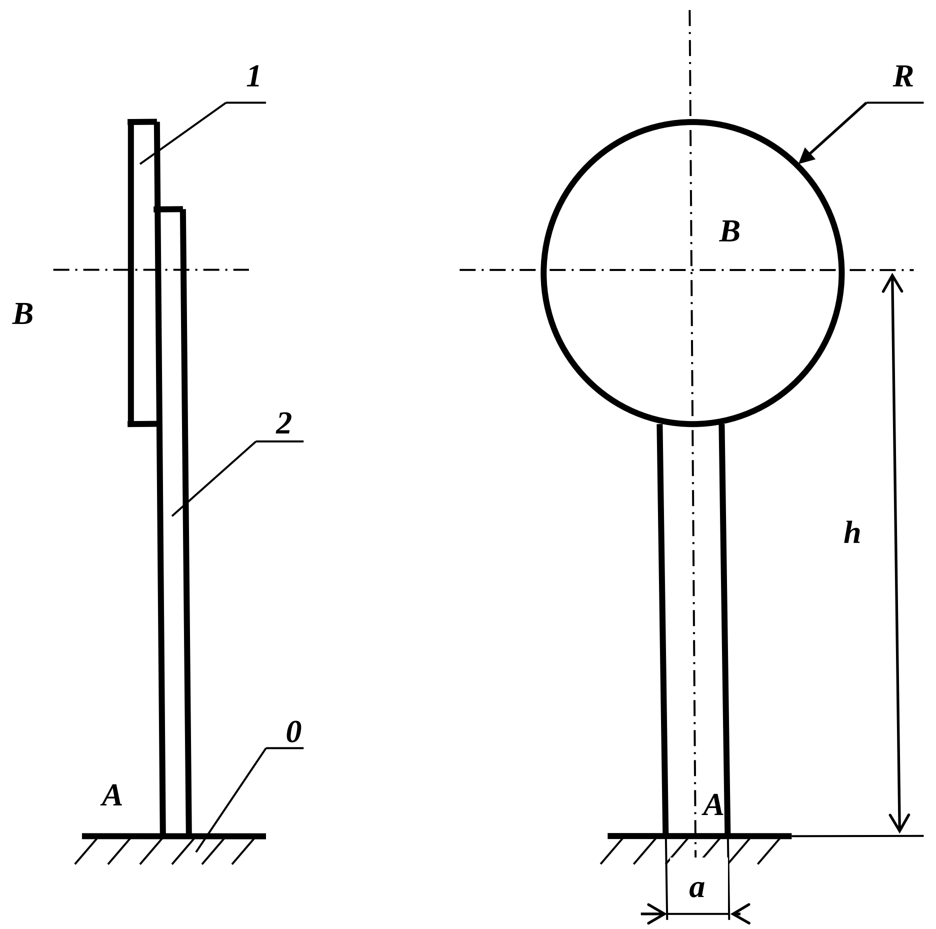
Exercice 1:

Le panneau indicateur proposé sur la figure se compose d'une partie panneau **1** et d'un poteau de soutien **2** scellé en ***A*** dans le sol **0**. Le vent exerce une pression uniforme ***p*** sur ce panneau indicateur.

