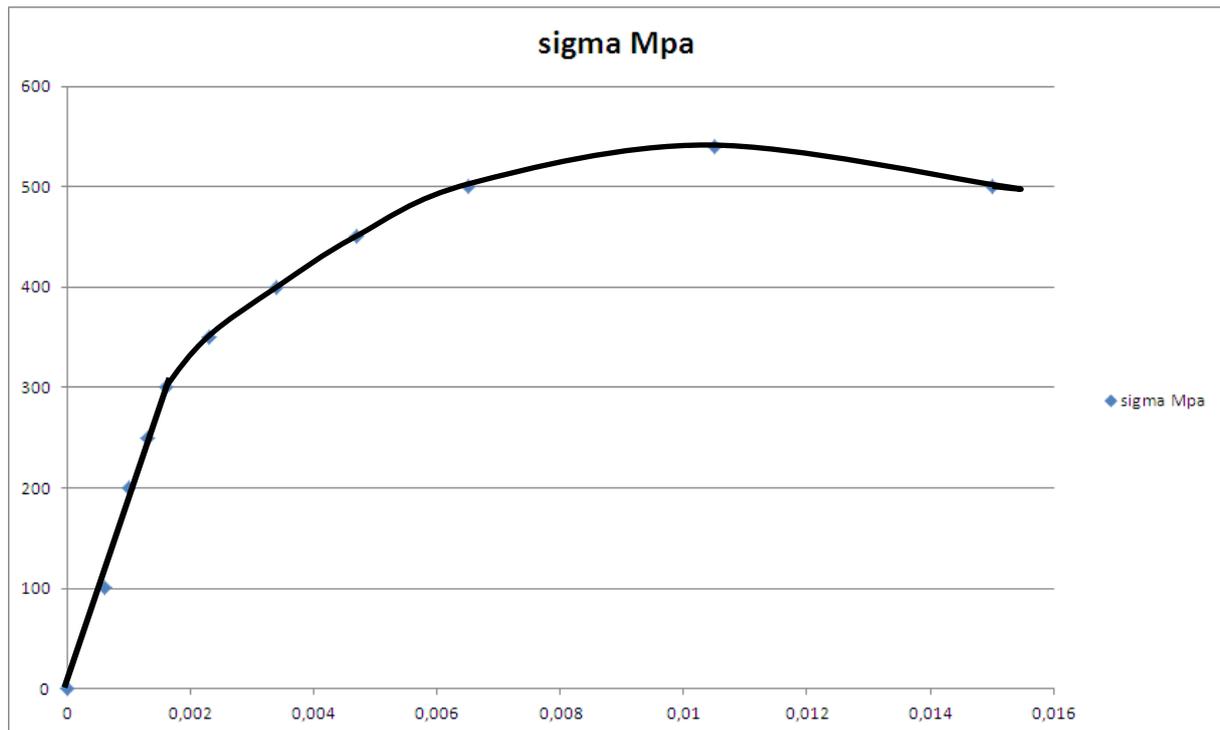
I 3 : En déduire le type du matériau

Valeurs moyennes :

	Re (Mpa)	Rr (Mpa)	E (Mpa)
acier (C35)	315	550	200000
aluminium (ENAW-7020)	230	310	72000
fonte (FGL 150)	100	150	80000

#### Solution :

L	200 mm										
S	50,24 mm <sup>2</sup>										
F	0	5026	10053	12566	15080	17593	20106	22620	25133	27143	25133
delta L	0	0,12	0,2	0,26	0,32	0,46	0,68	0,94	1,3	2,1	3
sigma Mpa	0,0	100,0	200,1	250,1	300,2	350,2	400,2	450,2	500,3	540,3	500,3
epsilon %	0	0,0006	0,001	0,0013	0,0016	0,0023	0,0034	0,0047	0,0065	0,0105	0,015



$$\sigma_R = 540 \text{ MPa}, \sigma_e = 300 \text{ MPa}, E = 187600 \text{ MPa}$$

Le matériau est de la famille des aciers.

### Exemple II :

Quelle serait la hauteur théorique maximale d'une tour (cylindre plein de rayon R) en béton non armé avant qu'elle ne s'effondre sous son propre poids ?

Données :  $E = 100000 \text{ MPa}$ ,  $\sigma_{\text{rupture}} = 1,2 \text{ MPa}$ ,  $\nu = 0,3$ ,  $\rho = 2400 \text{ kg/m}^3$ ,  $R = 5 \text{ m}$ ,  
 $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ .

NB : certaines de ces données ne sont pas utiles...

### Solution :

La rupture sous son propre poids de la tour se fera à sa base.

$$\text{Donc : } \sigma = \frac{P}{S} = \frac{\rho \cdot \pi \cdot R^2 \cdot H \cdot g}{\pi \cdot R^2} \leq \sigma_R$$

$$H \leq \frac{\sigma_R}{\rho \cdot g}$$

$$\text{AN : } H \leq 51 \text{ m}$$

## Problèmes isostatiques

I : Une barre d'acier de section constante  $S = 800 \text{ mm}^2$  et de longueur  $l = 4 \text{ m}$  est soumise à un effort axial

$F = 80000 \text{ N}$ .

Quel est l'allongement de la barre ?

Quelle est la variation de la section ?

On donne :  $E = 2.10^5 \text{ MPa}$ ,  $\nu = 0.3$

Solution :

Hooke :  $\frac{F}{S} = E \cdot \frac{\partial L}{L}$ ,  $\partial L = \frac{F \cdot L}{S \cdot E} = 2 \text{ mm}$

Poisson :  $\frac{\partial a}{a} = -\nu \cdot \frac{\partial L}{L}$ ,  $\partial a = -\nu \cdot \frac{\partial L}{L} \cdot a$

« a » représente une dimension de la section.

Un côté pour une section carrée :  $S=a^2$

Un côté pour une section rectangulaire :  $S=a \cdot b = k \cdot a^2$  en posant  $b=k \cdot a$  (k constante positive)

Le rayon pour une section circulaire :  $S=\pi \cdot a^2$

Etc..

Donc quelle que soit la section, on peut écrire  $S=\lambda \cdot a^2$ ,

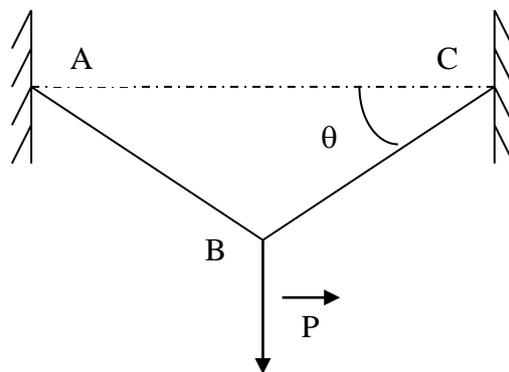
on dérive (dérivée partielle)  $\frac{\partial S}{\partial a} = 2 \cdot a \cdot \lambda$ , puis on divise par S :  $\frac{\partial S}{S} = \frac{2 \cdot a \cdot \lambda \cdot \partial a}{\lambda \cdot a^2} = \frac{2 \cdot \partial a}{a}$

On obtient :  $\partial S = \frac{2 \cdot \partial a}{a} \cdot S = -\nu \cdot \frac{\partial L}{L} \cdot 2 \cdot S = -0.24 \text{ mm}^2$

II : Une structure constituée de deux barres d'acier identiques ( $S = 3 \text{ cm}^2$ ,  $l = 4.5 \text{ m}$ ) articulées à leurs extrémités est soumise à l'action d'une charge verticale  $P = 21000 \text{ N}$ .

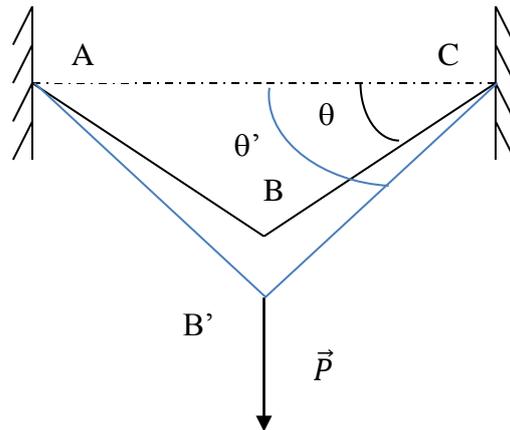
Déterminer la variation de longueur de chacune des barres, leur variation de section ainsi que le déplacement de l'articulation B pour  $\theta = 30^\circ$ .

On donne :  $E = 2.10^5 \text{ MPa}$ ,  $\nu = 0.3$

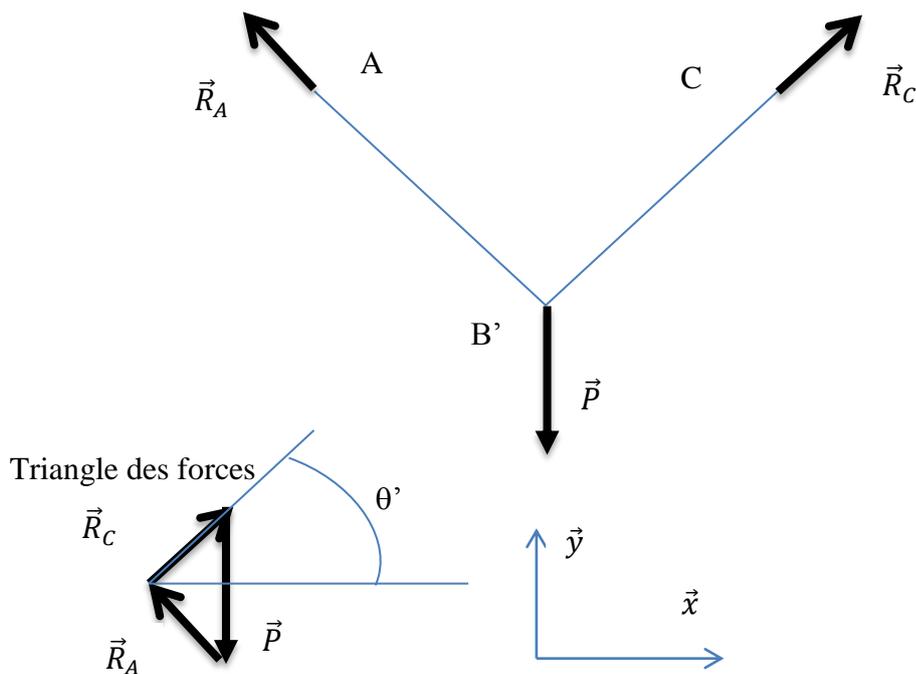


NB : des barres articulées à leurs extrémités ne travaillent qu'en traction compression. En effet, un solide en équilibre soumis à deux forces : ces deux forces ont même droite d'action, même norme et sont de sens opposés.

Solution :



Sous la charge P, la structure se déforme :  $\theta$  devient  $\theta'$  et B se déplace en B'. Pour connaître l'effort dans chaque barre, il faut isoler les deux barres et appliquer le PFS BAME :



PFS :  $\vec{R}_C + \vec{R}_A + \vec{P} = \vec{0}$

En projection sur  $\vec{x}$  :  $R_C \cos\theta' - R_A \cos\theta' = 0$

En projection sur  $\vec{y}$  :  $R_C \sin\theta' + R_A \sin\theta' - P = 0$

$$\begin{cases} R_C = R_A \\ R_A = \frac{P}{2 * \sin\theta'} \end{cases}$$

Problème : on ne connaît pas  $\theta'$  ! On va devoir approximer  $\theta'$  à  $\theta$

Plus généralement :

**\*Pour résoudre un problème isostatique, on effectuera le PFS AVANT déformation\***

$$AN : R_C = R_A = \frac{21000}{2 \cdot \sin 30^\circ} = 21000 \text{ N}$$

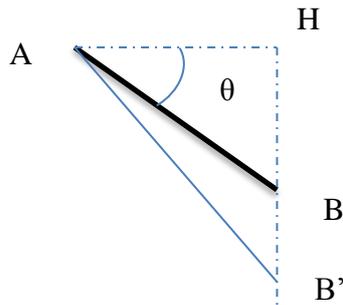
Remarque :  $R_C = R_A = P$  est un cas particulier ( $\theta = 30^\circ$ )

Loi de Hooke :

Les deux barres travaillent en traction donc :

$$\frac{R_C}{S} = E \cdot \frac{\partial L}{L}, \text{ donc } \partial L = \frac{L \cdot R_C}{S \cdot E}$$

$$AN : \partial L = 1.58 \text{ mm}$$



$$AH = AB \cdot \cos \theta$$

$$HB = \sqrt{AB^2 - AH^2}$$

$$HB' = \sqrt{AB'^2 - AH^2}$$

AN :

$$AH = 3.897 \text{ m}$$

$$HB = 2.25 \text{ m}$$

$$HB' = 2.2534 \text{ m}$$

$$\text{Donc } BB' = 3.4 \text{ mm}$$

Justification d'approximer  $\theta'$  à  $\theta$  :

$$\sin \theta' = \frac{HB'}{AB}, R_A = \frac{P}{2 \cdot \sin \theta'}$$

$$AN : R'_A = 20975 \text{ N}$$

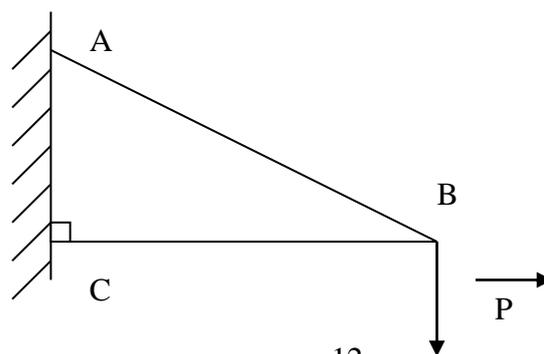
$$\text{Soit une erreur de : } \varepsilon = \frac{R_A - R'_A}{R_A} = 0.1\%$$

L'approximation est donc tout à fait justifiée !

III : La structure ABC est formée d'une poutre en bois BC ( $S_{BC} = 300 \text{ cm}^2$ ,  $E_{\text{bois}} = 10^4 \text{ MPa}$ ,  $l_{BC} = 4 \text{ m}$ ) et d'une poutre d'acier AB ( $S_{AB} = 6 \text{ cm}^2$ ,  $E_{\text{acier}} = 21 \cdot 10^4 \text{ MPa}$ ,  $l_{AB} = 5 \text{ m}$ ) et soumise à l'effort  $P = 27000 \text{ N}$ .

Déterminer la variation de longueur de chacune des barres ainsi que le déplacement de l'articulation B.

NB : articulations en A, B et C.



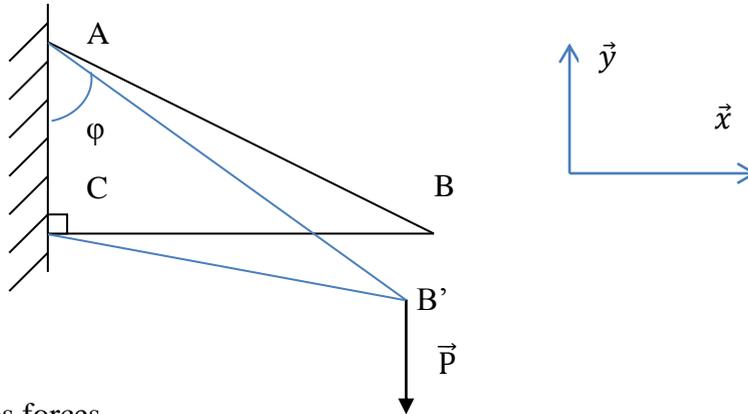
Solution :

Même méthode : BAME-PFS, puis Hooke, puis géométrie

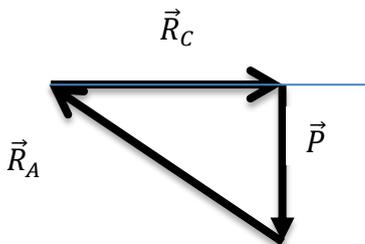
La barre AB travaille en traction :  $R_A = 45000 \text{ N}$

La barre BC travaille en compression :  $R_C = -36000 \text{ N}$

$\partial L_{AB} = 1.79 \text{ mm}$ ,  $\partial L_{BC} = -0.48 \text{ mm}$



Triangle des forces



Théorème d'Al Kashi :

$$B'C^2 = AC^2 + AB'^2 - 2 \cdot AB' \cdot AC \cdot \cos \varphi$$

$$\text{AN : } \varphi = 53.094^\circ$$

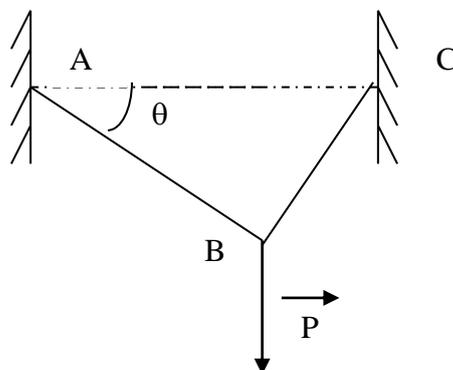
$$\overrightarrow{AB} = 4\vec{x} - 3\vec{y}, \overrightarrow{AB'} = 3.9996\vec{x} - 3.0036\vec{y}$$

$$\partial x = -0.4 \text{ mm}, \partial y = -3.6 \text{ mm}$$

IV : Une structure constituée de deux barres d'acier ( $S = 3 \text{ cm}^2$ ,  $L = 4.5 \text{ m}$  et  $2L$ ) articulées à leurs extrémités est soumise à l'action d'une charge verticale  $P = 21000 \text{ N}$ .

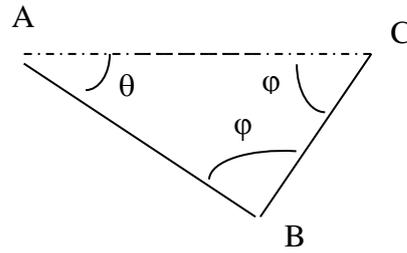
Déterminer la variation de longueur de chacune des barres ainsi que le déplacement de l'articulation B.

On donne :  $E = 2.10^5 \text{ MPa}$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $AC = 2L$ ,  $AB = 2L$ ,  $BC = L$



Solution :

Même méthode : BAME-PFS, puis Hooke, puis géométrie

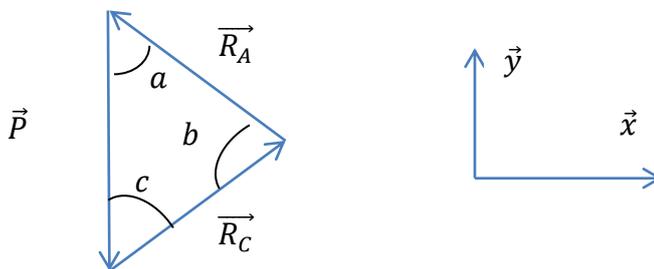


Al Kashi permet d'obtenir  $\theta$

AN :  $\theta = 28.955^\circ$

On en déduit :  $\varphi = 75.5225^\circ$

BAME :



$$a = \frac{\pi}{2} - \theta, \quad b = \pi - \varphi, \quad c = \varphi + \theta - \frac{\pi}{2}$$

$$R_A = 5422 \text{ N}, \quad R_C = 18978 \text{ N}$$

$$\partial L_{AB} = 0.813 \text{ mm}, \quad \partial L_{BC} = 1.423 \text{ mm}$$

$$\overrightarrow{BB'} = 0.71\vec{x} - 1.50\vec{y}, \text{ en mm}$$

## Problèmes hyperstatiques

I : Un boulon (vis de rayon  $R_1$  et écrou en acier) enserme un tube (entretoise) en aluminium (rayon intérieur  $R_1$ , rayon extérieur  $R_2$ , longueur  $L$ ). Au contact, on serre d'un demi tour supplémentaire. Quel est l'allongement du tube et de la vis ?

Données :  $R_1 = 4\text{mm}$ ,  $R_2 = 5\text{mm}$ ,  $L = 50\text{mm}$ ,  $E_{\text{acier}} = 2.10^5 \text{ MPa}$ ,  $E_{\text{alu}} = 0,7.10^5 \text{ MPa}$ , pas de la vis  $2\text{mm}$ .

Hypothèse : ni la tête de la vis ni l'écrou ne se déforment.

II : Deux barres sont comprimées afin de les mettre bout à bout dans un bâti indéformable (entre plans =  $L$ ).

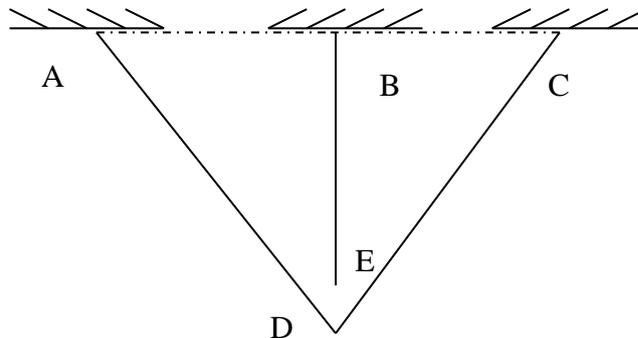
Déterminer l'allongement de chaque barre.

Données : indice 1 : aluminium, indice 2 : acier,  $E_{\text{acier}} = 2.10^5 \text{ MPa}$ ,  $E_{\text{alu}} = 0,7.10^5 \text{ MPa}$ ,  $S_1 = 2.S_2 = 5 \text{ cm}^2$ ,  $L = 4\text{cm}$ ,  $L_1 = 2\text{cm}$ ,  $L_2 = 2.02\text{cm}$

III : (non corrigé) Une structure constituée de trois barres d'acier ( $S = 3\text{cm}^2$ ) articulées à leurs extrémités est soumise à l'action d'une charge due à la fixation de E à D.

