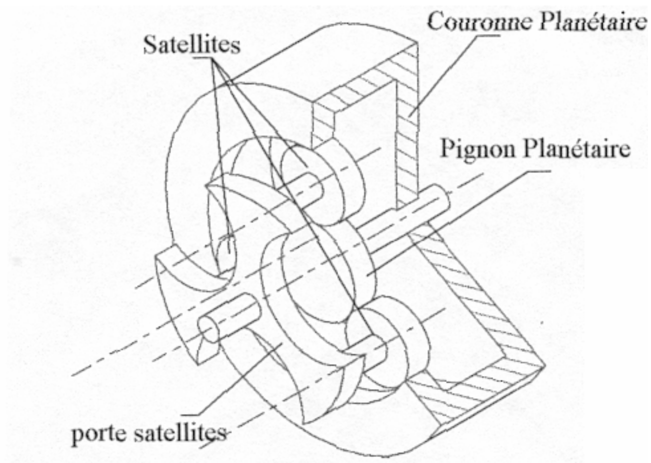
Les trains épicycloïdaux

1. Présentation



Sous le nom de train épicycloïdal ou engrenage planétaire, on désigne un système de transmission de puissance entre deux ou plusieurs arbres dont certains tournent non seulement autour de leur propre axe, mais aussi avec leur axe autour d'un autre axe.

Les engrenages peuvent être cylindriques ou coniques.

Ceux dont l'axe coïncide avec un axe fixe dans l'espace s'appellent ''**planètes**'' et ceux qui tournent avec leur axe autour d'un autre s'appellent ''**satellites**''. Ces derniers sont généralement maintenus par un châssis mobile nommé ''**porte satellites**''.

Avantages :

- Possibilité d'arrangement coaxial des arbres.
- Réduction du poids et de l'encombrement pour une puissance donnée.
- Rapport de vitesse très élevé possible avec un minimum d'éléments pour des transmissions à faible puissance.
- Excellent rendement quand le système est judicieusement choisi.

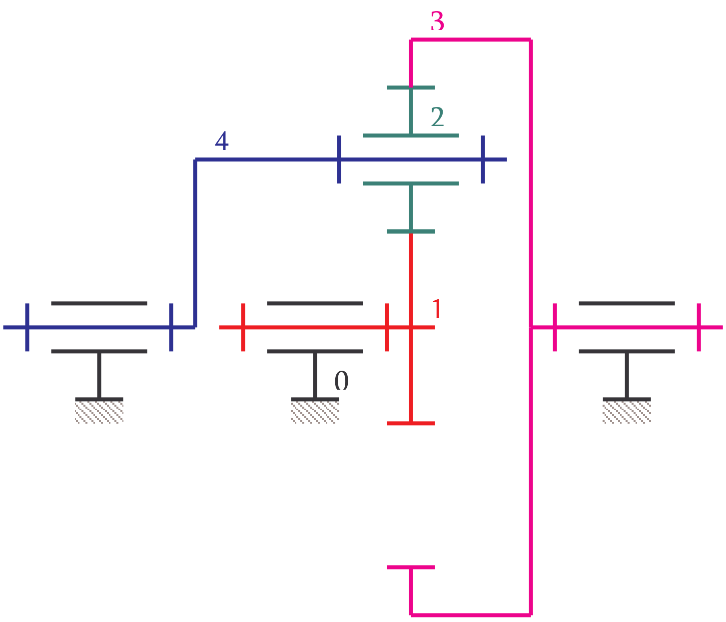
Inconvénients :

- Fortement hyperstatique
- Rendement lié au mode de fonctionnement
- Difficulté à aligner les éléments et à éviter les déformations qui modifient l'alignement

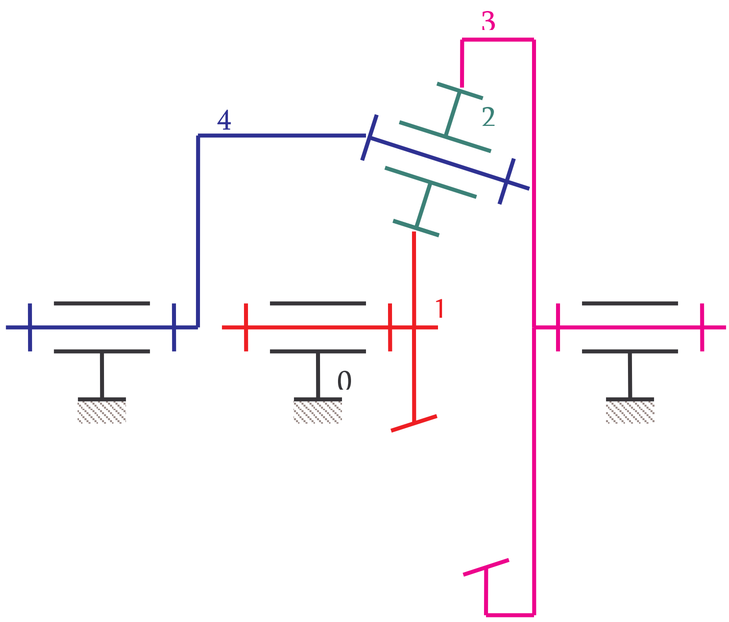
2. Le train simple

Le train épicycloïdal est donc composé de:

- un planétaire d'entrée (1)
- un planétaire de sortie (3)
- un ou plusieurs satellites (2)
- un porte satellite (4) ou (PS)

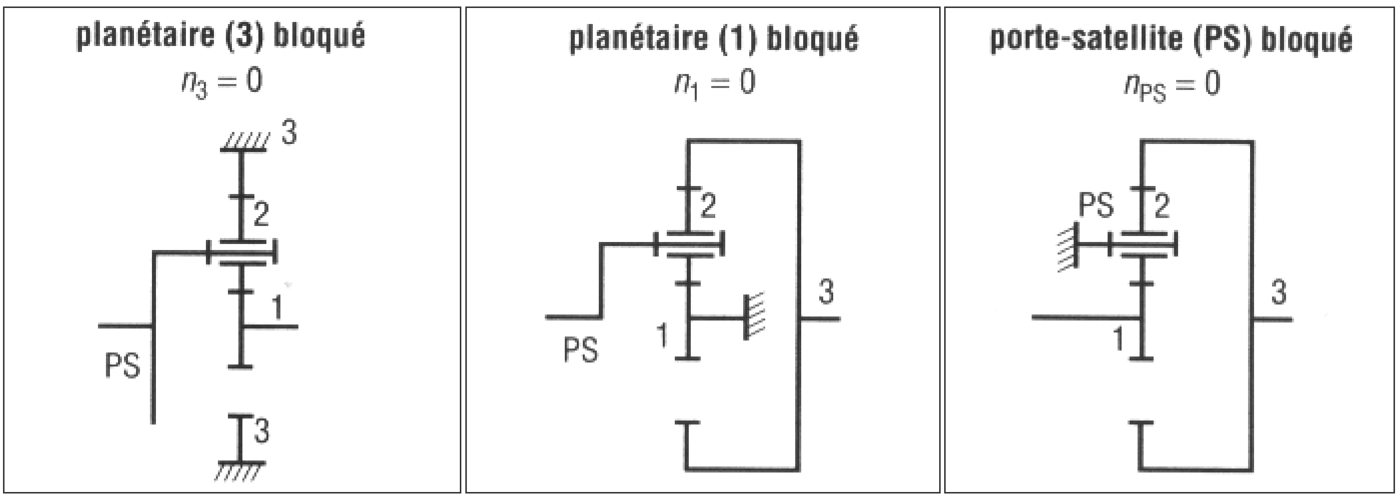


Train plan



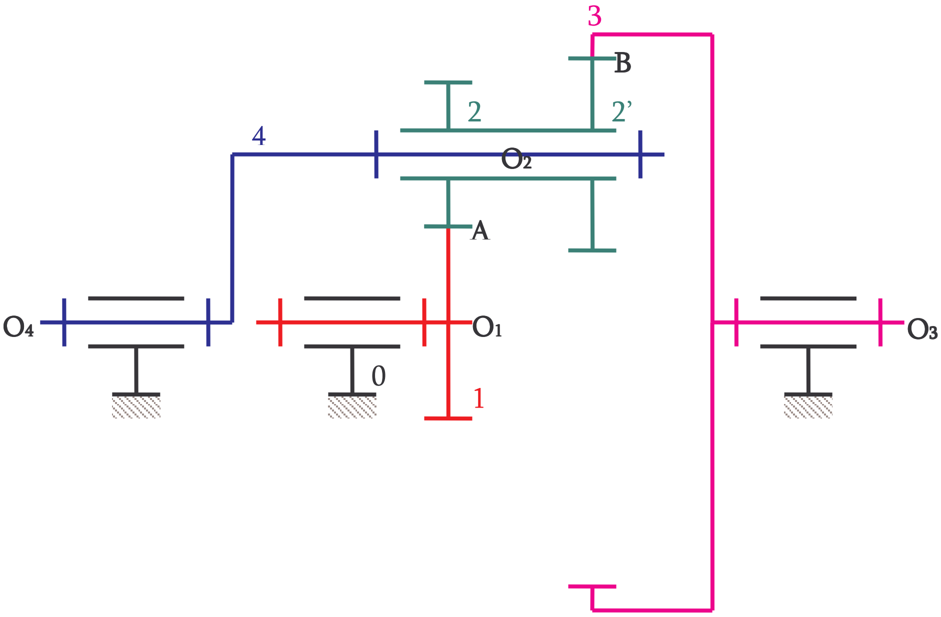
Train sphérique

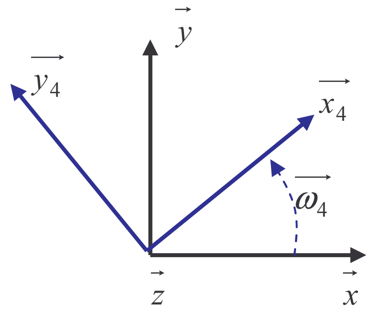
Les trains épicycloïdaux ont besoin de deux lois d'entrée/sortie. Généralement un des éléments est bloqué (ce qui donne une loi d'entrée/sortie, reste une à trouver). On obtient alors les cas particuliers suivants :



3. Etude cinématique

Soit le train épicycloïdal suivant. Prenons un satellite double pour l'étude générale.