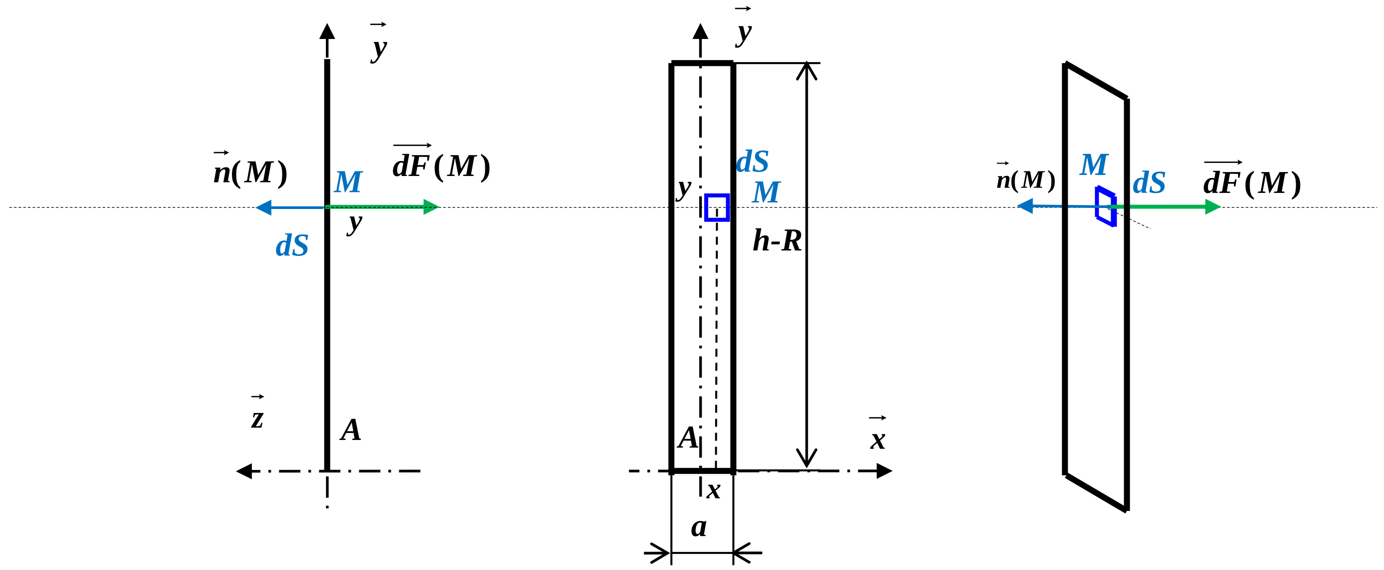
1.1- Déterminer le torseur $\mathcal{T}_{\mathbf{v/2}}$ associé aux actions du vent sur le poteau **2**.
On fera l'approximation d'une surface rectangulaire.
Montrer que ce torseur est un glisseur.
Déterminer le support de la résultante, en déduire le centre de poussée.

1.2- Déterminer le torseur $\mathcal{T}_{\mathbf{v/1}}$ associé aux actions du vent sur le panneau **1**.
Montrer que ce torseur est un glisseur.
Déterminer le support de la résultante, en déduire le centre de poussée.

1.3- En déduire les éléments de réduction du torseur $\mathcal{T}_{\mathbf{v/p.ind.}}$ associé aux actions du vent sur le panneau indicateur.
Montrer que ce torseur est un glisseur.
Déterminer le support de la résultante, en déduire le centre de poussée.



1.1- Déterminer le torseur $\mathcal{T}_{v/2}$ associé aux actions du vent sur le poteau **2**.
On fera l'approximation d'une surface rectangulaire.
Montrer que ce torseur est un glisseur.
Déterminer le support de la résultante, en déduire le centre de poussée.



MODELE LOCAL

L'action du vent sur la facette (surface élémentaire) de centre M, d'aire dS et de normale extérieure $\vec{n}(M)$ est modélisée par le glisseur:

$$\mathcal{G}_{vent/M} = {}_M\left\{ \overrightarrow{dF}(M) \quad \vec{0} \right\} = {}_A\left\{ \overrightarrow{dF}(M) \quad \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{dF}(M) \right\} \quad \text{avec} \quad \overrightarrow{dF}(M) = -\, p(M)\, dS\, \vec{n}(M)$$

$$\begin{cases} p(M) = p \quad \forall M \in S_2 \\ dS = dx\, dy \quad \forall M(x,y,0) \in S_2 : \begin{cases} -a/2 \le x \le a/2 \\ 0 \le y \le h-R \end{cases} \\ \vec{n}(M) = \vec{z} \quad \forall M \in S_2 \\ \overrightarrow{AM} = x\,\vec{x} + y\,\vec{y} \end{cases}$$

Ainsi $\quad \overrightarrow{dF}(M) = -\, p(M)\, dS\, \vec{z}$

MODELE GLOBAL

Globalement l'action du vent sur la surface S_2 du poteau 2 est modélisée par le torseur:

$$\mathcal{T}_{v/2} = {}_A\left\{ \vec{R}_{v/2} \quad \overrightarrow{M}(A, v/2) \right\}$$

avec

$$\begin{cases} \vec{R}_{v/2} = \displaystyle\int_{M \in S_2} \overrightarrow{dF}(M) = \int_{M \in S_2} (-\, p(M)\, dS\, \vec{z}) \\ \overrightarrow{M}(A, v/2) = \displaystyle\int_{M \in S_2} \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{dF}(M) = \int_{M \in S_2} \overrightarrow{AM} \wedge \left(-\, p(M)\, dS\, \vec{z}\right) \end{cases}$$