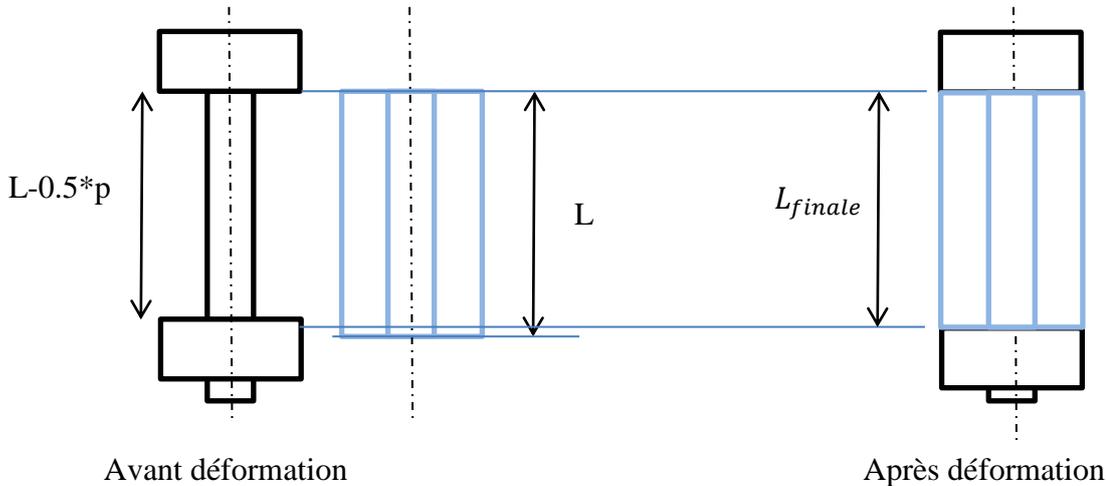
Déterminer la variation de longueur de chacune des barres, leur variation de section ainsi que le déplacement de l'articulation D.

On donne :  $E = 2.10^5 \text{ MPa}$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $AD = 0.5\text{m}$ ,  $AB = 0.3\text{m}$ ,  $BC = 0.3\text{m}$ ,  $CD = 0.5\text{m}$ ,  $BE = 0.3996\text{m}$ .



Solutions :

I : il faut voir le problème comme suit



Même méthode : BAME-PFS, puis Hooke, puis géométrie

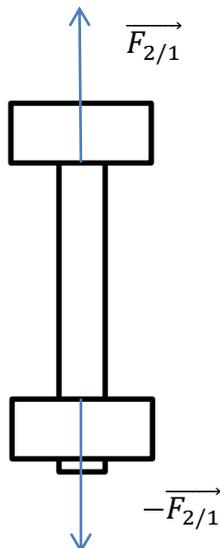
Remarque : si on isole le système avant déformation, il n'y a aucun effort.

**\*Pour résoudre un problème hyperstatique, on effectuera le PFS APRES déformation\***

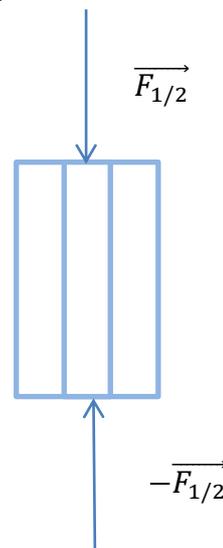
BAME

Effort sur le boulon :

Traction



Effort sur l'entretoise  
compression



PFS :

Principe d'action-réaction :  $\vec{F}_{2/1} = -\vec{F}_{1/2}$

Et en norme  $F_{2/1} = F_{1/2} = F$

Hooke :

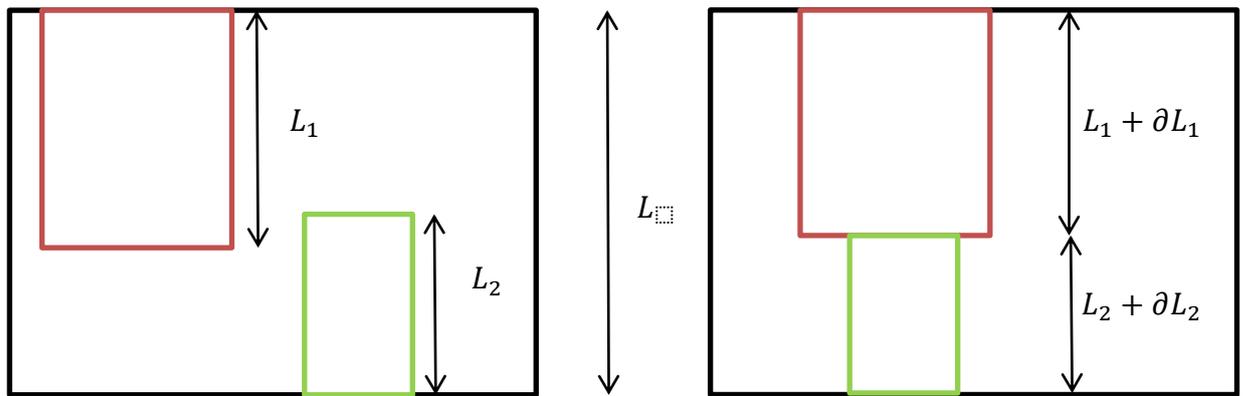
Boulon :  $\frac{F}{\pi \cdot R_1^2} = E_{acier} \cdot \frac{\partial L_1}{L - 0.5 \cdot p}$  : traction

Entretoise :  $\frac{-F}{\pi \cdot (R_2^2 - R_1^2)} = E_{alu} \cdot \frac{\partial L_2}{L}$  : compression

Géométrie :  $L_{finale} = (L - 0.5 \cdot p) + \partial L_1 = L + \partial L_2$

AN :  $\partial L_1 = 0.16 \text{ mm}$ ,  $\partial L_2 = -0.83 \text{ mm}$

II : il faut voir le problème comme suit



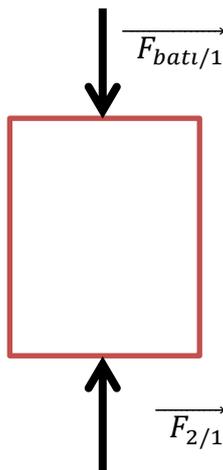
Avant déformation

Après déformation

BAME

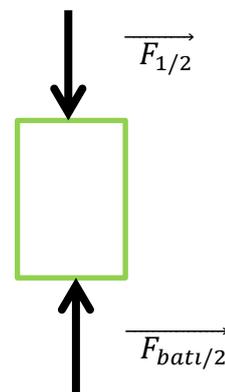
Effort sur la pièce 1

Compression



Effort sur la pièce 2

compression



PFS :

Toutes ces forces ont la même norme appelée F

Hooke :

Pièce 1 :  $\frac{-F}{S_1} = E_{alu} \cdot \frac{\partial L_1}{L_1}$  : compression

Pièce 2 :  $\frac{-F}{S_2} = E_{acier} \cdot \frac{\partial L_2}{L}$  : compression

Géométrie :  $L_{finale} = L_1 + \partial L_1 = L_2 + \partial L_2$

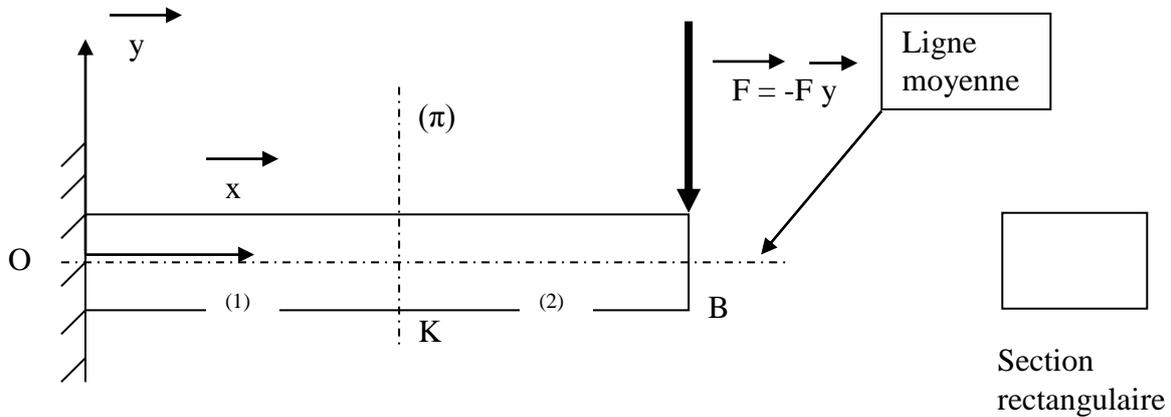
AN :  $\partial L_1 = -0.117 \text{ mm}$ ,  $\partial L_2 = -0.083 \text{ mm}$

## Chapitre I : efforts de cohésion

### I : définition

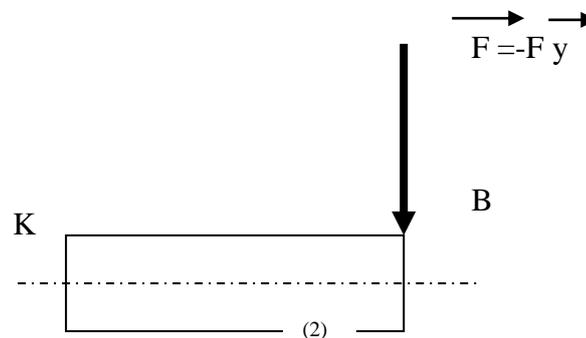
Les efforts de cohésion représentent les efforts internes à la matière : ils permettent de maintenir la cohésion du solide étudié.

*Exemple* : poutre encastrée en O avec un effort ponctuel en B, longueur l.



Un plan de coupe fictif ( $\pi$ ) coupe le solide (S) en deux parties (1) et (2), perpendiculairement à la ligne moyenne au point K.

On isole ( 2 )



Pour que ( 2 ) reste en équilibre, on doit faire apparaître les efforts internes à la matière de la partie (1) sur la partie (2) : ce sont **les efforts de cohésion**.

Ils se composent d'une résultante :  $\overrightarrow{R_{1 \rightarrow 2}}$

Et d'un moment :  $\overrightarrow{M_{K1 \rightarrow 2}}$

Leur réunion forme **le torseur de cohésion** :

$$\{T_{cohésion1/2}\} = \left\{ \overrightarrow{R_{1 \rightarrow 2}} \quad \overrightarrow{M_{K1 \rightarrow 2}} \right\}_K$$

Pour le déterminer, il suffit d'appliquer le PFS à la partie (2)

$$\{T_{cohésion1/2}\} = \begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_K ; \{T_{forces\ extérieures}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -F & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_B$$

$$\overrightarrow{KB} = l \cdot \vec{x}$$

Transport du torseur des efforts extérieurs de B en K :

$$\{T_{forces\ extérieures}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -F & 0 \\ 0 & -l \cdot F \end{Bmatrix}_K ; \overrightarrow{M}_K = \overrightarrow{M}_B + \overrightarrow{KB} \wedge \vec{R}$$

PFS en K:

$$\{T_{cohésion1/2}\} + \{T_{forces\ extérieures}\} = \{0\}$$

$$\{T_{cohésion/2}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ F & 0 \\ 0 & l \cdot F \end{Bmatrix}_K$$

Remarque : principe d'action-réaction

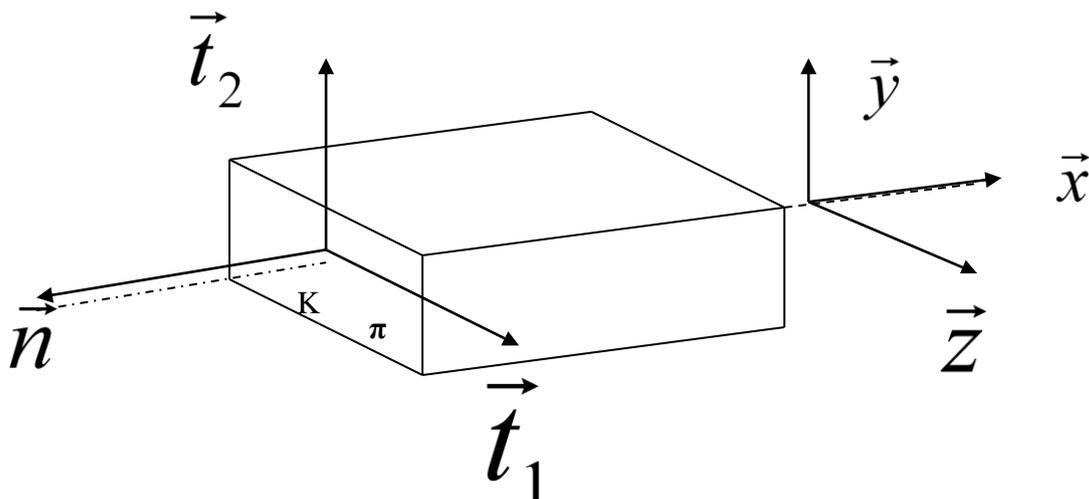
$$\{T_{cohésion/1}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -F & 0 \\ 0 & -l \cdot F \end{Bmatrix}_K$$

## II : Repère pour exprimer le torseur de cohésion : repère local lié à ( $\pi$ )

On choisit arbitrairement comme premier axe la normale sortante à la surface de coupure ( $\pi$ ) passant par K : axe K.  $\vec{n}$

On complète par  $\vec{t}_1$  et  $\vec{t}_2$  de façon à obtenir un repère (K,  $\vec{n}$ ,  $\vec{t}_1$ ,  $\vec{t}_2$ ) orthonormé direct (plusieurs possibilités pour  $\vec{t}_1$  et  $\vec{t}_2$ )

Ici :



Torseur de cohésion dans le repère local  $(K, \vec{n}, \vec{t}_1, \vec{t}_2)$  :

$$\{T_{cohésion/2}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ F & 0 \\ 0 & l.F \end{Bmatrix}_{(K, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & l.F \\ F & 0 \end{Bmatrix}_{(K, \vec{n}, \vec{t}_1, \vec{t}_2)}$$

Résultante

$$\vec{R} = \begin{Bmatrix} N \\ T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix}_{(K, \vec{n}, \vec{t}_1, \vec{t}_2)} ; N \text{ effort normal} ; T = \sqrt{T_1^2 + T_2^2} : \text{effort tangentiel}$$

Moment :

$$\vec{M}_K = \begin{Bmatrix} Mt \\ Mf_1 \\ Mf_2 \end{Bmatrix}_{(K, \vec{n}, \vec{t}_1, \vec{t}_2)} ; Mt \text{ moment de torsion} ; Mf = \sqrt{Mf_1^2 + Mf_2^2} : \text{moment de flexion}$$

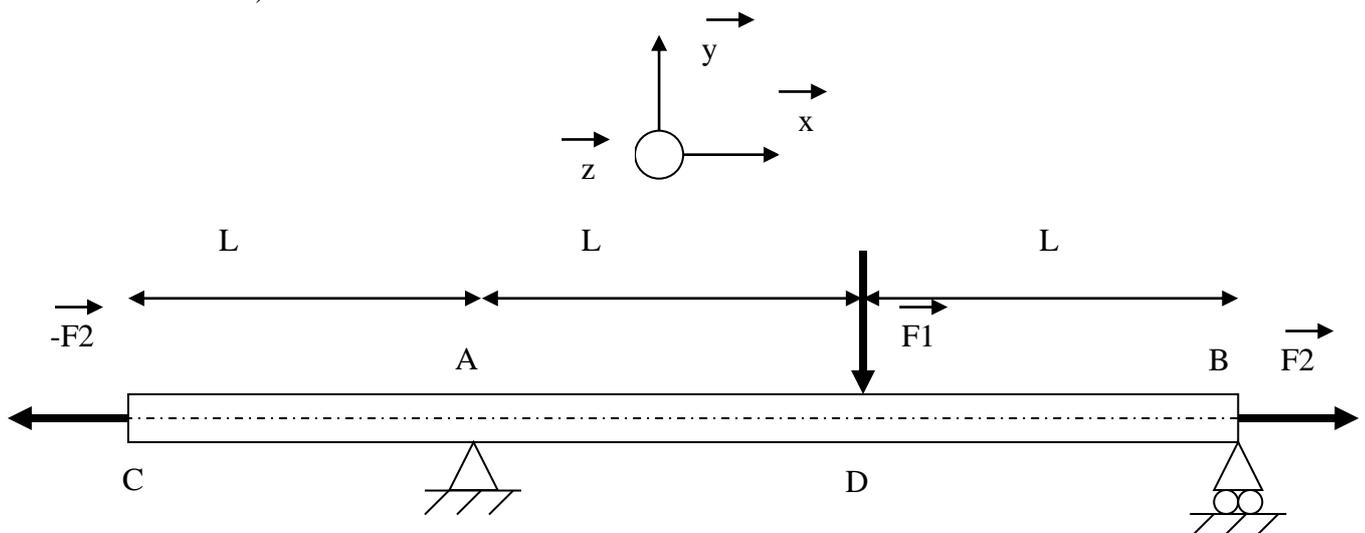
N, T, Mt, et Mf sont appelés individuellement « **sollicitation simple** »

En les combinant, on obtient des **sollicitations composées**

### III : Diagramme des sollicitations simples :

Le torseur de cohésion n'est en général pas constant en tout point de la ligne moyenne de la poutre. Il est alors intéressant de tracer l'évolution des sollicitations simples pour connaître la section la plus sollicitée (permet le dimensionnement de la poutre)

Exemple : poutre sur deux appuis soumise à des efforts connus (poids de la poutre négligé devant F1 et F2)





Il y a trois portions de la poutre à étudier : CA, AD, DB (une nouvelle portion à l'apparition d'un nouvel effort)

**Portion 1 :  $K \in [CA[$**

On isole [CK]

$$\overrightarrow{CK} = x.\vec{X} \text{ avec } 0 \leq x < L$$

C K

---

$$\{T_1\} = \begin{Bmatrix} -F_2 & / \\ 0 & / \\ / & 0 \end{Bmatrix}_C \quad \{T_{\text{cohésion portion 1}}\} = \begin{Bmatrix} N & / \\ T_1 & / \\ / & M_{f2} \end{Bmatrix}_K$$

PFS en K :

$$\{T_1\} = \begin{Bmatrix} -F_2 & / \\ 0 & / \\ / & 0 \end{Bmatrix}_K,$$

$$\begin{cases} N - F_2 = 0 \\ T_1 + 0 = 0 \\ M_{f2} + 0 = 0 \end{cases}$$

Torseur de cohésion sur la portion 1 :

$$\{T_{\text{cohésion portion 1}}\} = \begin{Bmatrix} F_2 & / \\ 0 & / \\ / & 0 \end{Bmatrix}_K$$

**Portion 2 :  $K \in [AD[$**

On isole [CK]

$$\overrightarrow{CK} = x.\vec{X} \text{ avec } L \leq x < 2*L$$

C A K

---

$$\{T_1\} = \begin{Bmatrix} -F_2 & / \\ 0 & / \\ / & 0 \end{Bmatrix}_C \quad \{T_2\} = \begin{Bmatrix} X_A = 0 & / \\ Y_A = \frac{F_1}{2} & / \\ / & 0 \end{Bmatrix}_A \quad \{T_{\text{cohésion portion 2}}\} = \begin{Bmatrix} N & / \\ T_1 & / \\ / & M_{f2} \end{Bmatrix}_K$$

PFS en K :

$$\{T_1\} = \begin{Bmatrix} -F_2 & / \\ 0 & / \\ / & 0 \end{Bmatrix}_K, \quad \{T_2\} = \begin{Bmatrix} 0 & / \\ \frac{F_1}{2} & / \\ / & \frac{F_1}{2} * (L - x) \end{Bmatrix}_K, \quad \{T_{\text{cohésion portion 2}}\} = \begin{Bmatrix} N & / \\ T_1 & / \\ / & M_{f2} \end{Bmatrix}_K$$

$$\begin{cases} N - F_2 + 0 = 0 \\ T_1 + 0 + \frac{F_1}{2} = 0 \\ M_{f2} + 0 - \frac{F_1}{2} * (x - L) = 0 \end{cases}$$

Torseur de cohésion sur la portion 2 :

$$\{T_{cohésion\ portion\ 2}\} = \left\{ \begin{array}{l} F_2 \quad / \\ -\frac{F_1}{2} \quad / \\ / \quad \frac{F_1}{2} * (x - L) \end{array} \right\}_K$$

Remarques générales (toujours vraies) :

**Remarque 1 :**

$$\{T_{cohésion\ portion\ 2}\} = \{T_{cohésion\ portion\ 1}\} - \underbrace{\{T_2\}}_{\text{torseur non présent sur la portion 1}}$$

**Remarque 2 :** (non démontrée)

$$T_1 = -\frac{dM_{f2}}{dx}, T_2 = \frac{dM_{f1}}{dx}$$

(permet d'éviter quelques erreurs de calcul...)

**Portion 3 : K ∈ [DB[**

On isole [CK]

$$\overrightarrow{CK} = x.\overrightarrow{X} \text{ avec } 2*L \leq x < 3*L$$



$$\{T_1\} = \left\{ \begin{array}{l} -F_2 \quad / \\ 0 \quad / \\ / \quad 0 \end{array} \right\}_C, \quad \{T_2\} = \left\{ \begin{array}{l} X_A = 0 \quad / \\ Y_A = \frac{F_1}{2} \quad / \\ / \quad 0 \end{array} \right\}_A, \quad \{T_3\} = \left\{ \begin{array}{l} 0 \quad / \\ -F_1 \quad / \\ / \quad 0 \end{array} \right\}_D, \quad \{T_{coh\ portion\ 3}\} = \left\{ \begin{array}{l} N \quad / \\ T_1 \quad / \\ / \quad M_{f2} \end{array} \right\}_K$$

PFS en K :

$$\{T_3\} = \left\{ \begin{array}{l} 0 \quad / \\ -F_1 \quad / \\ / \quad F_1(x - 2L) \end{array} \right\}_K$$

Torseur de cohésion sur la portion 3 :

$$\{T_{coh\ portion\ 3}\} = \{T_{cohésion\ portion\ 2}\} - \{T_3\}, \{T_{cohésion\ portion\ 3}\} = \left\{ \begin{array}{l} F_2 \quad / \\ \frac{F_1}{2} \quad / \\ / \quad \frac{F_1}{2} * (3L - x) \end{array} \right\}_K$$

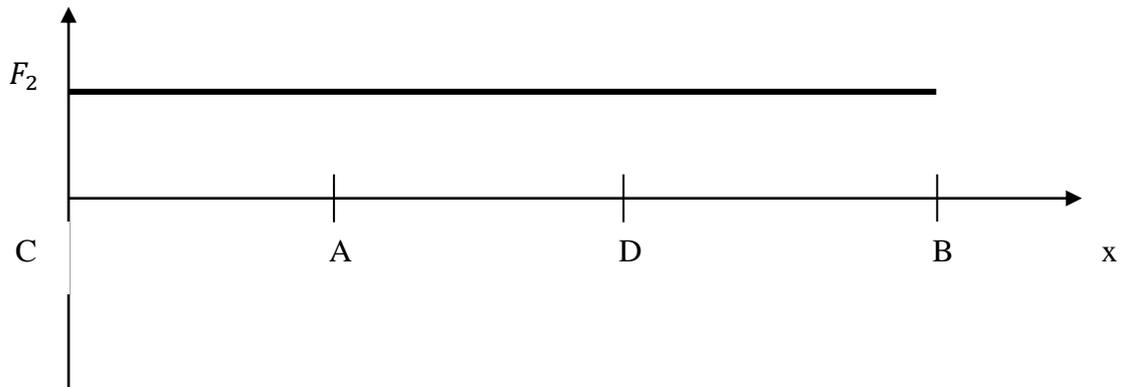
Remarque 3 :

**On vérifie par continuité que :**

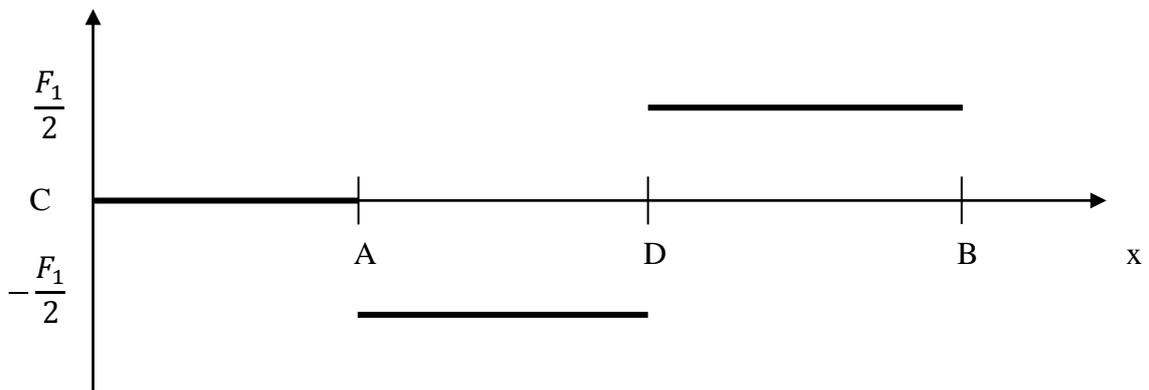
$$\lim_{x \rightarrow 3L} \{T_{cohésion\ portion\ 3}\} = \{T_4\} + \{T_5\} = \left\{ \begin{array}{l} F_2 \quad / \\ \frac{F_1}{2} \quad / \\ / \quad 0 \end{array} \right\}_B$$

### Diagrammes des sollicitations simples

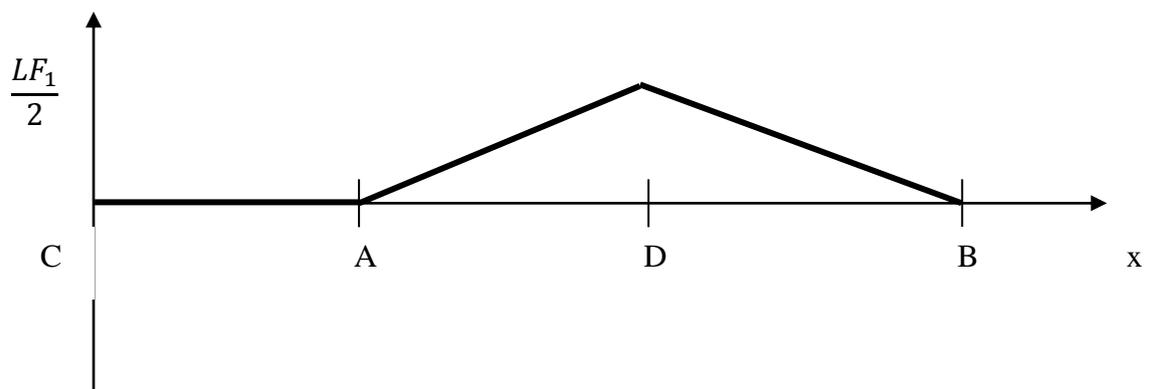
N : effort normal



$T_1$  : effort tangentiel



$M_{f2}$  : moment fléchissant



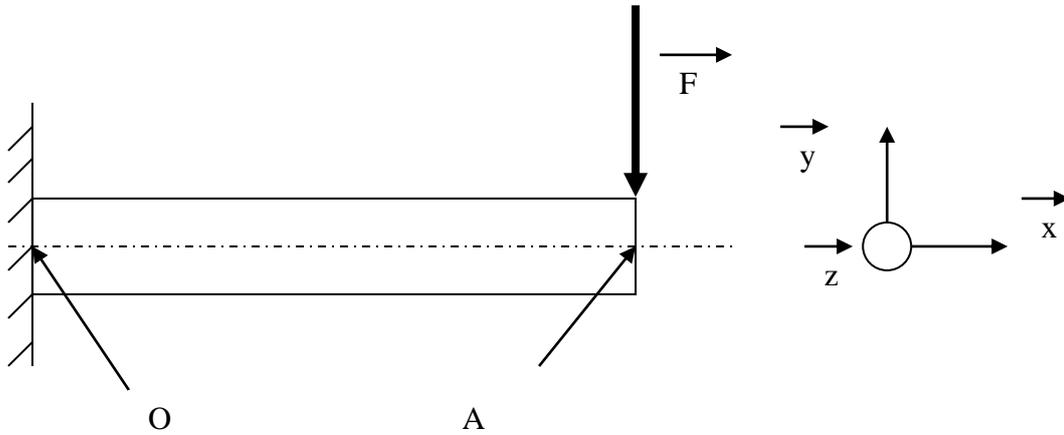
**Conclusion** : la section la plus sollicitée passe par le point D

Car  $|N|, |T_1|, |M_{f2}|$  maximaux en D

**Exercices :**

**Torseurs de cohésion (problèmes isostatiques)**

I : poutre encastrée en O soumise à un effort



OA = L

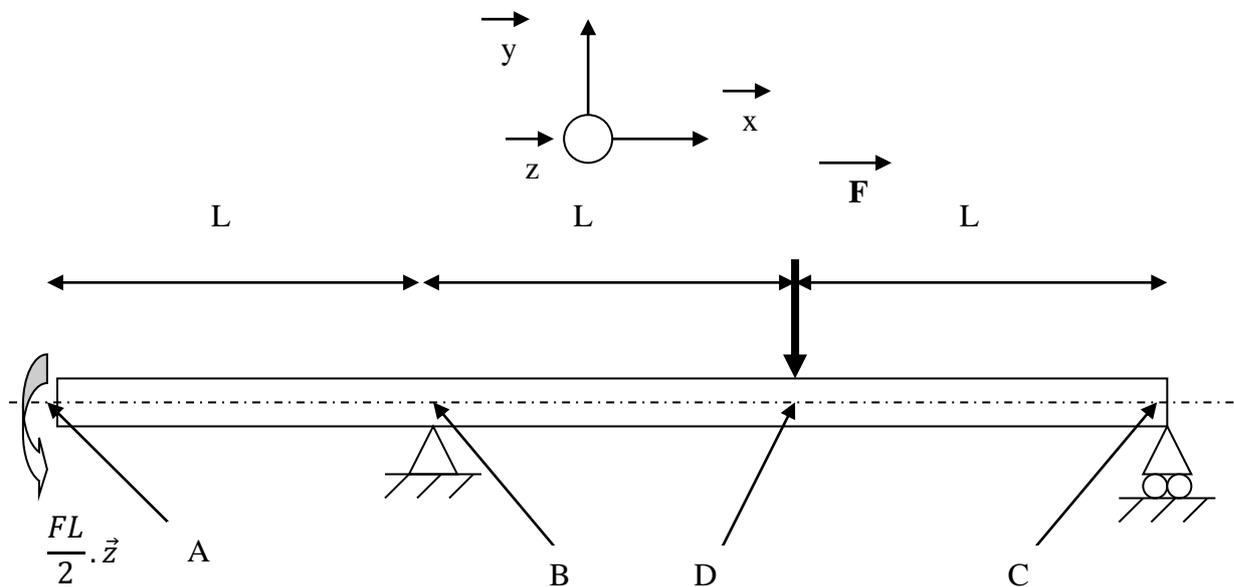
A : déterminer les efforts à l'encastrement

B : déterminer le torseur de cohésion en  $K \in [OA]$  tel que  $\overrightarrow{OK} = x \cdot \vec{x}$

C : tracer les diagrammes des sollicitations simples pour K entre O et A.

D : en déduire la section la plus sollicitée

II : poutre sur 2 appuis soumise à des forces et des moments (poids négligés)



A : déterminer le torseur de cohésion en  $K \in [AC]$

B : tracer les diagrammes des sollicitations simples

C : en déduire la section la plus sollicitée

Solution :

I :

Etape 1 : PFS afin d'obtenir les efforts aux appuis (problème plan)

On isole la poutre :



$$\{T_1\} = \begin{Bmatrix} X_0 & / \\ Y_0 & / \\ / & N_0 \end{Bmatrix}_O, \{T_2\} = \begin{Bmatrix} 0 & / \\ -F & / \\ / & 0 \end{Bmatrix}_A$$

PFS en O

$$\{T_2\} = \begin{Bmatrix} 0 & / \\ -F & / \\ / & -FL \end{Bmatrix}_O$$

Et on obtient les 3 équations :

$$\begin{cases} X_0 + 0 = 0 \\ Y_0 - F = 0 \\ N_0 - FL = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_0 = 0 \\ Y_0 = F \\ N_0 = FL \end{cases}$$

Etape 2 : Torseur de cohésion défini en K:

K point courant de la ligne moyenne :  $\overrightarrow{OK} = x \cdot \vec{x}$

Repère local confondu avec le repère global :

$$\vec{n} = \vec{x}, \vec{t}_1 = \vec{y}, \vec{t}_2 = \vec{z}, \{T_{cohésion\ 1/2}\} = \begin{Bmatrix} N & M_t \\ T_1 & M_{f1} \\ T_2 & M_{f2} \end{Bmatrix}_{(K, \vec{n}, \vec{t}_1, \vec{t}_2)}$$

Il y a une portion de la poutre à étudier : OA

**Portion 1 :  $K \in [OA[$**

On isole [OK]

$\overrightarrow{OK} = x \cdot \vec{x}$  avec  $0 \leq x < L$



$$\{T_1\} = \begin{Bmatrix} 0 & / \\ F & / \\ / & FL \end{Bmatrix}_O, \{T_{cohésion\ portion\ 1}\} = \begin{Bmatrix} N & / \\ T_1 & / \\ / & M_{f2} \end{Bmatrix}_K$$

PFS en K :

$$\{T_1\} = \begin{Bmatrix} 0 & / \\ F & / \\ / & F(L-x) \end{Bmatrix}_K$$

$$\begin{cases} N + 0 = 0 \\ T_1 + F = 0 \\ M_{f_2} + F(L - x) = 0 \end{cases}$$

Torseur de cohésion sur la portion 1 :

$$\{T_{cohésion\ portion\ 1}\} = \begin{Bmatrix} 0 & / \\ -F & / \\ / & F(x - L) \end{Bmatrix}_K$$

Vérifications :

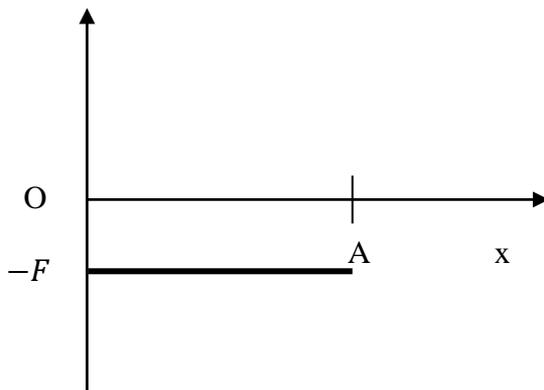
$$T_1 = -\frac{dM_{f_2}}{dx} = -F,$$

Et

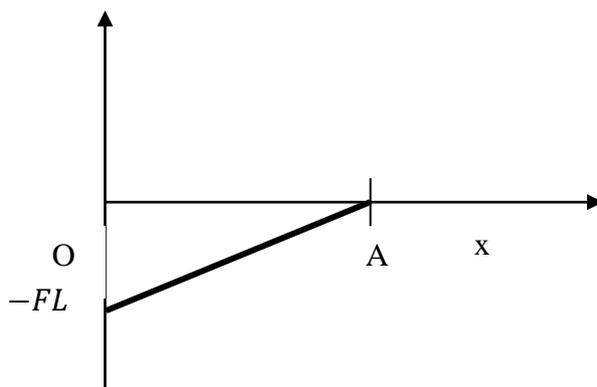
$$\lim_{x \rightarrow L} \{T_{cohésion\ portion\ 1}\} = \{T_2\} = \begin{Bmatrix} 0 & / \\ -F & / \\ / & 0 \end{Bmatrix}_A$$

### Diagrammes des sollicitations simples

$T_1$  : effort tangentiel



$M_{f_2}$  : moment fléchissant



**Conclusion** : la section la plus sollicitée passe par le point O

Car  $|N|, |T_1|, |M_{f_2}|$  maximaux en O

II :

Etape 1 : PFS afin d'obtenir les efforts aux appuis (problème plan)

On isole la poutre :



$$\{T_1\} = \begin{pmatrix} 0 & / \\ 0 & / \\ / & \frac{FL}{2} \end{pmatrix}_A, \{T_2\} = \begin{pmatrix} X_B & / \\ Y_B & / \\ / & 0 \end{pmatrix}_B, \{T_3\} = \begin{pmatrix} 0 & / \\ -F & / \\ / & 0 \end{pmatrix}_D, \{T_4\} = \begin{pmatrix} 0 & / \\ Y_C & / \\ / & 0 \end{pmatrix}_C$$

PFS en B

$$\{T_1\} = \begin{pmatrix} 0 & / \\ 0 & / \\ / & \frac{FL}{2} \end{pmatrix}_B, \{T_2\} = \begin{pmatrix} X_B & / \\ Y_B & / \\ / & 0 \end{pmatrix}_B, \{T_3\} = \begin{pmatrix} 0 & / \\ -F & / \\ / & -FL \end{pmatrix}_B, \{T_4\} = \begin{pmatrix} 0 & / \\ Y_C & / \\ / & 2LY_C \end{pmatrix}_B,$$

Et on obtient les 3 équations :

$$\begin{cases} 0 + X_B + 0 + 0 = 0 \\ 0 + Y_B - F + Y_C = 0 \\ \frac{FL}{2} + 0 - FL + 2LY_C = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_B = 0 \\ Y_B = \frac{3F}{4} \\ Y_C = \frac{F}{4} \end{cases}$$

Etape 2 : Torseur de cohésion défini en K:

K point courant de la ligne moyenne :  $\overrightarrow{AK} = x \cdot \vec{x}$

Repère local confondu avec le repère global :

$$\vec{n} = \vec{x}, \vec{t}_1 = \vec{y}, \vec{t}_2 = \vec{z}, \{T_{cohésion\ 1/2}\} = \begin{pmatrix} N & M_t \\ T_1 & M_{f1} \\ T_2 & M_{f2} \end{pmatrix}_{(K, \vec{n}, \vec{t}_1, \vec{t}_2)}$$

Il y a trois portions de la poutre à étudier : AB, BD, DC (une nouvelle portion à l'apparition d'un nouvel effort)

**Portion 1 :  $K \in [AB[$**

On isole [AK]

$\overrightarrow{AK} = x \cdot \vec{x}$  avec  $0 \leq x < L$



$$\{T_1\} = \begin{pmatrix} 0 & / \\ 0 & / \\ / & \frac{FL}{2} \end{pmatrix}_A, \{T_{cohésion\ portion\ 1}\} = \begin{pmatrix} N & / \\ T_1 & / \\ / & M_{f2} \end{pmatrix}_K$$

PFS en K :



$$\begin{array}{cccc} & A & B & D & K \\ & \text{-----} & & & \\ \{T_1\} \{T_2\}, & \{T_3\} = \begin{pmatrix} 0 & / \\ -F & / \\ & 0 \end{pmatrix}_D & \{T_{coh\ partion\ 3}\} = \begin{pmatrix} N & / \\ T_1 & / \\ / & M_{f2} \end{pmatrix}_K \end{array}$$

PFS en K :

$$\{T_3\} = \begin{pmatrix} 0 & / \\ -F & / \\ / & F(x - 2L) \end{pmatrix}_K \text{ Torseur de cohésion sur la portion 3 :}$$

$$\{T_{coh\ partion\ 3}\} = \{T_{cohésion\ partion\ 2}\} - \{T_3\}, \{T_{cohésion\ partion\ 3}\} = \begin{pmatrix} 0 & / \\ \frac{F}{4} & / \\ / & -\frac{F}{4}(x - 3L) \end{pmatrix}_K$$

**Vérifications :**

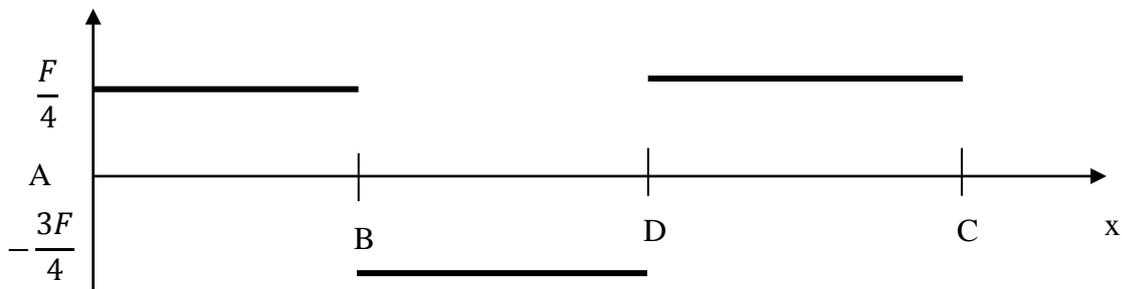
$$T_1 = -\frac{dM_{f2}}{dx} = \frac{F}{4}$$

On vérifie par continuité que :

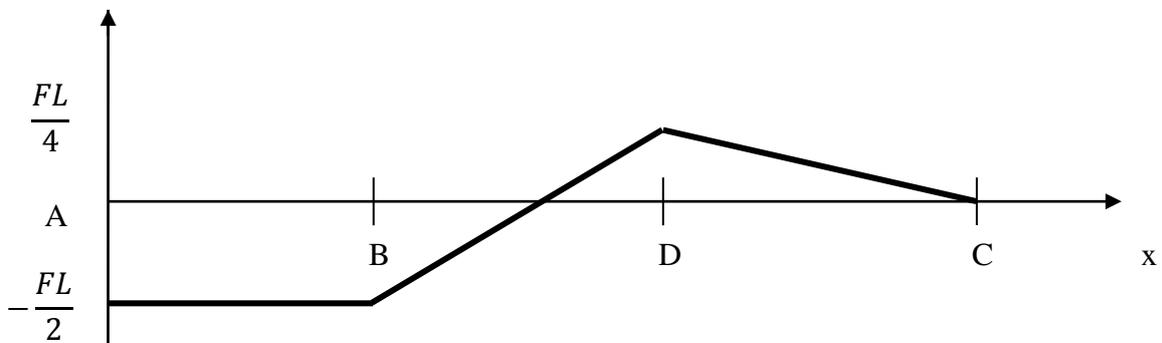
$$\lim_{x \rightarrow 3L} \{T_{cohésion\ partion\ 3}\} = \{T_4\} = \begin{pmatrix} 0 & / \\ \frac{F}{4} & / \\ / & 0 \end{pmatrix}_C$$

### Diagrammes des sollicitations simples

$T_1$  : effort tangentiel

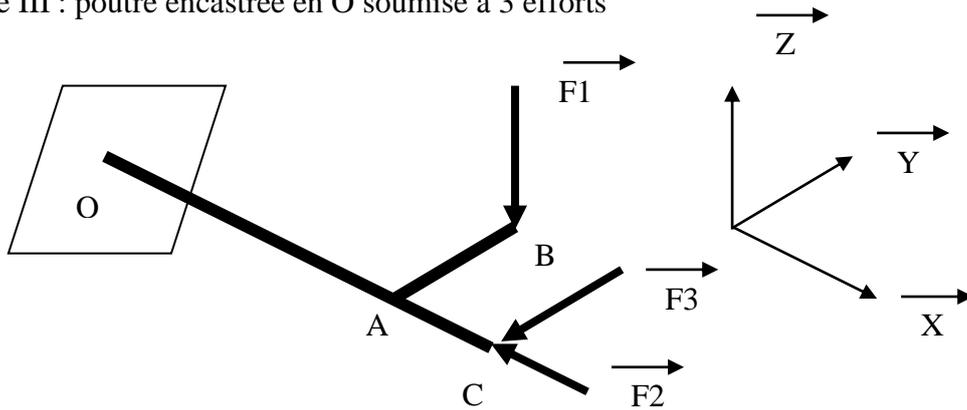


$M_{f2}$  : moment fléchissant



**Conclusion** : la section la plus sollicitée passe par le point B  
Car  $|N|, |T_1|, |M_{f2}|$  maximaux en B

Exercice III : poutre encastrée en O soumise à 3 efforts



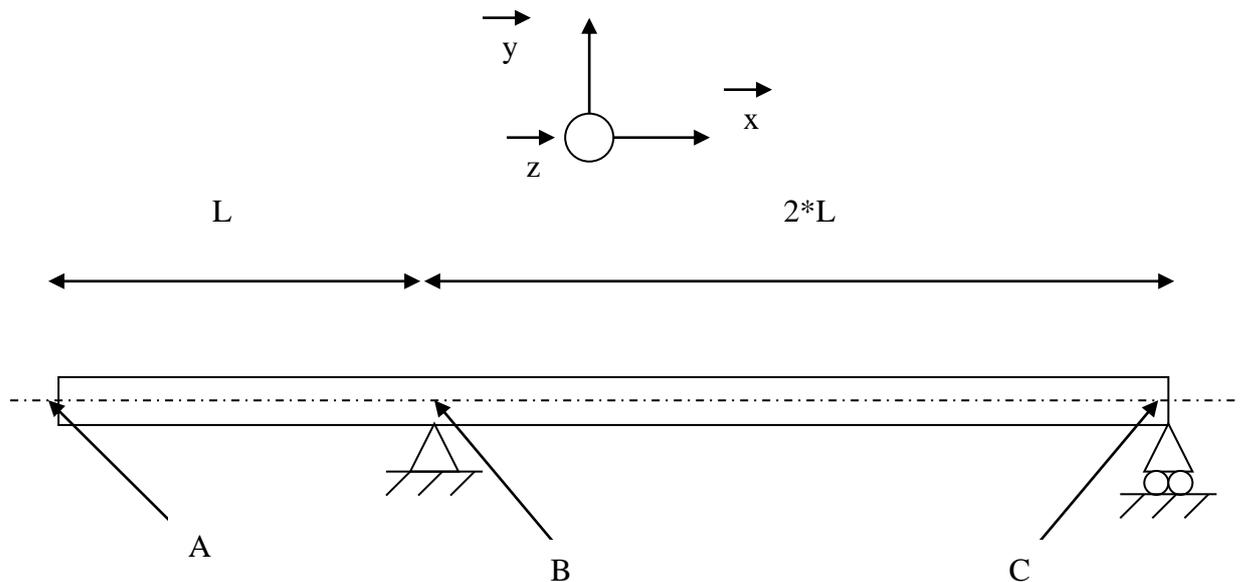
$$OA = 2 \cdot L$$

$$AC = AB = L$$

$$F1 = F2 = F3 = F$$

- A : déterminer le torseur de cohésion en  $K \in [OC]$   
 B : tracer les diagrammes des sollicitations simples  
 C : en déduire la section la plus sollicitée