<u>Calcul de la résultante</u>

$$\vec{R}_{v/2} = \int_{M\in S_2} \overrightarrow{dF}(M) = \int_{M\in S_2} (-\ p(M)\ dS\ \vec{z}) = \left(\int_{M\in S_2} (-\ p(M)\ dS\ ) \right) \vec{z} = Z_{v/2}\ \ \vec{z}$$

$$Z_{v/2} = \int_{M\in S_2} (-\ p(M)\ dS\ ) = \int_{M\in S_2} (-\ p\ dS\ ) = -p \left(\int_{M\in S_2} dS \right) = -p\ \mathcal{A}_2 = -p\ a(h-R)$$

<u>Calcul du moment</u>

$$\overrightarrow{M}(A, v/2) = \int_{M\in S_2} \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{dF}(M) = \int_{M\in S_2} \overrightarrow{AM} \wedge \left(-\ p(M)\ dS\ \vec{z}\ \right)$$

$$= -p \int_{M\in S_2} \left(\overrightarrow{AM}\ dS\right) \wedge \vec{z} = -p \left(\int_{M\in S_2} \overrightarrow{AM}\ dS \right) \wedge \vec{z}$$

***<u>Rappel :</u>* le centre de surface I d'une surface S d'aire $\mathcal{A}$ est défini par:** $\mathcal{A}\ \overrightarrow{AI} = \int_{M\in S} \overrightarrow{AM}\, dS$

$$\overrightarrow{M}(A, v/2) = -p \left(\int_{M\in S_2} \overrightarrow{AM}\ dS \right) \wedge \vec{z} = -p\left(\ \mathcal{A}_2\ \overrightarrow{AI_2}\right) \wedge \vec{z} = \overrightarrow{AI_2} \wedge \left(-\ p\ \mathcal{A}_2\ \vec{z}\right)$$

$$\overrightarrow{M}(A, v/2) = \overrightarrow{AI_2} \wedge \left(-\ p\ \mathcal{A}_2\ \vec{z}\right) = \overrightarrow{AI_2} \wedge \vec{R}_{v/2}$$

Ainsi $\mathcal{T}_{v/2} = {}_A\left\{ \vec{R}_{v/2} \quad \overrightarrow{M}(A, v/2) \right\} = {}_A\left\{ \vec{R}_{v/2} \quad \overrightarrow{AI_2} \wedge \vec{R}_{v/2} \right\}$

avec $\vec{R}_{v/2} = Z_{v/2}\ \ \vec{z} \qquad Z_{v/2} = -p\ \mathcal{A}_2 = -p\ a(h-R)$

Montrons que le torseur $\mathcal{T}_{v/2}$ est un glisseur

Calculons l'invariant scalaire: $\lambda_{v2} = \vec{R}_{v/2} \cdot \overrightarrow{M}(A, v/2) = \vec{R}_{v/2} \cdot (\overrightarrow{AI_2} \wedge \vec{R}_{v/2}) = 0$

Comme $\begin{cases} \vec{R}_{v/2} \neq \vec{0} \\ \text{et} \\ \lambda_{v2} = 0 \end{cases}$ le torseur $\mathcal{T}_{v/2}$ est un glisseur

Déterminons l'axe central (Δ_{v2}) de ce glisseur (support de la résultante)

Pas du glisseur: $k_{v2} = \dfrac{\lambda_{v2}}{\left\|\vec{R}_{v/2}\right\|^2} = 0$

En tout point I de l'axe central (Δ_{v2}) $\overrightarrow{M}(I, v/2) = k_{v2}\vec{R}_{v/2} = \vec{0}$

D'après la relation sur les moments $\overrightarrow{M}(A, v/2) = \overrightarrow{M}(I, v/2) + \overrightarrow{AI} \wedge \vec{R}_{v/2}$

Nous avons obtenu $\overrightarrow{M}(A, v/2) = \overrightarrow{AI_2} \wedge \vec{R}_{v/2}$