IV : poutre sur deux appuis soumise à son propre poids  
 Soit  $m$  la masse de la poutre



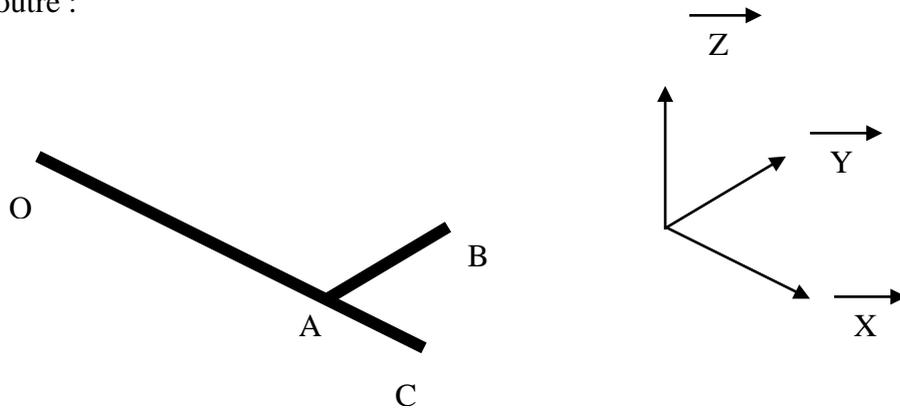
- A : déterminer le torseur de cohésion en  $K \in [AC]$   
 B : tracer les diagrammes des sollicitations simples  
 C : en déduire la section la plus sollicitée

Solution :

III :

Etape 1 : PFS afin d'obtenir les efforts aux appuis

On isole la poutre :



$$\{T_1\} = \begin{pmatrix} X_O & L_O \\ Y_O & M_O \\ Z_O & N_O \end{pmatrix}_O, \{T_2\} = \begin{pmatrix} -F_2 & 0 \\ -F_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_C, \{T_3\} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -F_1 & 0 \end{pmatrix}_B$$

PFS en O :

$$\{T_1\} = \begin{pmatrix} X_O & L_O \\ Y_O & M_O \\ Z_O & N_O \end{pmatrix}_O, \{T_2\} = \begin{pmatrix} -F_2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -3LF_3 \end{pmatrix}_O, \{T_3\} = \begin{pmatrix} 0 & -LF_1 \\ 0 & 2LF_1 \\ -F_1 & 0 \end{pmatrix}_O$$

$$\begin{cases} X_O - F_2 + 0 = 0 \\ Y_O - F_3 + 0 = 0 \\ Z_O + 0 - F_1 = 0 \\ L_O + 0 - LF_1 = 0 \\ M_O + 0 + 2LF_1 = 0 \\ N_O - 3LF_3 + 0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_O = F_2 \\ Y_O = F_3 \\ Z_O = F_1 \\ L_O = LF_1 \\ M_O = -2LF_1 \\ N_O = 3LF_3 \end{cases}$$

Etape 2 : Tenseur de cohésion défini en K:

K point courant de la ligne moyenne :  $\overrightarrow{OK} = x \cdot \vec{X}$

Repère local confondu avec le repère global :

$$\vec{n} = \vec{x}, \vec{t}_1 = \vec{y}, \vec{t}_2 = \vec{z}, \{T_{cohésion\ 1/2}\} = \begin{pmatrix} N & M_t \\ T_1 & M_{f1} \\ T_2 & M_{f2} \end{pmatrix}_{(K, \vec{n}, \vec{t}_1, \vec{t}_2)}$$

Il y a deux portions de la poutre à étudier : OA, AC (une nouvelle portion à l'apparition d'un nouvel effort)

**Portion 1 :  $K \in [OA[$**

On isole [OK]

$$\overrightarrow{OK} = x \cdot \vec{X} \text{ avec } 0 \leq x < 2L$$

O K

---

$$\{T_1\} = \begin{Bmatrix} F_2 & LF_1 \\ F_3 & -2LF_1 \\ F_1 & 3LF_3 \end{Bmatrix}_O \quad \{T_{\text{cohésion portion 1}}\} = \begin{Bmatrix} N & M_t \\ T_1 & M_{f1} \\ T_2 & M_{f2} \end{Bmatrix}_{(K, \vec{n}, \vec{t}_1, \vec{t}_2)}$$

PFS en K :

$$\{T_1\} = \begin{Bmatrix} F_2 & LF_1 \\ F_3 & (x - 2L)F_1 \\ F_1 & (3L - x)F_3 \end{Bmatrix}_K$$

$$\begin{cases} N + F_2 = 0 \\ T_1 + F_3 = 0 \\ T_2 + F_1 = 0 \end{cases} \begin{cases} M_t + LF_1 = 0 \\ M_{f1} + (x - 2L)F_1 = 0 \\ M_{f2} + (3L - x)F_3 = 0 \end{cases}$$

Torseur de cohésion sur la portion 1 :

$$\{T_{\text{cohésion portion 1}}\} = \begin{Bmatrix} -F_2 & -LF_1 \\ -F_3 & -(x - 2L)F_1 \\ -F_1 & -(3L - x)F_3 \end{Bmatrix}_K$$

**Vérification :**

$$T_1 = -\frac{dM_{f2}}{dx} = -F_3, T_2 = \frac{dM_{f1}}{dx} = -F_1$$

**Portion 2 : K ∈ [AC[**

On isole [OK]

$$\overrightarrow{OK} = x \cdot \vec{X} \text{ avec } 2L \leq x < 3L$$

O A K

---

$$\{T_1\} = \begin{Bmatrix} F_2 & LF_1 \\ F_3 & -2LF_1 \\ F_1 & 3LF_3 \end{Bmatrix}_O \quad \{T_3\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -F_1 & 0 \end{Bmatrix}_B \quad \{T_{\text{cohésion portion 2}}\} = \begin{Bmatrix} N & M_t \\ T_1 & M_{f1} \\ T_2 & M_{f2} \end{Bmatrix}_K$$

PFS en K :

$$\{T_3\} = \begin{Bmatrix} 0 & -F_1L \\ 0 & -(x - 2L)F_1 \\ -F_1 & 0 \end{Bmatrix}_K$$

Torseur de cohésion sur la portion 2 :

$$\{T_{\text{cohésion portion 2}}\} = \{T_{\text{cohésion portion 1}}\} - \{T_3\} = \begin{Bmatrix} -F_2 & 0 \\ -F_3 & 0 \\ 0 & -(3L - x)F_3 \end{Bmatrix}_K$$

**Vérification 1 :**

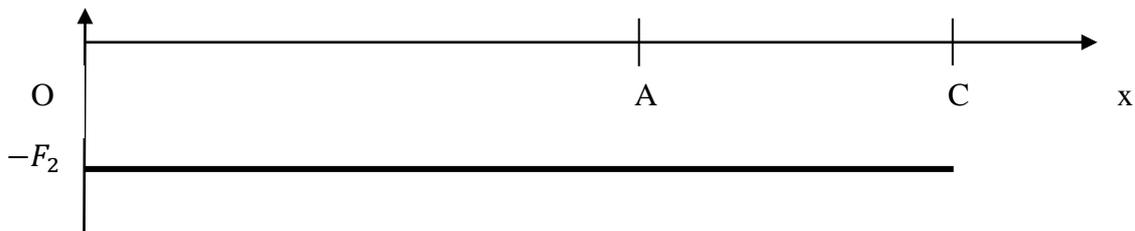
$$T_1 = -\frac{dM_{f2}}{dx} = -F_3, T_2 = \frac{dM_{f1}}{dx} = 0$$

**Vérification 2 :**

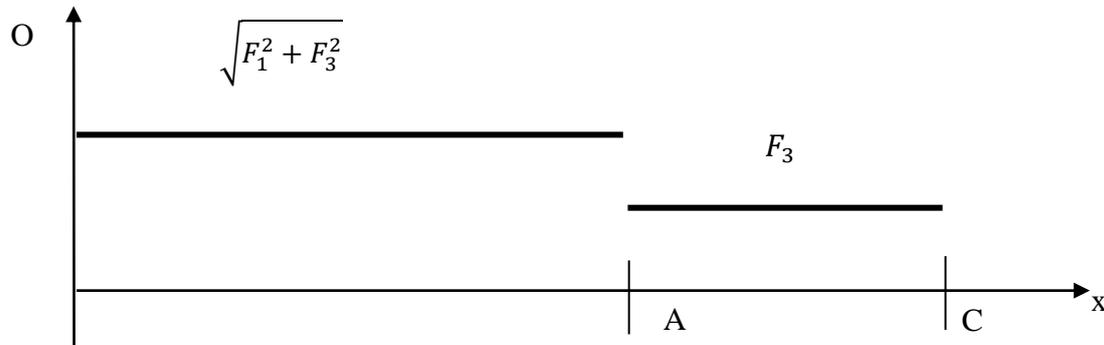
$$\lim_{x \rightarrow 3L} \{T_{\text{cohésion portion 2}}\} = \{T_2\} = \begin{Bmatrix} -F_2 & 0 \\ -F_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_C$$

**Diagrammes des sollicitations simples**

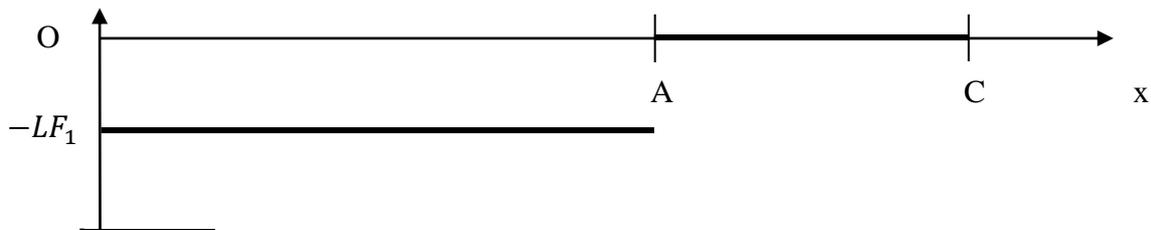
N : effort normal



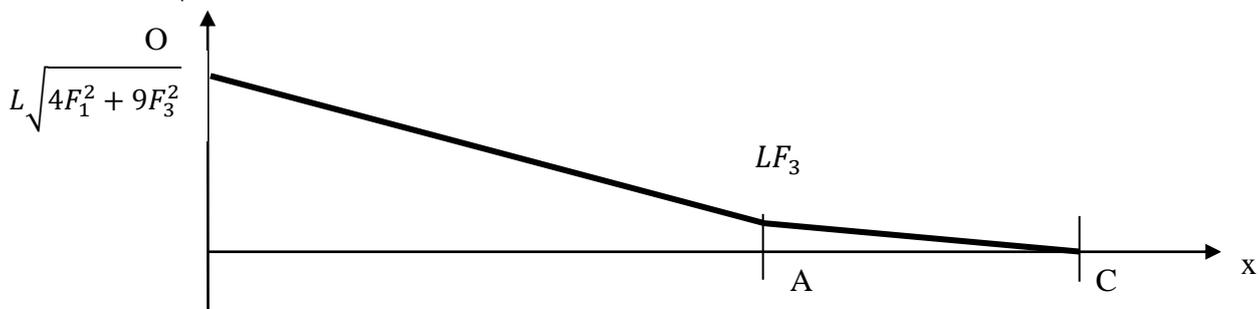
$T = \sqrt{T_1^2 + T_2^2}$ : effort tangentiel



$M_t$  : moment de torsion



$M_f = \sqrt{M_{f1}^2 + M_{f2}^2}$  : moment fléchissant



**Conclusion** : la section la plus sollicitée passe par le point O

Car  $|N|, T, |M_t|, M_f$  maximaux en O

IV :

Etape 1 : PFS afin d'obtenir les efforts aux appuis (problème plan)

On isole la poutre :



G cdm de la poutre,  $AG = \frac{3}{2}L$

$$\{T_1\} = \begin{Bmatrix} X_B & / \\ Y_B & / \\ / & 0 \end{Bmatrix}_B, \{T_{poids}\} = \begin{Bmatrix} 0 & / \\ -mg & / \\ / & 0 \end{Bmatrix}_G, \{T_2\} = \begin{Bmatrix} 0 & / \\ Y_C & / \\ / & 0 \end{Bmatrix}_C$$

PFS en B

$$\{T_1\} = \begin{Bmatrix} X_B & / \\ Y_B & / \\ / & 0 \end{Bmatrix}_B, \{T_{poids}\} = \begin{Bmatrix} 0 & / \\ -mg & / \\ / & -mg \frac{L}{2} \end{Bmatrix}_B, \{T_2\} = \begin{Bmatrix} 0 & / \\ Y_C & / \\ / & 2LY_C \end{Bmatrix}_B,$$

Et on obtient les 3 équations :

$$\begin{cases} X_B + 0 + 0 = 0 \\ Y_B - mg + Y_C = 0 \\ 0 - mg \frac{L}{2} + 2LY_C = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_B = 0 \\ Y_B = \frac{3mg}{4} \\ Y_C = \frac{mg}{4} \end{cases}$$

Etape 2 : Torseur de cohésion défini en K:

K point courant de la ligne moyenne :  $\overrightarrow{AK} = x.\vec{x}$

Repère local confondu avec le repère global :

$$\vec{n} = \vec{x}, \vec{t}_1 = \vec{y}, \vec{t}_2 = \vec{z}, \{T_{cohésion\ 1/2}\} = \begin{Bmatrix} N & M_t \\ T_1 & M_{f1} \\ T_2 & M_{f2} \end{Bmatrix}_{(K, \vec{n}, \vec{t}_1, \vec{t}_2)}$$

Il y a deux portions de la poutre à étudier : AB, BC (une nouvelle portion à l'apparition d'un nouvel effort : attention le poids est appliqué au cdm de la partie isolée !)

**Portion 1 :  $K \in [AB[$**

On isole  $[AK]$

$\overrightarrow{AK} = x.\vec{x}$  avec  $0 \leq x < L$



$$\{T_{poids}\} = \begin{Bmatrix} 0 & / \\ -g \frac{m}{3L} x & / \\ / & 0 \end{Bmatrix}_G, \{T_{cohésion\ portion\ 1}\} = \begin{Bmatrix} N & / \\ T_1 & / \\ / & M_{f2} \end{Bmatrix}_K$$

NB : la masse linéique de la poutre vaut  $\frac{m}{3L}$ , donc la masse de la portion isolée vaut  $\frac{m}{3L} x$ .

PFS en K :

$$\{T_{poids}\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ -g \frac{m}{3L} x \\ / \\ g \frac{m}{3L} \cdot \frac{x^2}{2} \end{array} \right\}_K$$

$$\left\{ \begin{array}{l} N = 0 \\ T_1 = g \frac{m}{3L} x \\ M_{f2} = -g \frac{m}{3L} \cdot \frac{x^2}{2} \end{array} \right.$$

Torseur de cohésion sur la portion 1 :

$$\{T_{cohésion\ portion\ 1}\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ g \frac{m}{3L} x \\ / \\ -g \frac{m}{3L} \cdot \frac{x^2}{2} \end{array} \right\}_K$$

**Portion 2 : K ∈ [BC[**

On isole [AK]

$$\overrightarrow{AK} = x \cdot \vec{x} \text{ avec } L \leq x < 2 \cdot L$$



$$\{T_1\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \frac{3mg}{4} \\ / \\ 0 \end{array} \right\}_B$$

PFS en K :

$$\{T_1\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \frac{3mg}{4} \\ / \\ -\frac{3mg}{4}(x-L) \end{array} \right\}_K$$

Torseur de cohésion sur la portion 2 :

$$\{T_{cohésion\ portion\ 2}\} = \{T_{cohésion\ portion\ 1}\} - \{T_1\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ g \frac{m}{3L} x - \frac{3mg}{4} \\ / \\ -g \frac{m}{3L} \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{3mg}{4}(x-L) \end{array} \right\}_K$$

Vérification :

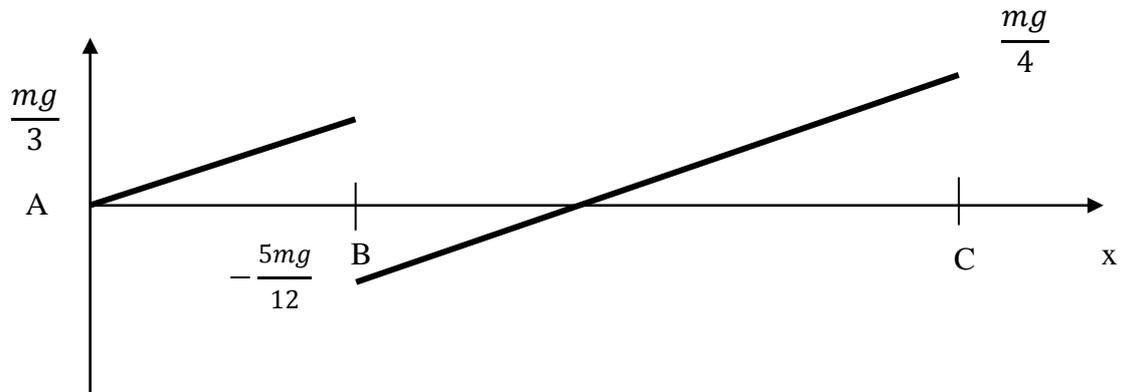
$$T_1 = -\frac{dM_{f2}}{dx} = g \frac{m}{3L} x - \frac{3mg}{4}$$

On vérifie par continuité que :

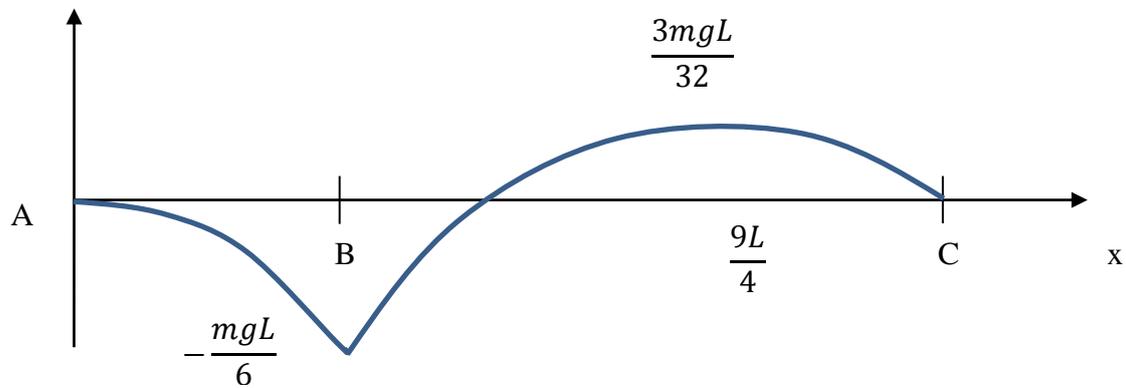
$$\lim_{x \rightarrow 3L} \{T_{cohésion\ portion\ 2}\} = \{T_2\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \frac{mg}{4} \\ / \\ 0 \end{array} \right\}_C$$

### Diagrammes des sollicitations simples

$T_1$  : effort tangentiel



$M_{f2}$  : moment fléchissant



**Conclusion** : la section la plus sollicitée passe par le point B

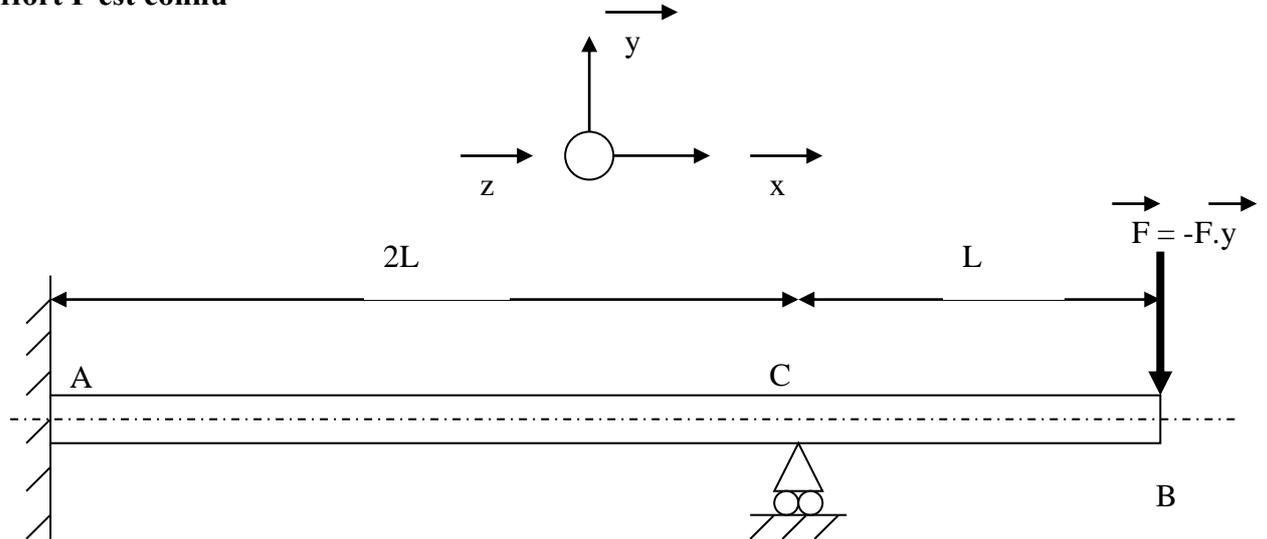
Car  $|T_1|, |M_{f2}|$  maximaux en B

#### IV : Résolution des problèmes hyperstatiques :

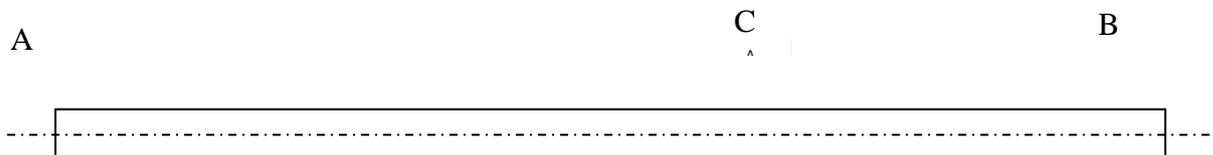
Un problème est hyperstatique lorsque le PFS ne suffit pas à déterminer entièrement les efforts aux appuis (le nombre d'inconnues restant est égal au degré d'hyperstatisme).

Exemple :

L'effort F est connu



On isole la poutre AB :



$$\{T_1\} = \begin{Bmatrix} X_A & / \\ Y_A & / \\ / & N_A \end{Bmatrix}_A, \quad \{T_2\} = \begin{Bmatrix} 0 & / \\ Y_C & / \\ / & 0 \end{Bmatrix}_C, \quad \{T_3\} = \begin{Bmatrix} 0 & / \\ -F & / \\ / & 0 \end{Bmatrix}_B$$

PFS : en A

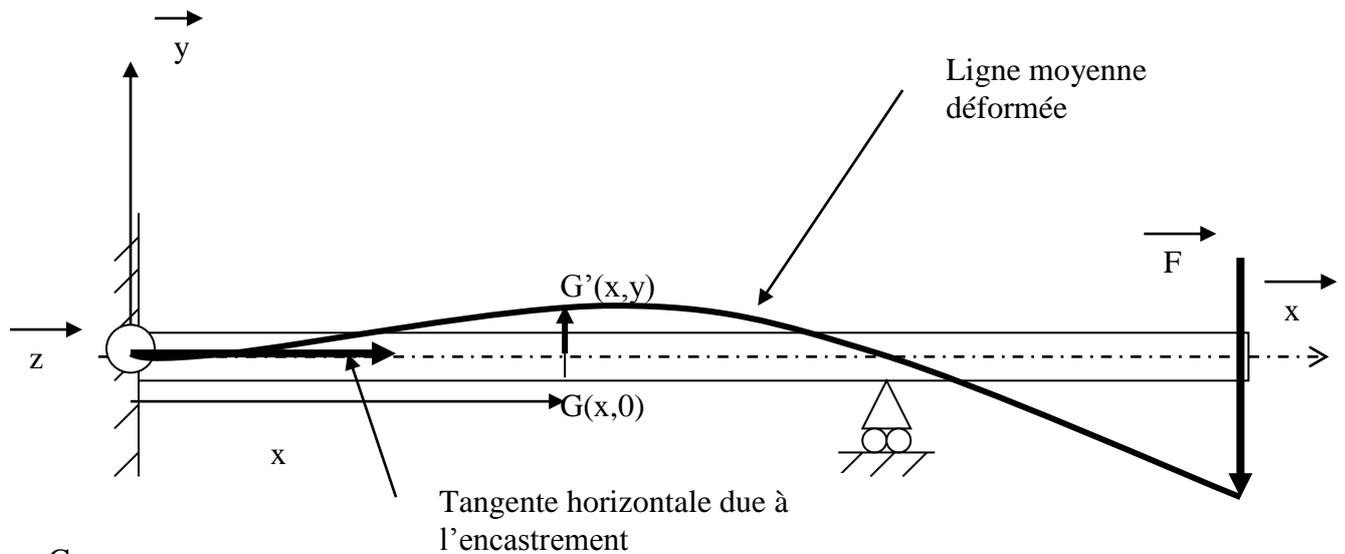
$$\{T_1\} = \begin{Bmatrix} X_A & / \\ Y_A & / \\ / & N_A \end{Bmatrix}_A, \quad \{T_2\} = \begin{Bmatrix} 0 & / \\ Y_C & / \\ / & 2LY_C \end{Bmatrix}_C, \quad \{T_3\} = \begin{Bmatrix} 0 & / \\ -F & / \\ / & -3LF \end{Bmatrix}_A$$

$$\begin{cases} X_A = 0 \\ Y_A = F - Y_C \\ N_A = 3LF - 2LY_C \end{cases}$$

**Conclusion** : le PFS est insuffisant.

Problème hyperstatique de degré 1 (les autres inconnues sont exprimées en fonction de  $Y_C$ )

Pour résoudre ce type de problèmes, on doit faire appel à la **formule de Bresse** (donnée sans démonstration) qui permet de relier la dérivée seconde de la déformée de la poutre au moment fléchissant, au matériau et à la géométrie de la poutre.



en G :

$$y'' = \frac{Mfz(x)}{I_{Gz} \times E} \quad \text{: formule de Bresse}$$

Avec :  $y(x)$  : déformé (déplacement vertical du point d'abscisse  $x$ )

$\frac{dy}{dx} = y'$  : pente de la ligne moyenne déformée

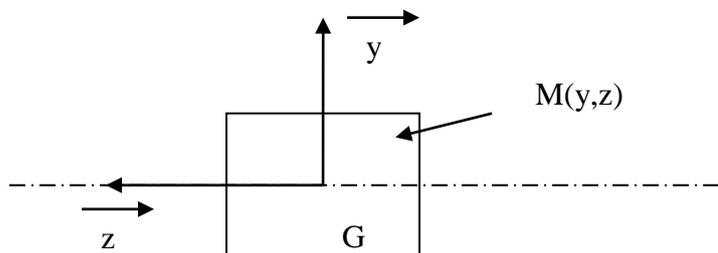
$\frac{d^2y}{dx^2} = y'' = \frac{1}{\rho}$  ; avec  $\rho$  rayon de courbure de la ligne moyenne déformée

$Mfz$  : moment fléchissant porté par  $z$

$E$  : module de Young du matériau (MPa)

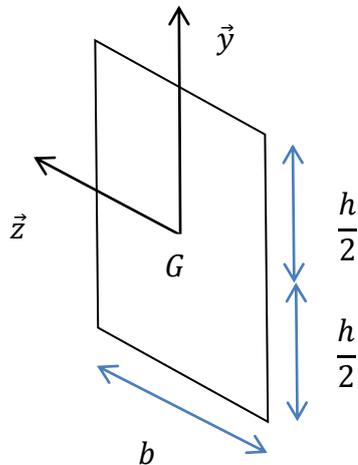
$$I_{Gz} = \int_{M \in \pi} y^2 \cdot dS \quad \text{: moment quadratique de la section par rapport à } Gz \text{ (en } m^4)$$

Section ( $\pi$ )



### Calcul de quelques moments quadratiques :

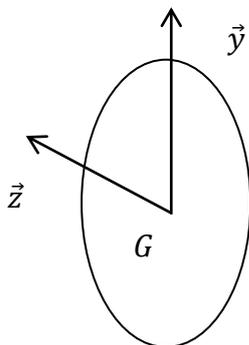
Exemple 1 : poutre de section rectangulaire



$$I_{Gz} = \int y^2 dS; dS = dy \cdot dz, I_{Gz} = \iint y^2 dy \cdot dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 dy \cdot \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dz$$

$$I_{Gz} = \frac{bh^3}{12}$$

Exemple 2 : poutre de section circulaire pleine de rayon R



$$I_{Gz} = \int y^2 dS (= \int z^2 dS \text{ par symétrie}); dS = r dr \cdot d\theta$$

Donc  $I_{Gz} = \frac{1}{2} \int y^2 + z^2 dS$ , avec  $y^2 + z^2 = r^2$

$$I_{Gz} = \frac{1}{2} \int_0^R r^3 dr \cdot \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$I_{Gz} = \frac{\pi R^4}{4} \text{ ou } I_{Gz} = \frac{\pi D^4}{64}$$

### Application de la formule de Bresse à l'exemple :

Déterminer les inconnues de liaison

$$y'' I_{Gz} E = M_{f2}$$

Il nous faut le torseur de cohésion.

K point courant de la ligne moyenne :  $\overrightarrow{AK} = x \cdot \vec{x}$

Repère local confondu avec le repère global :

$$\vec{n} = \vec{x}, \vec{t}_1 = \vec{y}, \vec{t}_2 = \vec{z}, \{T_{cohésion\ 1/2}\} = \left\{ \begin{matrix} N & M_t \\ T_1 & M_{f1} \\ T_2 & M_{f2} \end{matrix} \right\}_{(K, \vec{n}, \vec{t}_1, \vec{t}_2)}$$

Il y a deux portions de la poutre à étudier : AC, CB (une nouvelle portion à l'apparition d'un nouvel effort)

**Portion 1 :  $K \in [AC[$**

On isole [AK]

$$\overrightarrow{AK} = x \cdot \vec{x} \text{ avec } 0 \leq x < 2L$$

A K

$$\{T_1\} = \left\{ \begin{matrix} 0 & / \\ F - Y_C & / \\ / & 3LF - 2LY_C \end{matrix} \right\}_A \quad \{T_{cohésion\ portion\ 1}\} = \left\{ \begin{matrix} N & / \\ T_1 & / \\ / & M_{f2} \end{matrix} \right\}_K$$

PFS en K :

$$\{T_1\} = \left\{ \begin{matrix} 0 & / \\ F - Y_C & / \\ / & 3LF - 2LY_C - (F - Y_C)x \end{matrix} \right\}_K,$$

$$\begin{cases} N = 0 \\ T_1 + F - Y_C = 0 \\ M_{f2} + 3LF - 2LY_C - (F - Y_C)x = 0 \end{cases}$$

Torseur de cohésion sur la portion 1 :

$$\{T_{cohésion\ portion\ 1}\} = \left\{ \begin{matrix} 0 & / \\ -F + Y_C & / \\ / & x(F - Y_C) - 3LF + 2LY_C \end{matrix} \right\}_K$$

Vérification :

$$T_1 = -\frac{dM_{f2}}{dx} = -F + Y_C$$

**Portion 2 :  $K \in [CB[$**

On isole [AK]

$$\overrightarrow{AK} = x \cdot \vec{x} \text{ avec } 2L \leq x < 3L$$

A C K

$$\{T_2\} = \left\{ \begin{matrix} 0 & / \\ Y_C & / \\ / & 0 \end{matrix} \right\}_C$$

PFS en K :

$$\{T_2\} = \left\{ \begin{matrix} 0 & / \\ Y_C & / \\ / & Y_C(2L - x) \end{matrix} \right\}_K$$

Torseur de cohésion sur la portion 2 :

$$\{T_{cohésion\ portion\ 2}\} = \{T_{cohésion\ portion\ 1}\} - \{T_2\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ -F \\ / \end{array} \right\} / \left\{ \begin{array}{c} / \\ / \\ F(x - 3L) \end{array} \right\}_K$$

Vérification :

$$T_1 = -\frac{dM_{f2}}{dx} = -\frac{3F}{4}$$

On vérifie par continuité que :

$$\lim_{x \rightarrow 3L} \{T_{cohésion\ portion\ 3}\} = \{T_3\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ -F \\ / \end{array} \right\} / \left\{ \begin{array}{c} / \\ / \\ 0 \end{array} \right\}_B$$

Utilisation de la formule de Bresse sur la portion 1 :

$$y'' I_{Gz} E = M_{f2}, M_{f2} = x(F - Y_C) - 3LF + 2LY_C$$

Donc  $y' I_{Gz} E = \frac{1}{2} x^2 (F - Y_C) + (2LY_C - 3LF)x + C_1$ , avec  $C_1$  constante d'intégration

Condition aux limites : à l'encastrement, la tangente à la ligne moyenne déformée est horizontale donc  $y'(0) = 0$  donc  $C_1 = 0$ .

$$y I_{Gz} E = \frac{1}{6} x^3 (F - Y_C) + (2LY_C - 3LF) \frac{x^2}{2} + C_2, \text{ avec } C_2 \text{ constante d'intégration}$$

Condition aux limites : à l'encastrement, le déplacement horizontal de la ligne moyenne déformée est nul donc  $y(0) = 0$  donc  $C_2 = 0$ .

La poutre étant en appui en C,  $y(2L) = 0$  ce qui nous donne l'équation manquante !

$$y(2L) I_{Gz} E = 0 = \frac{1}{6} (2L)^3 (F - Y_C) + (2LY_C - 3LF) \frac{(2L)^2}{2}$$

$$\text{D'où } Y_C = \frac{7}{4} F$$

L'étude de la portion 2 n'est pas utile ici.

## Chapitre II : étude des contraintes dans un solide

### I : définition et hypothèses simplificatrices

#### I 1 : solides élastiques

Mécanique générale (statique, cinématique, dynamique) : solides indéformables.

Note : les ressorts sont des solides déformables, dont nous pouvons très souvent négliger la masse...

RDM : solides déformables.

#### I 2 : hypothèses simplificatrices

Les solides considérés sont des milieux homogènes, isotropes, élastiques. Le domaine de validité de notre étude se réduit aux petites déformations.

Le volume élémentaire sur lequel on travaille contient un très grand nombre de molécules : c'est un domaine homogène isotrope, mais à l'échelle macroscopique. Ses dimensions sont suffisamment faibles pour être considéré infiniment petit.

### II : équilibre d'un domaine solide

On considère un domaine  $\mathcal{D}$  de volume  $\mathcal{V}$  et de frontière  $\Sigma$ .

$\mathcal{D}$  est un solide entier, ou une partie d'un solide, que nous isolons (par la pensée...).

Il peut s'agir aussi d'un tout petit élément de volume  $dv$  entourant un point M.

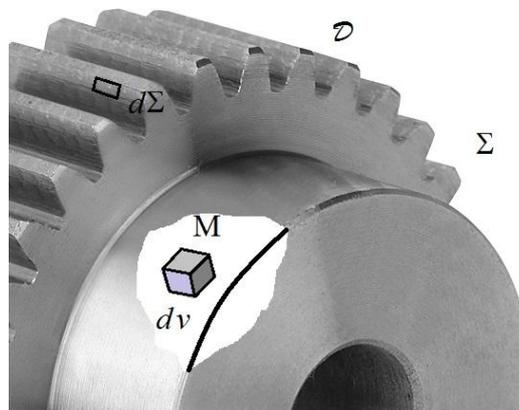


Figure 1 : frontière du domaine isolé

#### II 1 : efforts appliqués sur le point (M, dv)

Efforts volumiques (le poids par exemple) : appliqués à tout le volume  $dv$ , de densité volumique  $\vec{f}(M)$ . La résultante vaut  $\vec{f} \cdot dv$

Efforts surfaciques, sur une facette  $ds$ , de densité surfacique  $\vec{C}(M)$ . La résultante vaut  $\vec{C} \cdot ds$

Mais il n'y a ni efforts ponctuels ni efforts linéiques.

#### II 2 : Principe Fondamental de la Statique (PFS)

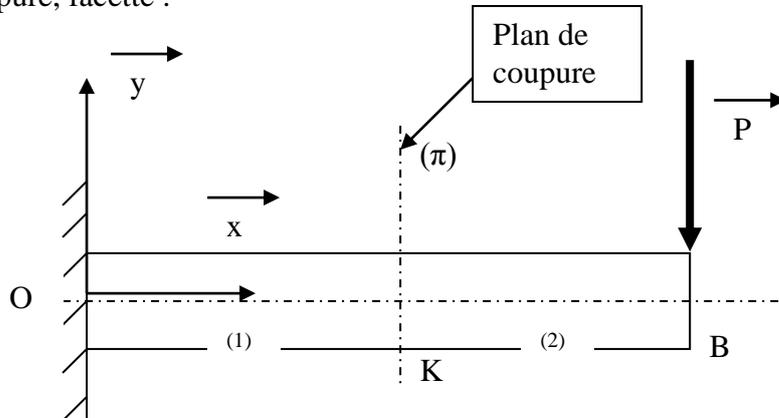
Torseur des efforts extérieurs appliqués sur (M, dv) = torseur nul

$$\{T_{F_{ext} \rightarrow D}\} = \{0\}$$

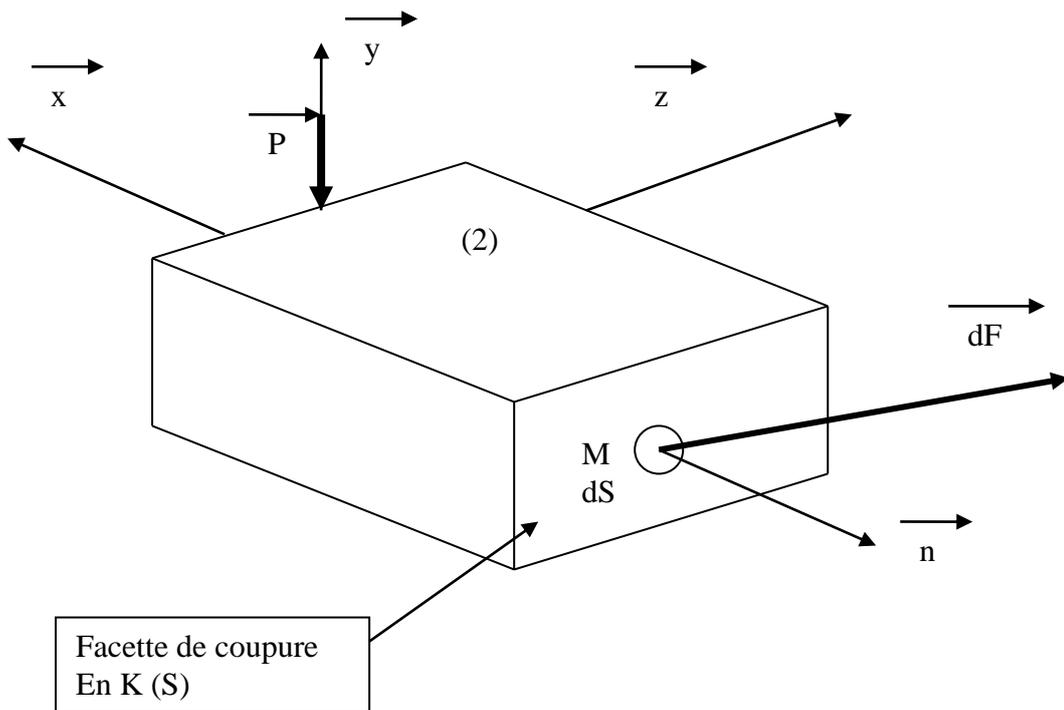
### III vecteur contrainte

#### III 1 : notion de contrainte (indépendant du matériau constitutif)

Coupure, facette :



On isole (2)



(2) est en équilibre si on tient compte des efforts de cohésion de (1) sur (2) au travers de la facette de coupure en K (S).

effort élémentaire en M :  $\vec{dF} = \vec{C}_{(M, \vec{n})} . dS$

$\vec{C}_{(M, \vec{n})}$  : vecteur contrainte en M sur la facette de normale **sortante unitaire** de (S) :  $\vec{n}$ .

**Remarque :  $\|\vec{n}\| = 1$  ; toujours**

### III 2 : vecteur contrainte

$\vec{C}_{(M,\vec{n})}$  dépend :

- de l'orientation du plan ( $\pi$ ) en M
- de M
- de la partie isolée (principe d'action réaction)

On définit :

- la contrainte normale  $\sigma$  : projection de  $\vec{C}_{(M,\vec{n})}$  sur  $\vec{n}$
- la contrainte tangentielle  $\tau$  : projection de  $\vec{C}_{(M,\vec{n})}$  dans le plan de (S)

**Donc  $\vec{C}_{(M,\vec{n})} = \sigma\vec{n} + \tau\vec{t}$**

### **IV matrice des contraintes (ou tenseur des contraintes)**

#### IV 1 : définition

Repère  $(M, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  tel que  $\vec{n}$  soit parallèle à  $\vec{x}$

Facette de normale $\vec{x}$ :	$\vec{C}_{(M,\vec{x})}$	$\begin{matrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{matrix}$	<p>Contrainte normale</p> <p>Contrainte tangentielle suivant <math>\vec{y}</math></p> <p>Contrainte tangentielle suivant <math>\vec{z}</math></p>
--------------------------------	-------------------------	--	---

Repère  $(M, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  tel que  $\vec{n}$  soit parallèle à  $\vec{y}$

Facette de normale $\vec{y}$ :	$\vec{C}_{(M,\vec{y})}$	$\begin{matrix} \tau_{yx} \\ \sigma_y \\ \tau_{yz} \end{matrix}$	<p>Contrainte tangentielle suivant <math>\vec{x}</math></p> <p>Contrainte normale</p> <p>Contrainte tangentielle suivant <math>\vec{z}</math></p>
--------------------------------	-------------------------	--	---

Repère  $(M, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  tel que  $\vec{n}$  soit parallèle à  $\vec{z}$

Facette de normale $\vec{z}$ :	$\vec{C}_{(M,\vec{z})}$	$\begin{matrix} \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \\ \sigma_z \end{matrix}$	<p>Contrainte tangentielle suivant <math>\vec{x}</math></p> <p>Contrainte tangentielle suivant <math>\vec{y}</math></p> <p>Contrainte normale</p>
--------------------------------	-------------------------	--	---

On en déduit la matrice des contraintes en un point M d'un solide, valable pour un chargement extérieur donné.