Ainsi il vient $\overrightarrow{AI_2} \wedge \vec{R}_{v/2} = \overrightarrow{AI} \wedge \vec{R}_{v/2}$ soit $\overrightarrow{AI_2} \wedge \vec{R}_{v/2} - \overrightarrow{AI} \wedge \vec{R}_{v/2} = \vec{0}$

Comme $\overrightarrow{AI_2} \wedge \vec{R}_{v/2} - \overrightarrow{AI} \wedge \vec{R}_{v/2} = (\overrightarrow{AI_2} - \overrightarrow{AI}) \wedge \vec{R}_{v/2} = \overrightarrow{I\,I_2} \wedge \vec{R}_{v/2}$

Nous obtenons $\overrightarrow{I\,I_2} \wedge \vec{R}_{v/2} = \vec{0}$

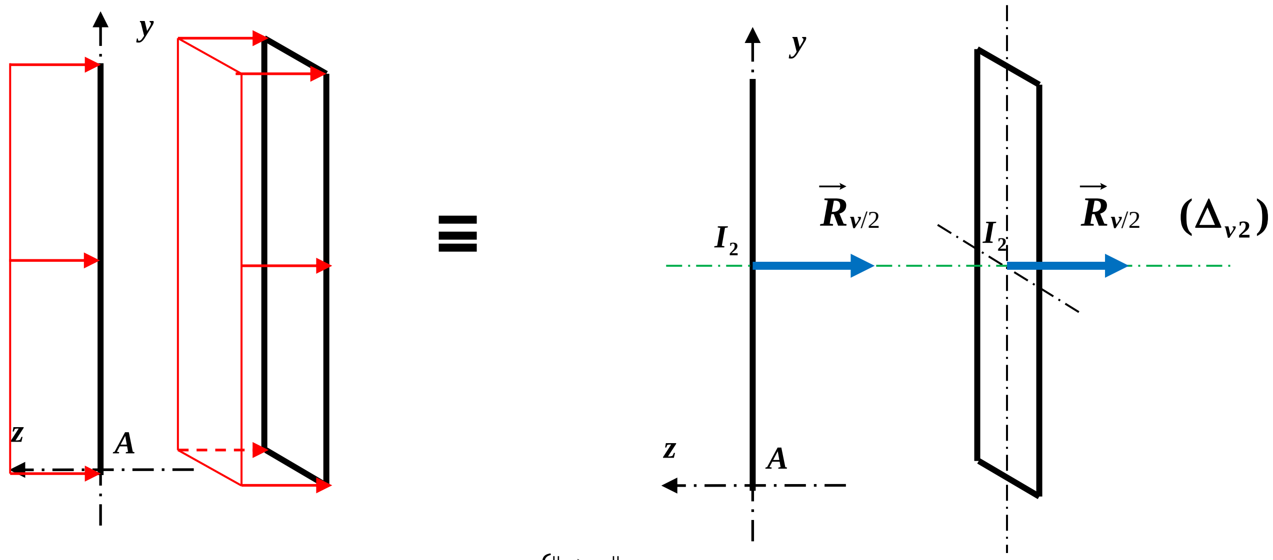
puisque $\vec{R}_{v/2} \neq \vec{0}$ $\begin{cases} \text{soit } \overrightarrow{I\,I_2} = \vec{0} \\ \text{soit } \overrightarrow{I\,I_2} \text{ colinéaire à } \vec{R}_{v/2} \end{cases}$ ainsi $(\Delta_{v2}) = (I_2, \vec{R}_{v/2})$

$\mathcal{G}_{v/2} =_I \left\{ \vec{R}_{v/2} \quad \vec{0} \right\}$ quelque soit le point I de l'axe central $(\Delta_{v2}) = (I_2, \vec{R}_{v/2})$

L'axe central est appelé ***support de la résultante***

Et en particulier $\mathcal{G}_{v/2} =_{I_2} \left\{ \vec{R}_{v/2} \quad \vec{0} \right\}$ I_2 étant le centre de surface de S_2

Représentation du glisseur: $\mathcal{G}_{v/2} = {}_{I_2}\left\{ \vec{R}_{v/2} \quad \vec{0} \right\}$



$$\mathcal{G}_{v/2} = {}_{I_2}\left\{ \vec{R}_{v/2} \quad \vec{0} \right\} \qquad \begin{cases} \left\| \vec{R}_{v/2} \right\| = p\ \mathcal{A}_2 \\ I_2 \text{ centre de surface de la surface } S_2 \\ \mathcal{A}_2 \text{ aire de la surface } S_2 \end{cases}$$

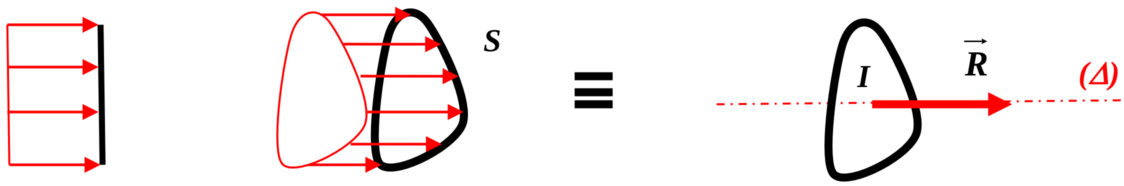
$$(\Delta_{v2}) = (I_2, \vec{R}_{v/2}) = (I_2, \vec{z})$$

$$\vec{R}_{v/2} = -p\ \mathcal{A}_2\, \vec{z} = -p\ a(h-R)\vec{z}$$

On généralise ce résultat

Propriété 1:

Lorsqu'une **surface plane** ***S*** est soumise à une **pression uniforme** ***p***, nous avons:

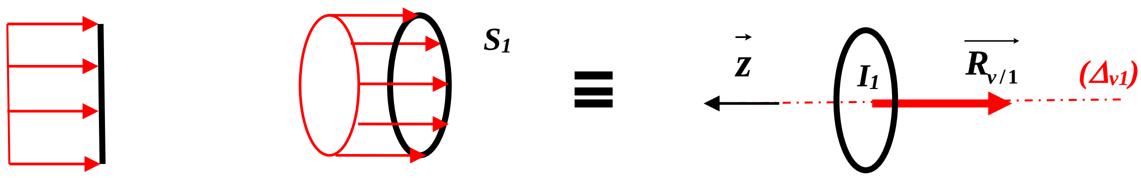


$$\mathcal{G} = {}_{I}\left\{ \vec{R} \quad \vec{0} \right\} \qquad \begin{cases} \left\| \vec{R} \right\| = p\ \mathcal{A} \\ I \text{ centre de surface de la surface } S \\ \mathcal{A} \text{ aire de la surface } S \end{cases}$$

1.2- Déterminer le torseur $\mathcal{T}_{v/1}$ associé aux actions du vent sur le panneau **1**.
Montrer que ce torseur est un glisseur.
Déterminer le support de la résultante, en déduire le centre de poussée.

Nous utilisons la propriété précédente.

Comme la **surface plane** S_1 est soumise à une **pression uniforme** p, nous avons:



$$\mathcal{T}_{v/1} = {}_{I_1}\left\{ \vec{R}_{v/1} \quad \vec{0} \right\} \qquad \begin{cases} \left\|\vec{R}_{v/1}\right\| = p\ \mathcal{A}_1 = p\ \pi\ R^2 \\ I_1 \text{ centre de surface de la surface } S_1 \\ \mathcal{A}_1 \text{ aire de la surface } S_1 \end{cases}$$

$$\vec{R}_{v/1} = -p\ \mathcal{A}_1\ \vec{z} = -p\ \pi\ R^2\ \vec{z}$$

$$(\Delta_{v1}) = (I_1, \vec{R}_{v/1}) = (I_1, \vec{z})$$

1.3- En déduire les éléments de réduction du torseur $\mathcal{T}_{\mathbf{v/p.ind.}}$ associé aux actions du vent sur le panneau indicateur.

Montrer que ce torseur est un glisseur.

Déterminer le support de la résultante, en déduire le centre de poussée.