$[\sigma_{(M)}]$	=	$\begin{matrix} \vec{C}_{(M,\vec{x})} & \vec{C}_{(M,\vec{y})} & \vec{C}_{(M,\vec{z})} \end{matrix}$	$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$	$\begin{matrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{matrix}$
------------------	---	---	--	---

Remarque 1 :  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{yx}, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{zx}, \tau_{zy}$  sont homogènes à des forces surfaciques (MPa)

Remarque 2 :  $\sigma_x > 0$  : élément tendu,  $\sigma_x < 0$  : élément comprimé (le signe de  $\tau_{ij}$  n'a pas de signification physique)

Remarque 3 :

$$\vec{C}_{(M,\vec{x})} = [\sigma_{(M)}] \cdot \vec{x} ; \vec{C}_{(M,\vec{y})} = [\sigma_{(M)}] \cdot \vec{y} ; \vec{C}_{(M,\vec{z})} = [\sigma_{(M)}] \cdot \vec{z}$$

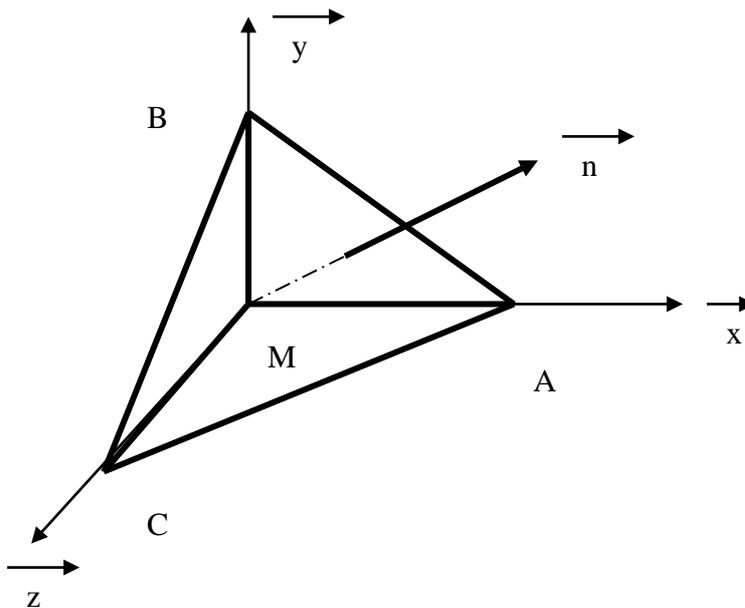
#### IV 2 : calcul de la contrainte

On a vu que le vecteur contrainte en M dépend de l'orientation de la facette.

Question : que vaut le vecteur contrainte suivant une facette de normale quelconque  $\vec{n}$  ?

**Equilibre du tétraèdre MABC** en supposant que la contrainte soit uniforme sur le tétraèdre:

MA = dx, MB = dy, MC = dz, S aire de ABC,  $\vec{n}$  normale sortante de ABC,  $\vec{n} \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{vmatrix}$



facette	Normale unitaire sortante	aire	Effort s'appliquant sur la facette
AMB	$-\vec{z}$	$\gamma.S$	$-\vec{C}_{(M,\vec{z})} \gamma.S$
BMC	$-\vec{x}$	$\alpha.S$	$-\vec{C}_{(M,\vec{x})} \alpha.S$
CMA	$-\vec{y}$	$\beta.S$	$-\vec{C}_{(M,\vec{y})} \beta.S$
ABC	$\vec{n}$	S	$\vec{C}_{(M,\vec{n})} .S$

PFS :

$$\vec{C}_{(M,\vec{n})} \cdot \vec{S} - \vec{C}_{(M,\vec{y})} \beta - \vec{C}_{(M,\vec{x})} \alpha - \vec{C}_{(M,\vec{z})} \gamma \cdot \vec{S} = \vec{O}$$

$$\vec{C}_{(M,\vec{n})} = \vec{C}_{(M,\vec{y})} \beta + \vec{C}_{(M,\vec{x})} \alpha + \vec{C}_{(M,\vec{z})} \gamma$$

$$\vec{C}_{(M,\vec{n})} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \cdot \begin{matrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{matrix}$$

$$\vec{C}_{(M,\vec{n})} = [\sigma_{(M)}] \cdot \vec{n}$$

C'est le vecteur contrainte en M sur la facette de normale sortante  $\vec{n}$

NB :  $\vec{C}_{(M,\vec{n})}$  et  $\vec{n}$  ne sont pas colinéaires en général!

### exercices

I : Soit la matrice des contraintes en un point M (en MPa) dans le repère  $(M, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  :

$$[\sigma_{(M)}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 10 \\ 0 & 10 & 30 \end{bmatrix}$$

Calculer le vecteur contrainte puis les contraintes normale et tangentielle sur la facette de normale (1,1,1).

II : Soit la matrice des contraintes (en MPa) dans le repère  $(M, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ .

$$[\sigma_{(M)}] = \begin{bmatrix} -10 & 0 & 60 \\ 0 & -10 & 20 \\ 60 & 20 & 50 \end{bmatrix}$$

A : calculer le vecteur contrainte  $\vec{C}_{(M,\vec{n}_1)}$  puis les contraintes normales et tangentielles sur la facette de normale  $\vec{n}_1(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$

B : calculer le vecteur contrainte  $\vec{C}_{(M,\vec{n}_2)}$  sur la face de normale  $\vec{n}_2 = \vec{z}$ .

C : vérifier la relation de Cauchy :

$$\vec{C}_{(M,\vec{n}_1)} \cdot \vec{n}_2 = \vec{C}_{(M,\vec{n}_2)} \cdot \vec{n}_1$$

En conclure que ce n'est vrai que si la matrice des contraintes est symétrique.

Solution :

Exercice I :

Normons le vecteur normal :

$$\vec{n} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \vec{C}_{(M,\vec{n})} = [\sigma_{(M)}] \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{40}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \sigma = \vec{C}_{(M,\vec{n})} \cdot \vec{n} = \frac{40}{3}; \tau \vec{t} = \vec{C}_{(M,\vec{n})} - \sigma \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} -\frac{40}{3\sqrt{3}} \\ -\frac{40}{3\sqrt{3}} \\ \frac{80}{3\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Donc

$$\tau = |\tau \vec{t}| = \frac{40\sqrt{2}}{3}$$

Exercice II :

$$\vec{C}_{(M,\vec{n}_1)} = [\sigma_{(M)}] \cdot \vec{n}_1 = \begin{pmatrix} \frac{50}{\sqrt{3}} \\ \frac{10}{\sqrt{3}} \\ \frac{130}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}; \sigma = \vec{C}_{(M,\vec{n}_1)} \cdot \vec{n}_1 = \frac{190}{3};$$

$$\tau \vec{t} = \vec{C}_{(M,\vec{n}_1)} - \sigma \cdot \vec{n}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{40}{3\sqrt{3}} \\ \frac{-160}{3\sqrt{3}} \\ \frac{200}{3\sqrt{3}} \end{pmatrix}; \tau = \frac{40\sqrt{14}}{3}$$

$$\vec{C}_{(M,\vec{n}_2)} = [\sigma_{(M)}] \cdot \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 60 \\ 20 \\ 50 \end{pmatrix},$$

$$\vec{C}_{(M,\vec{n}_1)} \cdot \vec{n}_2 = \frac{130}{\sqrt{3}};$$

$$\vec{C}_{(M,\vec{n}_2)} \cdot \vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 60 \\ 20 \\ 50 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \frac{130}{\sqrt{3}},$$

La relation de Cauchy ne se vérifie que si la matrice est symétrique. On a alors affaire à un opérateur symétrique :  $u.f(v) = v.f(u)$

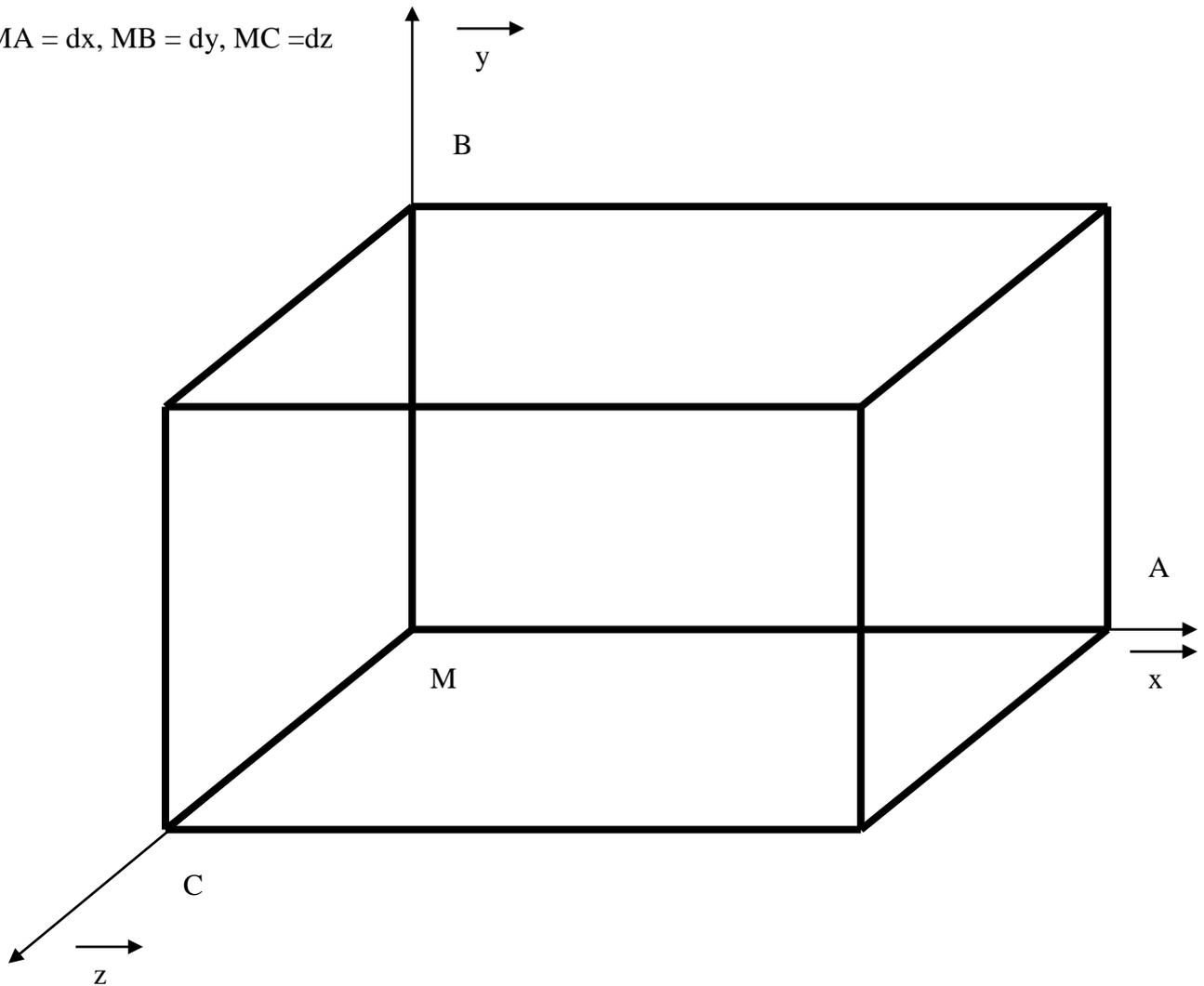
IV 3 : équations d'équilibre

On étudie l'équilibre d'un parallélépipède élémentaire (extrait d'un solide) soumis à des efforts surfaciques et à des efforts volumiques. La contrainte n'est pas uniforme ; elle évolue en fonction du point considéré.

Efforts volumiques (N/m<sup>3</sup>) au centre de gravité G

$$\vec{f} \begin{vmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{vmatrix}$$

MA = dx, MB = dy, MC = dz



Effort surfacique sur la facette de normale  $-\vec{x}$  passant par M et de centre I(0,dy/2,dz/2) : (on suppose la contrainte uniforme sur la facette)

$$\vec{C}_{(I,-\vec{x})} = -\vec{C}_{(I,\vec{x})} = \begin{vmatrix} -\sigma_x \\ -\tau_{xy} \\ -\tau_{xz} \end{vmatrix}$$

Effort surfacique sur la facette de normale  $\vec{x}$  passant par A et de centre D(dx,dy/2,dz/2) :

$$\vec{C}_{(D,\vec{x})} = \vec{C}_{(I,\vec{x})} + d\vec{C}_{(I,\vec{x})} = \begin{vmatrix} \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \bullet dx \\ \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \bullet dx \\ \tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} \bullet dx \end{vmatrix}$$

En effet, entre les coordonnées de I et D, seule la composante suivant x change, donc la contrainte ne va varier que par rapport à x.

De même :

Effort surfacique sur la facette de normale  $-\vec{y}$  passant par M et de centre J(dx/2,0,dz/2) :

$$\vec{C}_{(J,-\vec{y})} = -\vec{C}_{(J,\vec{y})} = \begin{vmatrix} -\tau_{yx} \\ -\sigma_y \\ -\tau_{yz} \end{vmatrix}$$

Effort surfacique sur la facette de normale  $\vec{y}$  passant par B et de centre F(dx/2,dy,dz/2) :

$$\vec{C}_{(F,\vec{y})} = \vec{C}_{(J,\vec{y})} + d\vec{C}_{(J,\vec{y})} = \begin{vmatrix} \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \bullet dy \\ \sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \bullet dy \\ \tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \bullet dy \end{vmatrix}$$

De même :

Effort surfacique sur la facette de normale  $-\vec{z}$  passant par M et de centre H(dx/2,dy/2,0) :

$$\vec{C}_{(H,-\vec{z})} = -\vec{C}_{(H,\vec{z})} = \begin{vmatrix} -\tau_{zx} \\ -\tau_{zy} \\ -\sigma_z \end{vmatrix}$$

Effort surfacique sur la facette de normale  $\vec{z}$  passant par C et de centre E(dx/2,dy/2,dz) :

$$\vec{C}_{(E,\vec{z})} = \vec{C}_{(H,\vec{z})} + d\vec{C}_{(H,\vec{z})} = \begin{vmatrix} \tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \bullet dz \\ \tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \bullet dz \\ \sigma_z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \bullet dz \end{vmatrix}$$

**Équation de la résultante:**  $\Sigma \vec{F}_{ext} = \vec{0}$

$$\vec{C}_{(I,-\vec{x})} \cdot dy \cdot dz + \vec{C}_{(D,\vec{x})} \cdot dy \cdot dz + \vec{C}_{(J,-\vec{y})} \cdot dx \cdot dz + \vec{C}_{(F,\vec{y})} \cdot dx \cdot dz + \vec{C}_{(H,-\vec{z})} \cdot dx \cdot dy + \vec{C}_{(E,\vec{z})} \cdot dx \cdot dy + \vec{f} \cdot dx \cdot dy \cdot dz = \vec{0}$$

En projection sur  $\vec{x}$  :

$$-\sigma_x \cdot dy \cdot dz + \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \cdot dx\right) \cdot dy \cdot dz - \tau_{yx} \cdot dx \cdot dz + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \cdot dy\right) \cdot dx \cdot dz - \tau_{zx} \cdot dx \cdot dy + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \cdot dz\right) \cdot dx \cdot dy + f_x \cdot dx \cdot dy \cdot dz = 0$$

Puis en projection sur  $\vec{y}$  et sur  $\vec{z}$  on obtient deux autres équations.

Au bilan, on obtient **les équations d'équilibre** (utiles en élasticité) :

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + f_x = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + f_y = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_z = 0$$

#### IV 4 : symétrie de la matrice des contraintes

On va écrire à présent l'équation des moments en G du parallélépipède

$$\Sigma \vec{M}_G = \vec{0}$$

$$dx \cdot dz \cdot (\vec{GF} \wedge (\vec{C}_{(J,\vec{y})} + d\vec{C}_{(J,\vec{y})}) + \vec{GJ} \wedge \vec{C}_{(J,-\vec{y})}) + dy \cdot dz \cdot (\vec{GD} \wedge (\vec{C}_{(I,\vec{x})} + d\vec{C}_{(I,\vec{x})}) + \vec{GI} \wedge \vec{C}_{(I,-\vec{x})}) + dx \cdot dy \cdot (\vec{GE} \wedge (\vec{C}_{(H,\vec{z})} + d\vec{C}_{(H,\vec{z})}) + \vec{GH} \wedge \vec{C}_{(H,-\vec{z})}) = \vec{0}$$

$$dx dz \left[ \frac{dy}{2} \vec{y} \wedge ((\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy) \vec{x} + (\sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy) \vec{y} + (\tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dy) \vec{z}) - \frac{dy}{2} \vec{y} \wedge (-\tau_{yx} \vec{x} - \sigma_y \vec{y} - \tau_{yz} \vec{z}) \right] + dy dz \left[ \frac{dx}{2} \vec{x} \wedge ((\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx) \vec{x} + (\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx) \vec{y} + (\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} dx) \vec{z}) - \frac{dx}{2} \vec{x} \wedge (-\sigma_x \vec{x} - \tau_{xy} \vec{y} - \tau_{xz} \vec{z}) \right] + dy dx \left[ \frac{dz}{2} \vec{z} \wedge ((\sigma_z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz) \vec{z} + (\tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} dz) \vec{y} + (\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz) \vec{x}) - \frac{dz}{2} \vec{z} \wedge (-\sigma_z \vec{z} - \tau_{zy} \vec{y} - \tau_{zx} \vec{x}) \right] = \vec{0}$$

$$\frac{dx dz}{2} [(-dy \cdot \tau_{yx} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \cdot d^2 y) \vec{z} + (dy \cdot \tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \cdot d^2 y) \vec{x} - dy \cdot \tau_{yx} \cdot \vec{z} + dy \cdot \tau_{yz} \cdot \vec{x}] + \frac{dy dz}{2} [(dx \cdot \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \cdot d^2 x) \vec{z} - (dx \cdot \tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} \cdot d^2 x) \vec{y} + dx \cdot \tau_{xy} \cdot \vec{z} - dx \cdot \tau_{xz} \cdot \vec{y}] + \frac{dy dx}{2} [(-dz \cdot \tau_{zy} - \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \cdot d^2 z) \vec{x} + (dz \cdot \tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \cdot d^2 z) \vec{y} - dz \cdot \tau_{zy} \cdot \vec{x} + dz \cdot \tau_{zx} \cdot \vec{y}] = \vec{0}$$

En négligeant les infiniment petits d'ordre 4 par rapport aux ordres 3, on obtient :

$$-dydx dz \cdot \tau_{yx} \vec{z} + dydx dz \cdot \tau_{yz} \vec{x} + dydx dz \cdot \tau_{xy} \vec{z} - dydx dz \tau_{xz} \vec{y} - dydx dz \cdot \tau_{zy} \vec{x} + dydx dz \cdot \tau_{zx} \vec{y} = \vec{0}$$

en projection sur  $\vec{x}$  :

$$\tau_{yz} - \tau_{zy} = 0 ; \tau_{yz} = \tau_{zy}$$

en projection sur  $\vec{y}$  :

$$\tau_{xz} - \tau_{zx} = 0 ; \tau_{xz} = \tau_{zx}$$

en projection sur  $\vec{z}$  :

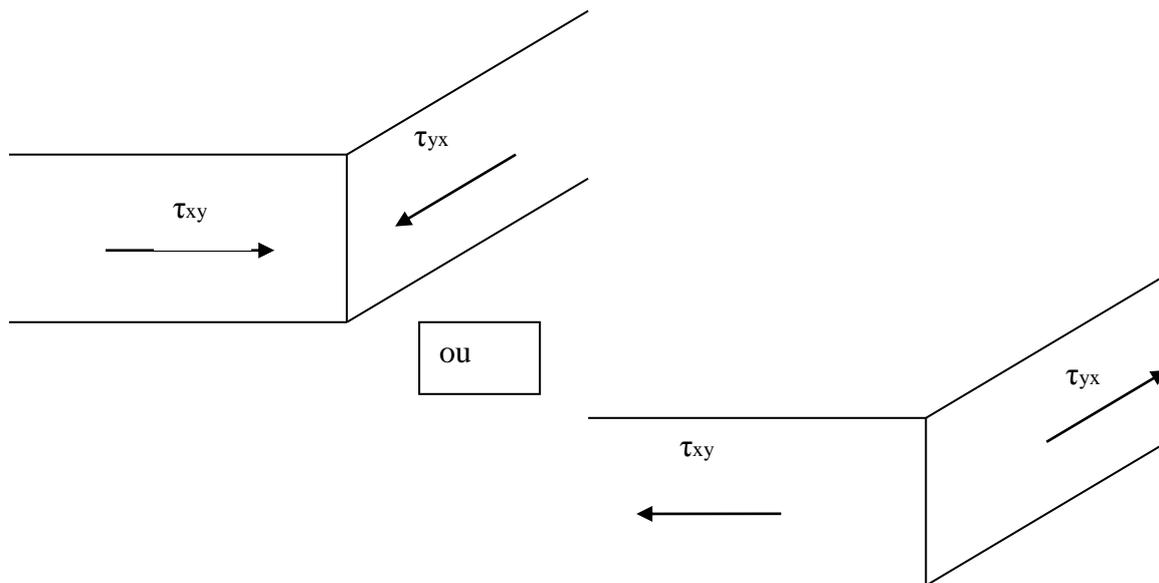
$$\tau_{yx} - \tau_{xy} = 0 ; \tau_{yx} = \tau_{xy}$$

Conclusion :

## La matrice des contraintes est symétrique

### Conséquences : réciprocité des contraintes tangentielles ou théorème de Maxwell Betty

Soit deux facettes perpendiculaires au voisinage d'un point M : les contraintes tangentielles sur ces facettes ont des composantes sur les normales à l'arête commune qui sont égales et qui toutes deux sont dirigées vers l'arête ou s'en éloignent.



### V : contraintes et directions principales

La matrice des contraintes est symétrique et donc diagonalisable.

Il existe un repère  $R'(M, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$  tel que

$$[\sigma_{(M)}] = \begin{matrix} & \vec{C}_{(M, \vec{X})} & \vec{C}_{(M, \vec{Y})} & \vec{C}_{(M, \vec{Z})} \\ \begin{bmatrix} \sigma_X & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_Y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_Z \end{bmatrix} & \vec{X} \\ & \vec{Y} \\ & \vec{Z} \end{matrix}$$

$\sigma_X, \sigma_Y, \sigma_Z$  sont les contraintes principales (valeurs propres)

$\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}$  sont les directions principales (vecteurs propres)

Tout vecteur contrainte en M suivant une des directions principales est porté par cette direction principale : la contrainte est purement normale.

$$\vec{C}_{(M, \vec{X})} = \sigma_X \cdot \vec{X}$$

Remarque : la trace d'une matrice (somme des termes diagonaux) est un invariant

$$tr[\sigma_{(M)}] = \sigma_X + \sigma_Y + \sigma_Z = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \text{constante}$$

### Exercices :

I : Soit la matrice des contraintes (en MPa) dans le repère  $(M, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ .

$$[\sigma_{(M)}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 40 \\ 0 & 40 & 50 \end{bmatrix}$$

Calculer les contraintes principales et les directions principales.

II : Soit la matrice des contraintes (en MPa) dans le repère  $(M, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ .

$$[\sigma_{(M)}] = \begin{bmatrix} -10 & 0 & 60 \\ 0 & -10 & 20 \\ 60 & 20 & 50 \end{bmatrix}$$

Calculer les contraintes principales et les directions principales.

Solution :

I : Directions principales :  $\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}$  ; contraintes principales :  $\sigma_X, \sigma_Y, \sigma_Z$

Diagonalisons la matrice :

$$\begin{vmatrix} 0 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -10 - \lambda & 40 \\ 0 & 40 & 50 - \lambda \end{vmatrix} = 0, -\lambda. [(-10 - \lambda)(50 - \lambda) - 40^2] = 0, \\ -\lambda. [\lambda^2 - 40\lambda - 2100] = 0 \text{ d'où } \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 70, \lambda_3 = 30$$

On pose arbitrairement  $\sigma_X = 0, \sigma_Y = 70, \sigma_Z = 30$

On sait que

$$\vec{C}_{(M, \vec{X})} = [\sigma_{(M)}] \cdot \vec{X} = \sigma_X \cdot \vec{X}$$

$$\text{On pose } \vec{X} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\text{On obtient : } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 40 \\ 0 & 40 & 50 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{cases} 0 \cdot a = 0 \\ -10b + 40c = 0 \\ 40b + 50c = 0 \end{cases} ; \begin{cases} a \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

$\vec{X}$  étant unitaire, on prendra  $a=1$  et donc  $\vec{X} = \vec{x}$  (vrai pour toute valeur propre nulle)

De même :

$$\vec{C}_{(M, \vec{Y})} = [\sigma_{(M)}] \cdot \vec{Y} = \sigma_Y \cdot \vec{Y}$$

$$\text{On pose } \vec{Y} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\text{On obtient : } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 40 \\ 0 & 40 & 50 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\sigma_Y \\ b\sigma_Y \\ c\sigma_Y \end{pmatrix} ; \begin{cases} 0 \cdot a = 70a \\ -10b + 40c = 70b \\ 40b + 50c = 70c \end{cases} ; \begin{cases} a = 0 \\ b = \frac{1}{2}c \\ \text{vérifiée} \end{cases}$$

$\vec{Y}$  étant unitaire on norme le vecteur  $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}c \\ c \end{pmatrix}$ , d'où  $c = \frac{2}{\sqrt{5}}$  ou  $c = -\frac{2}{\sqrt{5}}$  (choix arbitraire entre les deux)

$$\text{Par exemple } \vec{Y} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

Et enfin :

$$\vec{Z} = \vec{x} \wedge \vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

II : par la même méthode on trouve  $\sigma_X = -10, \sigma_Y = 90, \sigma_Z = -50$

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} \\ -\frac{3}{\sqrt{10}} \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{Y} = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{35}} \\ \frac{1}{\sqrt{35}} \\ \frac{5}{\sqrt{35}} \end{pmatrix}, \vec{Z} = \begin{pmatrix} \frac{-3}{\sqrt{14}} \\ \frac{-1}{\sqrt{14}} \\ \frac{2}{\sqrt{14}} \end{pmatrix}$$

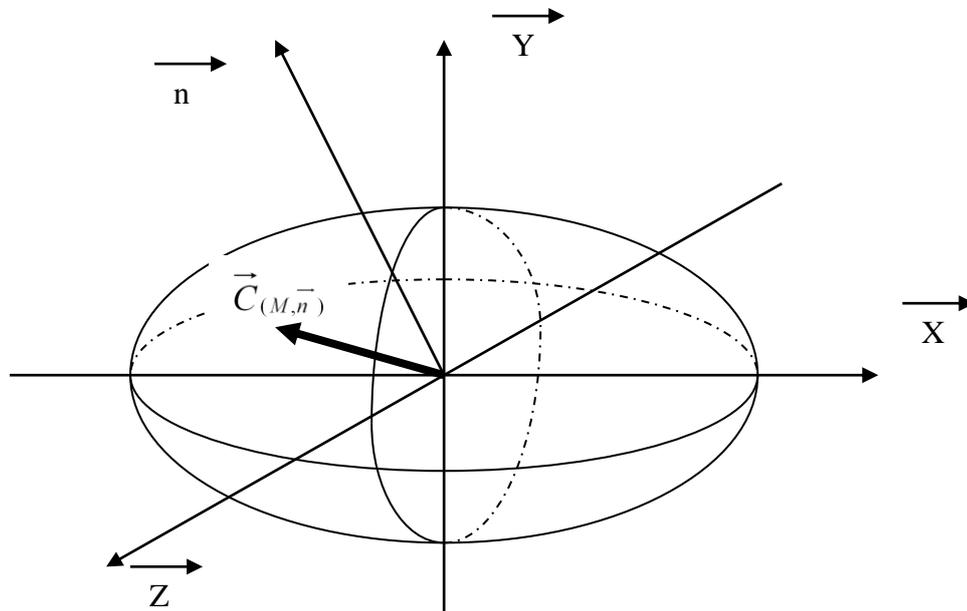
## VI : ellipsoïde de Lamé des contraintes

On cherche la surface (appelée enveloppe) décrite par l'extrémité du vecteur contrainte relatif à toutes les orientations de facette  $\vec{n}$  au point M. Dans le repère principal  $R' = (\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$

$$\vec{n} \begin{cases} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{cases}_{R'} \text{ unitaire} \quad ; \quad \vec{C}_{(M, \vec{n})} = [\sigma_{(M)}] \cdot \vec{n} = \begin{cases} \alpha \cdot \sigma_X = X \\ \beta \cdot \sigma_Y = Y \\ \gamma \cdot \sigma_Z = Z \end{cases}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \Rightarrow \frac{X^2}{\sigma_X^2} + \frac{Y^2}{\sigma_Y^2} + \frac{Z^2}{\sigma_Z^2} = 1$$

C'est un ellipsoïde d'axes  $(M\vec{X}, M\vec{Y}, M\vec{Z})$  (axes principaux) et dont les demi axes ont pour longueur  $\sigma_X, \sigma_Y, \sigma_Z$



## VII : diagrammes de Mohr

### VII 1 : définition

On a vu que le vecteur contrainte pouvait se décomposer en une contrainte normale :  $\sigma$  et une contrainte tangentielle :  $\tau$ .

D'où l'expression du vecteur contrainte **dans le repère local (repère lié à la facette)**

$$\vec{C}_{(M, \vec{n})} = \sigma \cdot \vec{n} + \tau \cdot \vec{t} = \begin{cases} \sigma \\ \tau \end{cases}_{(M, \vec{n}, \vec{t})}$$

Le diagramme de Mohr est la représentation de la contrainte sur deux axes :

L'axe  $(M\vec{n})$  qui correspond à la contrainte normale  $\sigma$

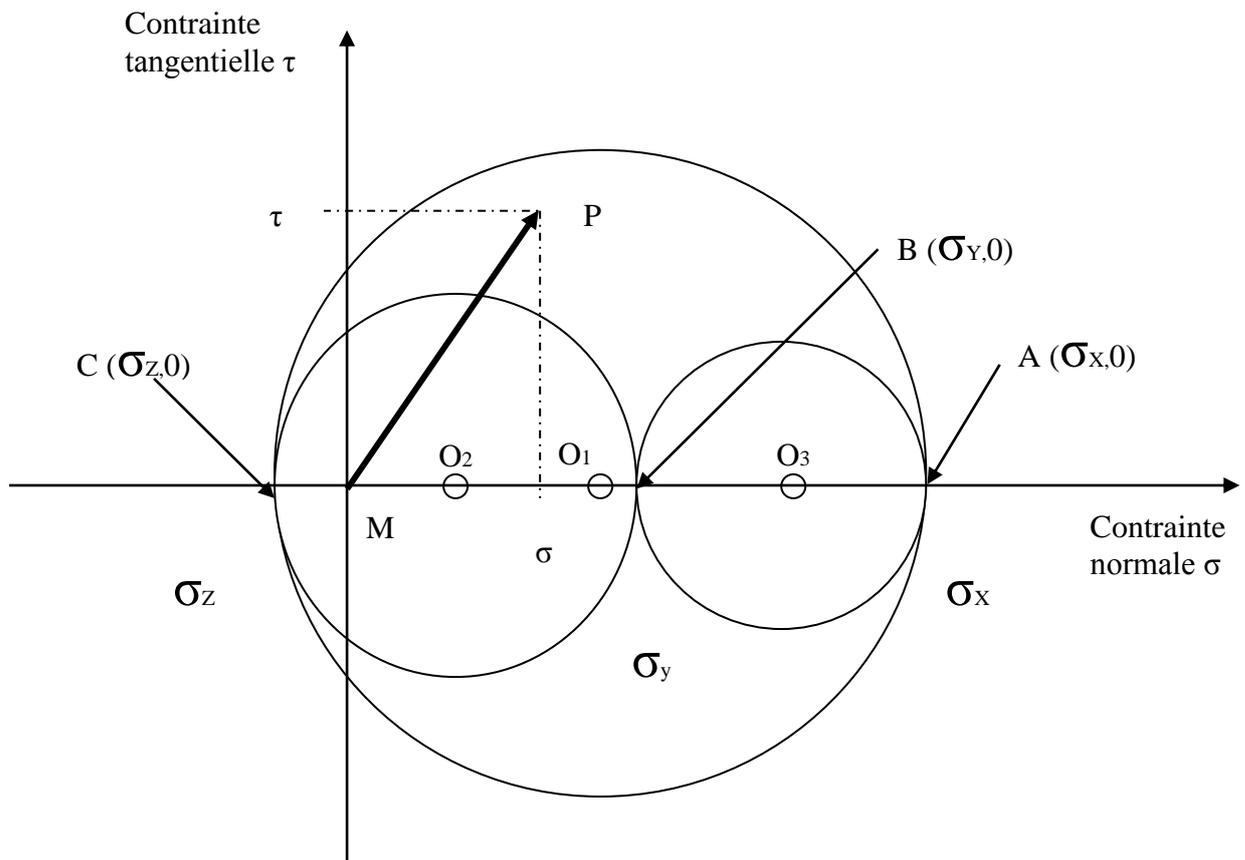
L'axe  $(M\vec{t})$  qui correspond à la contrainte tangentielle  $\tau$

On représente le lieu de l'extrémité P du vecteur contrainte  $\vec{C}_{(M,\vec{n})} = \overrightarrow{MP}$  dans le repère local  $(M, \vec{n}, \vec{t})$ .

*NB :  $\vec{n}$  et  $\vec{t}$  sont une appellation générale : ces vecteurs changent de direction en fonction de la facette considérée.*

*Hypothèse : on connaît les trois contraintes principales : par exemple  $\sigma_x > \sigma_y > \sigma_z$  on trace trois cercles (appelés tricerces de Mohr)*

centre	diamètre
$O1 (\frac{\sigma_x + \sigma_z}{2}, 0)$	$AC = \sigma_x - \sigma_z$
$O2 (\frac{\sigma_y + \sigma_z}{2}, 0)$	$BC = \sigma_y - \sigma_z$
$O3 (\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, 0)$	$AB = \sigma_x - \sigma_y$



Distance d'un point par rapport au centre du cercle  $i$  :  $d_i$  ; rayon du cercle  $i$  :  $R_i$

$d_i^2 - R_i^2 < 0$  : point à l'intérieur du cercle

$d_i^2 - R_i^2 = 0$  : point sur le cercle

$d_i^2 - R_i^2 > 0$  : point à l'extérieur du cercle

Coordonnées du point P :  $\begin{pmatrix} \sigma \\ \tau \end{pmatrix}$  dans le repère local  $(M, \vec{n}, \vec{t})$ .

Cercle de centre O3 :

$$d_3^2 - R_3^2 = O_3 P^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2$$

$$O_3 P^2 = \tau^2 + \left(\frac{\sigma_X + \sigma_Y}{2} - \sigma\right)^2; \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_X - \sigma_Y}{2}\right)^2$$

$$d_3^2 - R_3^2 = \sigma^2 + \tau^2 - \sigma \cdot (\sigma_X + \sigma_Y) + \sigma_X \cdot \sigma_Y$$

Or :

$$\vec{C}_{(M, \vec{n})} = [\sigma_{(M)}] \cdot \vec{n} = \begin{matrix} \alpha \cdot \sigma_X \\ \beta \cdot \sigma_Y \\ \gamma \cdot \sigma_Z \end{matrix}, \vec{n} \text{ unitaire: } \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

$$\sigma = \vec{C}_{(M, \vec{n})} \cdot \vec{n} = \alpha^2 \cdot \sigma_X + \beta^2 \cdot \sigma_Y + \gamma^2 \cdot \sigma_Z$$

$$\vec{C}_{(M, \vec{n})}^2 = \sigma^2 + \tau^2 = \alpha^2 \cdot \sigma_X^2 + \beta^2 \cdot \sigma_Y^2 + \gamma^2 \cdot \sigma_Z^2$$

D'où

$$d_3^2 - R_3^2 = \alpha^2 \cdot \sigma_X^2 + \beta^2 \cdot \sigma_Y^2 + \gamma^2 \cdot \sigma_Z^2 - (\alpha^2 \cdot \sigma_X + \beta^2 \cdot \sigma_Y + \gamma^2 \cdot \sigma_Z) \cdot (\sigma_X + \sigma_Y) + \sigma_X \cdot \sigma_Y$$

$$d_3^2 - R_3^2 = \gamma^2 \cdot \sigma_Z^2 + \sigma_X \cdot \sigma_Y \cdot (1 - \alpha^2 - \beta^2) - \gamma^2 \cdot \sigma_Z \cdot (\sigma_X + \sigma_Y)$$

$$d_3^2 - R_3^2 = \gamma^2 \cdot \sigma_Z^2 + \sigma_X \cdot \sigma_Y \cdot \gamma^2 - \gamma^2 \cdot \sigma_Z \cdot (\sigma_X + \sigma_Y)$$

$$d_3^2 - R_3^2 = \gamma^2 \cdot (\sigma_Z - \sigma_X) \cdot (\sigma_Z - \sigma_Y)$$

De même :

$$d_2^2 - R_2^2 = \alpha^2 \cdot (\sigma_X - \sigma_Z) \cdot (\sigma_X - \sigma_Y)$$

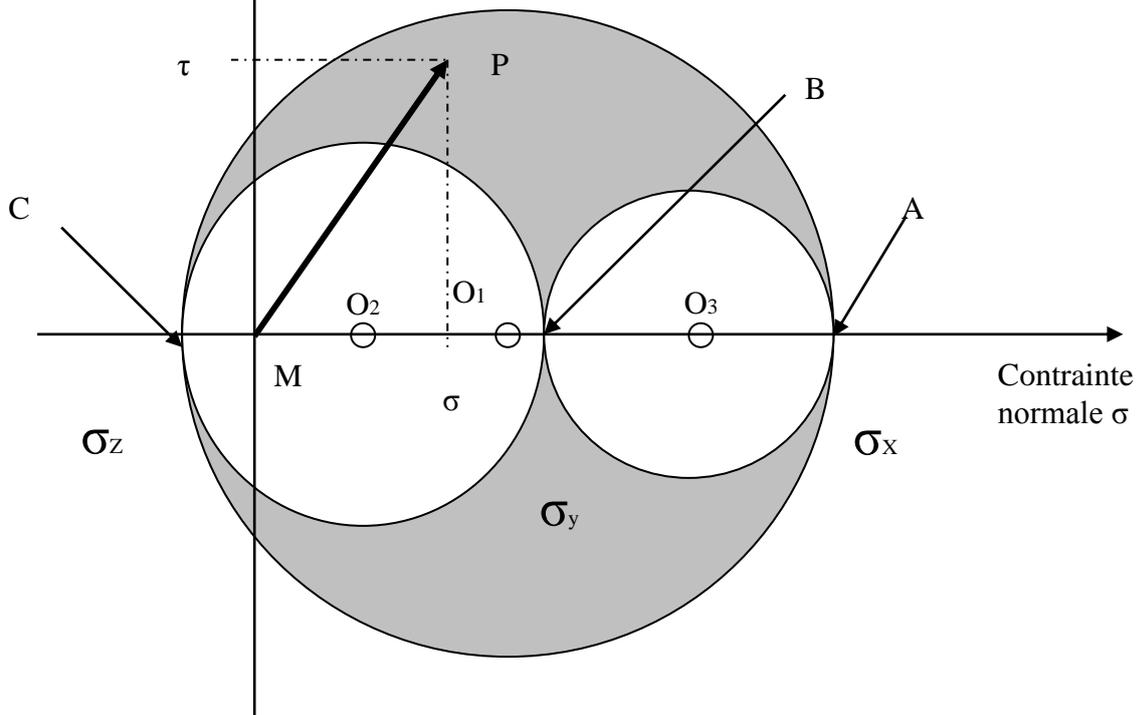
$$d_1^2 - R_1^2 = \beta^2 \cdot (\sigma_Y - \sigma_X) \cdot (\sigma_Y - \sigma_Z)$$

On multiplie les trois ensemble :

$$(d_3^2 - R_3^2) \cdot (d_2^2 - R_2^2) \cdot (d_1^2 - R_1^2) = -\alpha^2 \cdot \beta^2 \cdot \gamma^2 \cdot (\sigma_Z - \sigma_X)^2 \cdot (\sigma_Z - \sigma_Y)^2 \cdot (\sigma_X - \sigma_Y)^2 \leq 0$$

Il y a donc trois possibilités :

- Soit le point P est à l'intérieur des trois cercles : impossible car deux cercles sont tangents
- **Soit le point P est à l'intérieur d'un cercle et à l'extérieur des deux autres (surface grisée).**
- **Soit le point P est sur un cercle (contour de la surface grisée)**

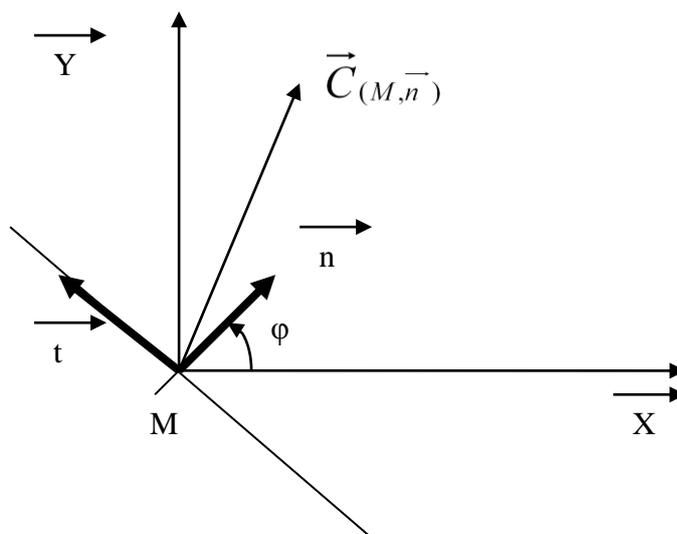


VII 2 : propriétés des cercles de Mohr

Le plan principal est défini par deux axes principaux. On s'intéresse aux contraintes sur les facettes dont la normale appartient au plan principal.