<u>Première méthode:</u> $\mathcal{T}_{v/p.ind.} = \mathcal{G}_{v/1} + \mathcal{G}_{v/2}$

Eléments de réduction du torseur au point *A* : $\mathcal{T}_{v/p.ind.} = {}_A\left\{ \overrightarrow{R}_{v/p.ind.} \quad \overrightarrow{M}(A, v/p.ind.) \right\}$

$\Rightarrow$ ***résultante :*** $\overrightarrow{R}_{v/p.ind.} = \overrightarrow{R}_{v/1} + \overrightarrow{R}_{v/2}$

$\Rightarrow$ ***moment au point A :*** $\overrightarrow{M}(A, v/p.ind.) = \overrightarrow{M}(A, v/1) + \overrightarrow{M}(A, v/2)$

même point A

- $\overrightarrow{M}(A, v/1) = \overrightarrow{M}(I_1, v/1) + \overrightarrow{AI_1} \wedge \overrightarrow{R}_{v/1} =$
- $\overrightarrow{M}(A, v/2) = \overrightarrow{M}(I_2, v/2) + \overrightarrow{AI_2} \wedge \overrightarrow{R}_{v/2} =$

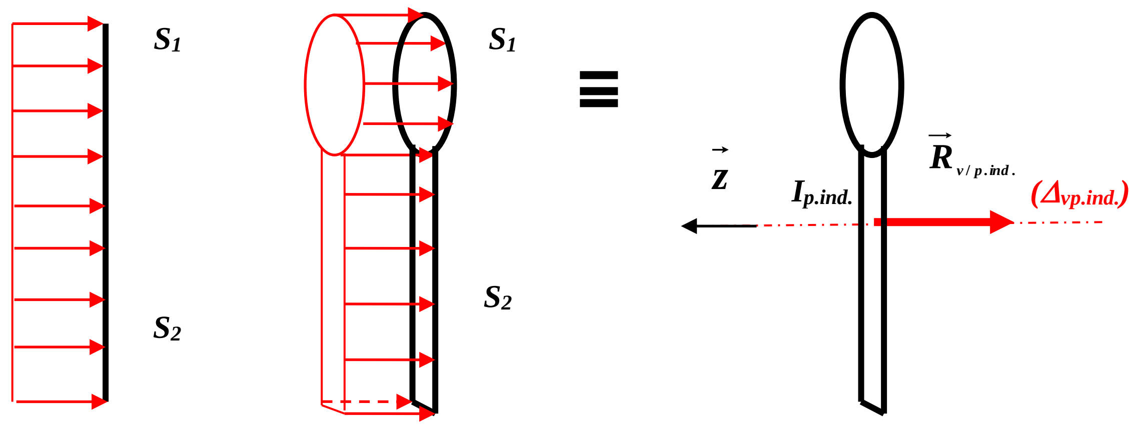
$$\mathcal{T}_{v/p.ind.} = {}_A\left\{ \overrightarrow{R}_{v/p.ind.} \quad \overrightarrow{M}(A, v/p.ind.) \right\}$$

Nous devons montrer que ce torseur est un glisseur et déterminer le support de la résultante, en déduire le centre de poussée.

Les calculs sont longs, aussi nous utiliserons une autre méthode (voir page suivante)

Deuxième méthode:

Comme la **surface plane** ***S* = *S₁* *U S₂*** est soumise à une **pression uniforme** ***p***, nous avons:



$$\mathcal{G}_{v/p.ind.} = {}_{I_{p.ind.}}\left\{\vec{R}_{v/p.ind.} \quad \vec{0}\right\} \qquad \begin{cases} \left\|\vec{R}_{v/p.ind.}\right\| = p\,\mathcal{A}_{p.ind} = p\,\mathcal{A}_1 + p\,\mathcal{A}_2 = p\,[\pi\,R^2 + a(h-R)] \\ I_{p.ind.} \text{ centre de surface de la surface } S_{p.ind.} \\ \mathcal{A}_{p.ind.} \text{ aire de la surface } S_{p.ind.} \end{cases}$$

$$\vec{R}_{v/p.ind.} = -p\,\mathcal{A}_{vp.ind.}\,\vec{z} = -p\,[\pi\,R^2 + a(h-R)]\vec{z}$$

$$(\Delta_{vp.ind.}) = (I_{p.ind.}, \vec{R}_{v/p.ind.}) = (I_{p.ind.}, \vec{z})$$

$$I_{p.ind.} \text{ est le barycentre des points pondérés } (I_1, \mathcal{A}_1) \text{ et } (I_2, \mathcal{A}_2)$$

$$\overrightarrow{AI_{p.ind.}} = \frac{\mathcal{A}_1\,\overrightarrow{AI_1} + \mathcal{A}_2\,\overrightarrow{AI_2}}{\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2}$$