Par exemple :

$$\vec{n} \in (M, \vec{X}, \vec{Y}); \quad \vec{n} = \begin{matrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{matrix} \Big|_{(M, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} \gamma = 0$$



remarque :  $(M \vec{Z})$  appartient au plan de la facette.

$$\text{Donc } d_3^2 - R_3^2 = \gamma^2 \cdot (\sigma_z - \sigma_x) \cdot (\sigma_z - \sigma_y) = 0$$

Le point P (extrémité du vecteur contrainte dans le plan de Mohr) appartient au cercle de diamètre [AB].

$$\vec{C}_{(M,\vec{n})} = [\sigma_{(M)}] \cdot \vec{n} = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}_{(M,\vec{x},\vec{y},\vec{z})} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot \sigma_x \\ \beta \cdot \sigma_y \\ 0 \end{pmatrix}_{(M,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} \alpha = \cos \varphi \\ \beta = \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}_{(M,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}; \quad \vec{t} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}_{(M,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

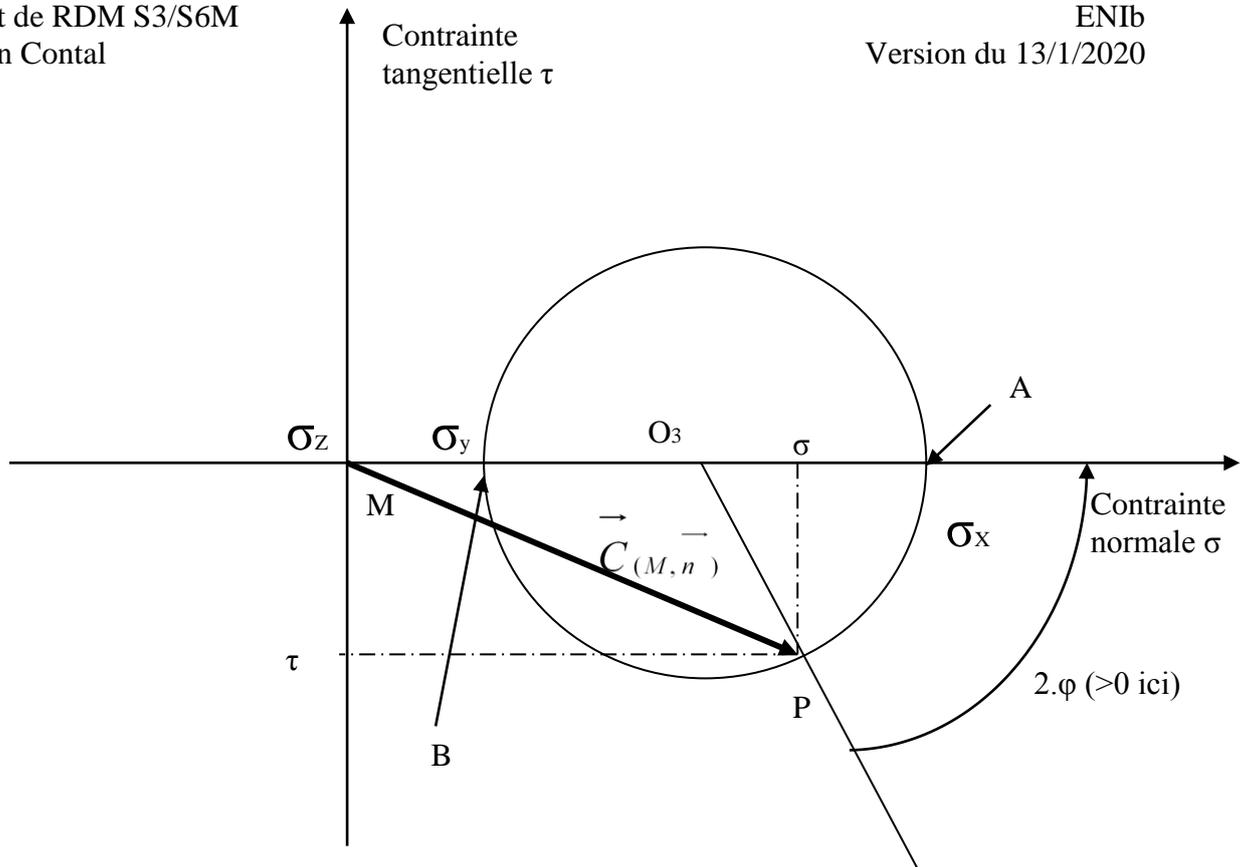
$$\begin{cases} \sigma = \vec{C}_{(M,\vec{n})} \cdot \vec{n} = \cos^2 \varphi \cdot \sigma_x + \sin^2 \varphi \cdot \sigma_y = \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \sigma_x + \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} \sigma_y \\ \tau = \vec{C}_{(M,\vec{n})} \cdot \vec{t} = -\cos \varphi \cdot \sin \varphi \cdot \sigma_x + \cos \varphi \cdot \sin \varphi \cdot \sigma_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\varphi \\ \tau = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\varphi \end{cases}$$

Remarque :

$$\begin{cases} \sigma - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\varphi \\ -\tau = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\varphi \end{cases}$$

C'est l'équation d'un cercle de rayon  $\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}$  et de centre  $(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}; 0)$ .



$$2 \cdot \varphi = (\overrightarrow{O_3 P}; \overrightarrow{O_3 A})$$

### VII 3 : cas particulier de champs de contraintes

*A : état plan de contraintes 'CP'*

Définition : un solide est dans un état plan de contraintes (plan perpendiculaire à  $(M \vec{Z})$ ) lorsqu'il existe un repère  $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{Z})$  lié à ce solide tel que la matrice des contraintes soit de la forme :

$$[\sigma_{(M)}] = \begin{bmatrix} \vec{C}_{(M, \vec{x})} & \vec{C}_{(M, \vec{y})} & \vec{C}_{(M, \vec{Z})} \\ \sigma_x & \tau_{yx} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{Z} \end{matrix} ; \sigma_x, \tau_{yx}, \sigma_y \text{ sont indépendants de } z$$

Conséquences :

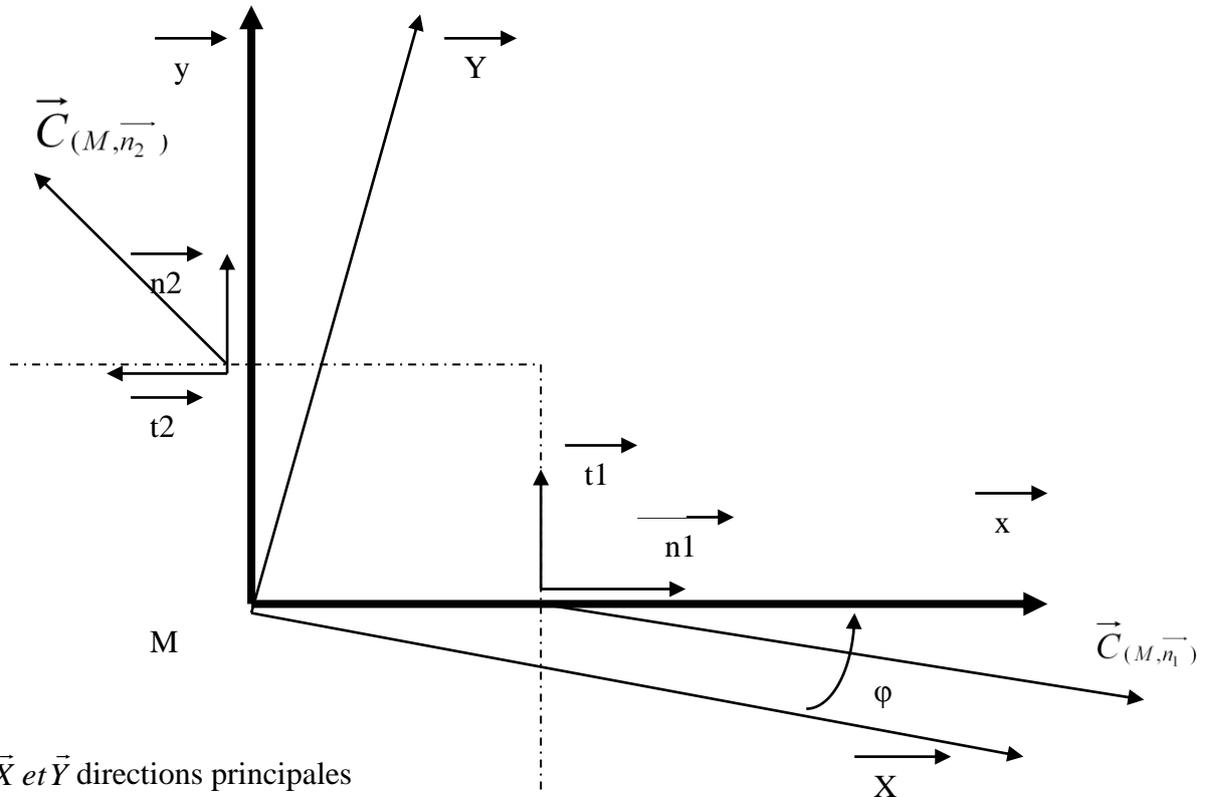
Quelque soit le point de la facette considérée,  $\vec{C}_{(M, \vec{n})} \in (M, \vec{x}, \vec{y})$

Pour la facette de normale  $\vec{Z}$ ,  $\vec{C}_{(M, \vec{Z})} = \vec{0}$

Le plan  $(M, \vec{x}, \vec{y})$  est principal : il contient les deux axes principaux  $\vec{X}$  et  $\vec{Y}$

*B : exemple*

Déterminer les contraintes principales et les directions principales à partir de la représentation de Mohr, connaissant les contraintes sur deux facettes perpendiculaires.



$\vec{X}$  et  $\vec{Y}$  directions principales  
repères :

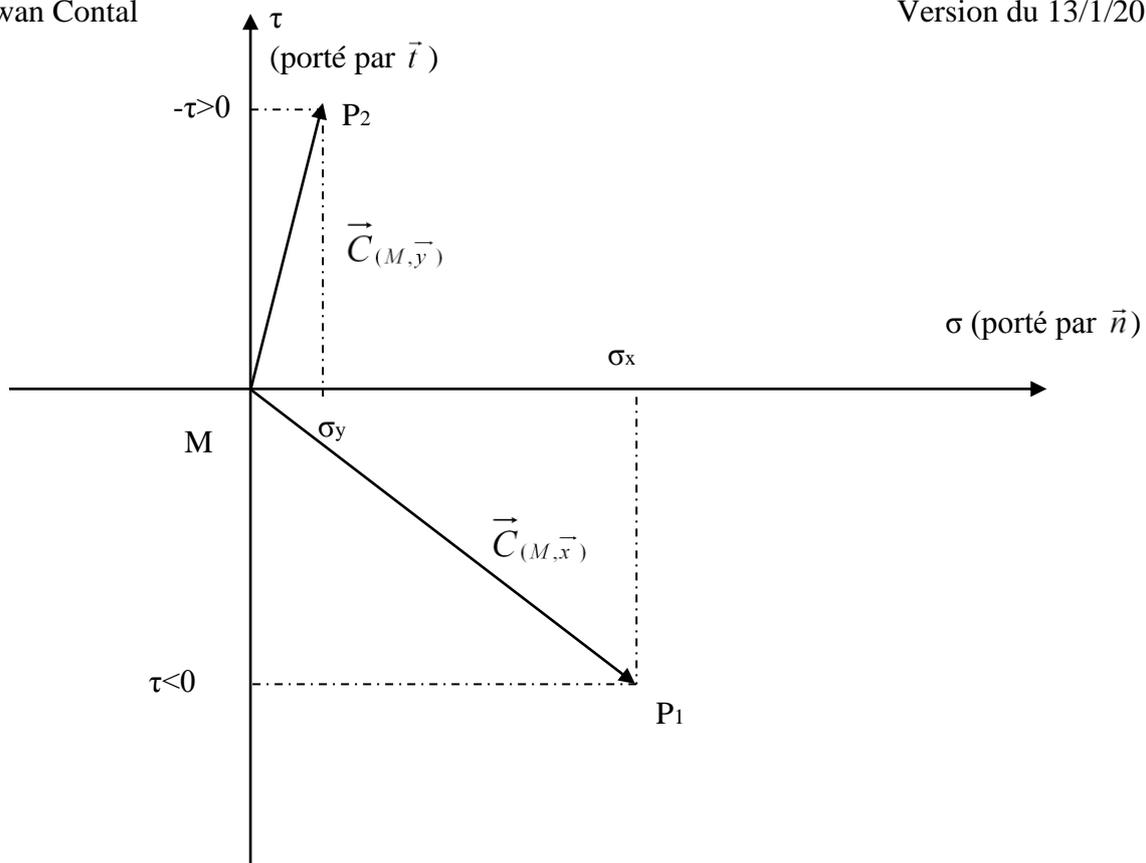
$(M, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  repère global,  $(M, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$  repère principal,  $(M, \vec{n}_1, \vec{t}_1, \vec{Z})$  et  $(M, \vec{n}_2, \vec{t}_2, \vec{Z})$  repères locaux

Pour la représentation de Mohr, on doit exprimer les vecteurs contraintes dans les repères locaux.

Dans notre exemple, au vu de  $\vec{C}_{(M, \vec{n}_1)}$  et  $\vec{C}_{(M, \vec{n}_2)}$ ,  $\sigma_x > 0$ ,  $\sigma_y > 0$ ,  $\tau < 0$

$$\vec{C}_{(M, \vec{x})} \begin{vmatrix} \sigma_x > 0 \\ \tau < 0 \\ 0 \end{vmatrix}_{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}}; \quad \vec{n}_1 \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}_{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}}; \quad \vec{t}_1 \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}_{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}}; \quad \vec{MP}_1 = \vec{C}_{(M, \vec{x})} \begin{vmatrix} \sigma_x \\ \tau \\ 0 \end{vmatrix}_{\vec{n}_1, \vec{t}_1, \vec{z}}$$

$$\vec{C}_{(M, \vec{y})} \begin{vmatrix} \tau < 0 \\ \sigma_y > 0 \\ 0 \end{vmatrix}_{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}}; \quad \vec{n}_2 \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}_{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}}; \quad \vec{t}_2 \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}_{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}}; \quad \vec{MP}_2 = \vec{C}_{(M, \vec{y})} \begin{vmatrix} \sigma_y \\ -\tau \\ 0 \end{vmatrix}_{\vec{n}_2, \vec{t}_2, \vec{z}}$$



P1 et P2 appartiennent au cercle de Mohr de centre  $O_3$ , de rayon  $[AB]/2$ , avec  $O_3 \in (M, \vec{n})$

$$\left( \vec{O_3 n}, \vec{O_3 P_1} \right) = 2 \cdot \varphi; \text{ (remarque, si } \varphi \rightarrow 0, \vec{X} \rightarrow \vec{n}_1, \sigma_x \rightarrow \sigma_x)$$

$$\left( \vec{O_3 n}, \vec{O_3 P_2} \right) = \left( \frac{\pi}{2} + \varphi \right) \cdot 2$$

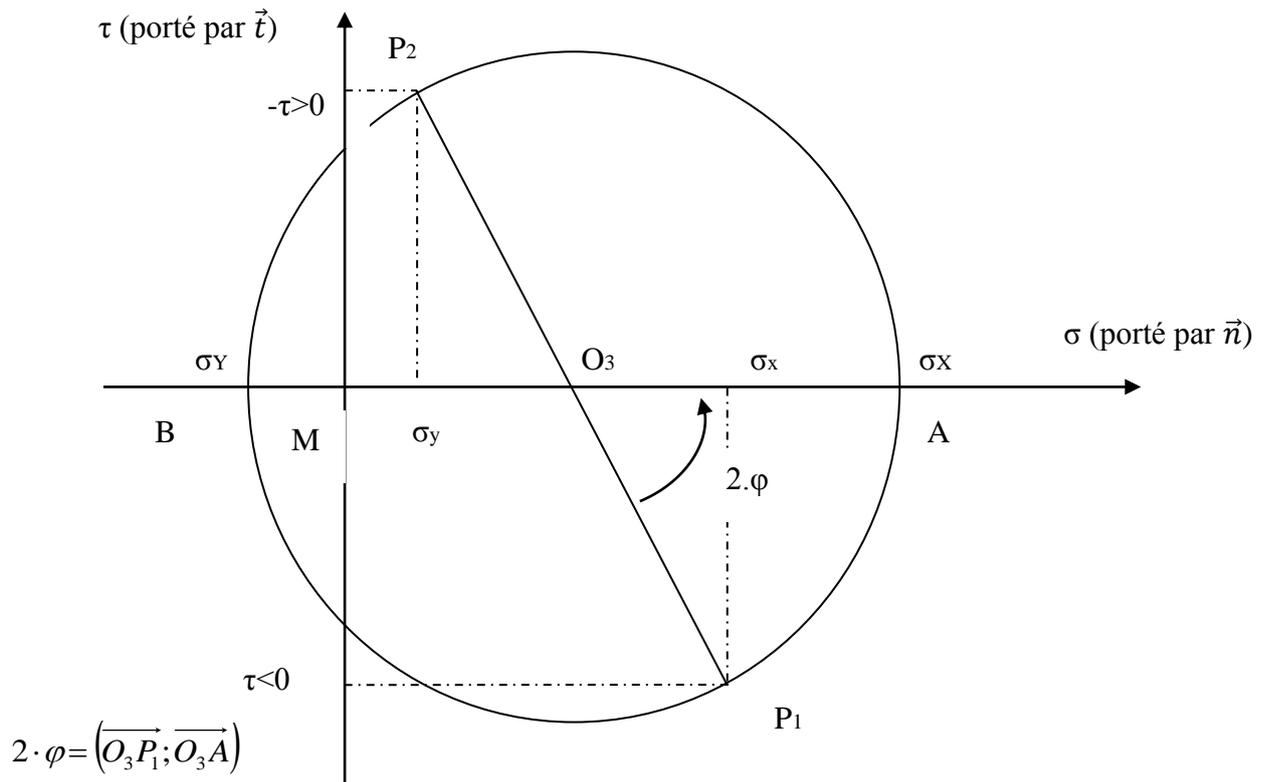
car les deux directions principales  $\vec{X}$  et  $\vec{Y}$  sont orthogonales.

Donc  $\left( \vec{O_3 P_1}, \vec{O_3 P_2} \right) = \pi$ ,  $[P_1 P_2]$  est le diamètre du cercle, centre  $O_3$  : on en déduit  $\sigma_x, \sigma_y$  et  $\varphi$

$$\sigma_x = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau^2}$$

$$\sigma_y = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau^2}$$

$$\varphi = -\frac{1}{2} \arctan \left( \frac{2\tau}{\sigma_x - \sigma_y} \right)$$



Remarque : en diagonalisant la matrice :

$$\det([\sigma_{(M)}] - \lambda \cdot [Id]) = 0 = \begin{vmatrix} \sigma_x - \lambda & \tau & 0 \\ \tau & \sigma_y - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda \cdot [(\sigma_x - \lambda) \cdot (\sigma_y - \lambda) - \tau^2]$$

$$\lambda_1 = 0 = \sigma_z$$

$$\lambda^2 - (\sigma_x + \sigma_y) \cdot \lambda + \sigma_x \cdot \sigma_y - \tau^2 = 0$$

$$\Delta = (\sigma_x + \sigma_y)^2 - 4 \cdot (\sigma_x \cdot \sigma_y - \tau^2) = (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \cdot \tau^2 > 0$$

$$\lambda_2 = \frac{(\sigma_x + \sigma_y) + \sqrt{\Delta}}{2} = \sigma_x$$

$$\lambda_3 = \frac{(\sigma_x + \sigma_y) - \sqrt{\Delta}}{2} = \sigma_y$$

Il ne reste plus qu'à déterminer les vecteurs propres...

### Exercice :

Soit la matrice des contraintes (en MPa) dans le repère  $(M, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ .

$$[\sigma_{(M)}] = \begin{bmatrix} -20 & 30 & 0 \\ 30 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

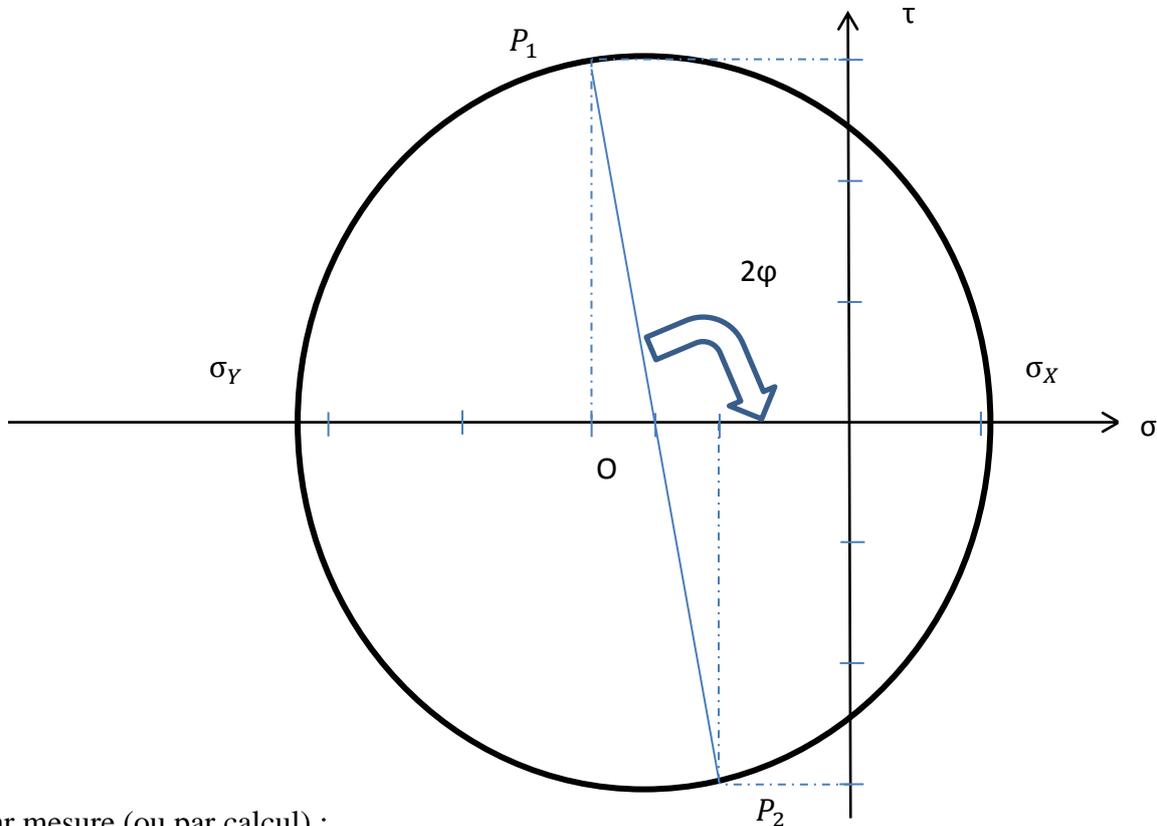
Déterminer les contraintes principales et les directions principales par la construction de Mohr.

Solution :

Il faut exprimer les vecteurs contrainte dans les repères liés aux facettes (repères locaux)

$$\vec{C}_{(M,\vec{x})} = \begin{pmatrix} -20 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix}_{(M,\vec{x},\vec{y},\vec{z})} = \begin{pmatrix} -20 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix}_{(M,\vec{n}_1,\vec{t}_1,\vec{z})}, \quad \vec{C}_{(M,\vec{y})} = \begin{pmatrix} 30 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix}_{(M,\vec{x},\vec{y},\vec{z})} = \begin{pmatrix} -10 \\ -30 \\ 0 \end{pmatrix}_{(M,\vec{n}_2,\vec{t}_2,\vec{z})}$$

$$\vec{C}_{(M,\vec{x})} = \overrightarrow{MP_1}, \quad \vec{C}_{(M,\vec{y})} = \overrightarrow{MP_2}$$



Par mesure (ou par calcul) :

$$\sigma_X = 11 \text{ MPa}; \sigma_Y = -43 \text{ MPa}; 2\phi = -108^\circ$$

**Exercice** : soit la matrice des contraintes (en MPa) dans le repère  $(M, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ .

$$[\sigma_{(M)}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 40 \\ 0 & 40 & 50 \end{bmatrix}$$

Déterminer les contraintes principales et les directions principales par la construction de Mohr. Vérifier par le calcul.

Solution :

$$\sigma_Y = 70 \text{ MPa}; \sigma_Z = -30 \text{ MPa}; 2\phi = -126.8^\circ$$

**Exercice** : soit un état plan de contraintes défini par les contraintes qui agissent sur deux faces élémentaires perpendiculaires de normales  $\vec{n}_1$  et  $\vec{n}_2$  :

$$\sigma_1 = 50 \text{ MPa}, \tau_1 = -10\sqrt{3} \text{ MPa}, \sigma_2 = 30 \text{ MPa}.$$

Déterminer les contraintes principales  $\sigma_X$  et  $\sigma_Y$  ainsi que les directions principales.

*Solution :*

$$\vec{C}_{(M, \vec{n}_1)} = \begin{pmatrix} 50 \\ -10\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}_{(M, \vec{n}_1, \vec{t}_1, \vec{z})}, \quad \vec{C}_{(M, \vec{n}_2)} = \begin{pmatrix} 30 \\ 10\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}_{(M, \vec{n}_2, \vec{t}_2, \vec{z})}$$

$\sigma_X = 60 \text{ MPa}; \sigma_Y = 20 \text{ MPa}; 2\phi = 60^\circ$