Le profil de denture étant en développante de cercle on peut exprimer le Roulement Sans Glissement (RSG) au point A et au point B :

$$\boxed{\begin{cases} \overrightarrow{V_{A,1/2}} = \vec{0} \\ \overrightarrow{V_{B,2'/3}} = \vec{0} \end{cases}}$$

De plus on remarque que les arbres des planétaires, du porte satellites et du satellite sont mobiles dans le repère lié au bâti (l'axe du satellite tourne autour des autres axes). Si on se place dans un repère lié au porte satellites, tous les axes sont fixes dans ce repère (le repère tourne). Décomposons les vitesses en passant par le porte satellites.

3.1. RSG en A :

$$\overrightarrow{V_{A,1/2}} = \overrightarrow{V_{A,1/4}} + \overrightarrow{V_{A,4/2}} = \overrightarrow{V_{O_1,1/4}} + \overrightarrow{O_1A} \wedge \overrightarrow{\Omega_{1/4}} + \overrightarrow{V_{O_2,4/2}} + \overrightarrow{O_2A} \wedge \overrightarrow{\Omega_{4/2}} = \vec{0}$$

$$(R_1.\overrightarrow{y_4} + \zeta_1.\vec{z}) \wedge \omega_{1/4}.\vec{z} + (-R_2.\overrightarrow{y_4} + \zeta_2.\vec{z}) \wedge \omega_{4/2}.\vec{z} = \vec{0}$$

$$R_1.\omega_{1/4}.\overrightarrow{x_4} - R_2.\omega_{4/2}.\overrightarrow{x_4} = \vec{0}$$

$$\boxed{R_1.\omega_{1/4} - R_2.\omega_{4/2} = 0}$$

3.2. RSG en B :

$$\overrightarrow{V_{B,2/3}} = \overrightarrow{V_{B,2/4}} + \overrightarrow{V_{B,4/3}} = \overrightarrow{V_{O_2,2/4}} + \overrightarrow{O_2B} \wedge \overrightarrow{\Omega_{2/4}} + \overrightarrow{V_{O_3,4/3}} + \overrightarrow{O_3B} \wedge \overrightarrow{\Omega_{4/3}} = \vec{0}$$

$$(R_{2'}.\overrightarrow{y_4} + \zeta_{2'}.\vec{z}) \wedge \omega_{2/4}.\vec{z} + (R_3.\overrightarrow{y_4} + \zeta_3.\vec{z}) \wedge \omega_{4/3}.\vec{z} = \vec{0}$$

$$R_{2'}.\omega_{2/4}.\overrightarrow{x_4} + R_3.\omega_{4/3}.\overrightarrow{x_4} = \vec{0}$$

$$\boxed{R_{2'}.\omega_{2/4} + R_3.\omega_{4/3} = 0}$$

Remarque : Les 4 axes de rotations étant fixes dans le repère du porte satellites ceci nous ramène à des équations de trains ordinaires. On peut donc écrire directement (sans passer par le RSG) :

$$\boxed{\frac{\omega_{s/4}}{\omega_{e/4}} = (-1)^p.\frac{\prod R_{menantes}}{\prod R_{menées}}}$$ avec p nombre de contact extérieur.

3.3. Formule de Willis

A partir des résultats des parties 3.2. et 3.3. on peut exprimer une relation liant les 3 vitesses de rotation :

$$\omega_{2/4} = \frac{R_3}{R_{2'}}.\omega_{3/4} = -\frac{R_1}{R_2}.\omega_{1/4}$$

D'où, en gardant les deux derniers termes :

$$\frac{\omega_{1/4}}{\omega_{3/4}} = -\frac{R_2.R_3}{R_{2'}.R_1}$$

Définition : On appelle raison basique le rapport des vitesses de rotation des deux planétaires par rapport au porte satellites. On le note λ et vaut $\lambda = \left.\frac{\omega_1}{\omega_3}\right|_{\omega_4=0}$.

On a alors la formule de Willis :

$$\boxed{\frac{\omega_1 - \omega_4}{\omega_3 - \omega_4} = -\frac{R_2.R_3}{R_{2'}.R_1} = \lambda}$$ Formule de Willis

3.4. Formule de Ravignaux

A partir des relations cinématiques on peut aussi déterminer la formule de Ravignaux suivante :

$$\boxed{\omega_1 - \lambda.\omega_3 + (\lambda - 1).\omega_4 = 0}$$ Formule de Ravignaux

On s'aperçoit en général que les trois vitesses sont dépendantes.

Remarque : La somme des coefficients est nulle.

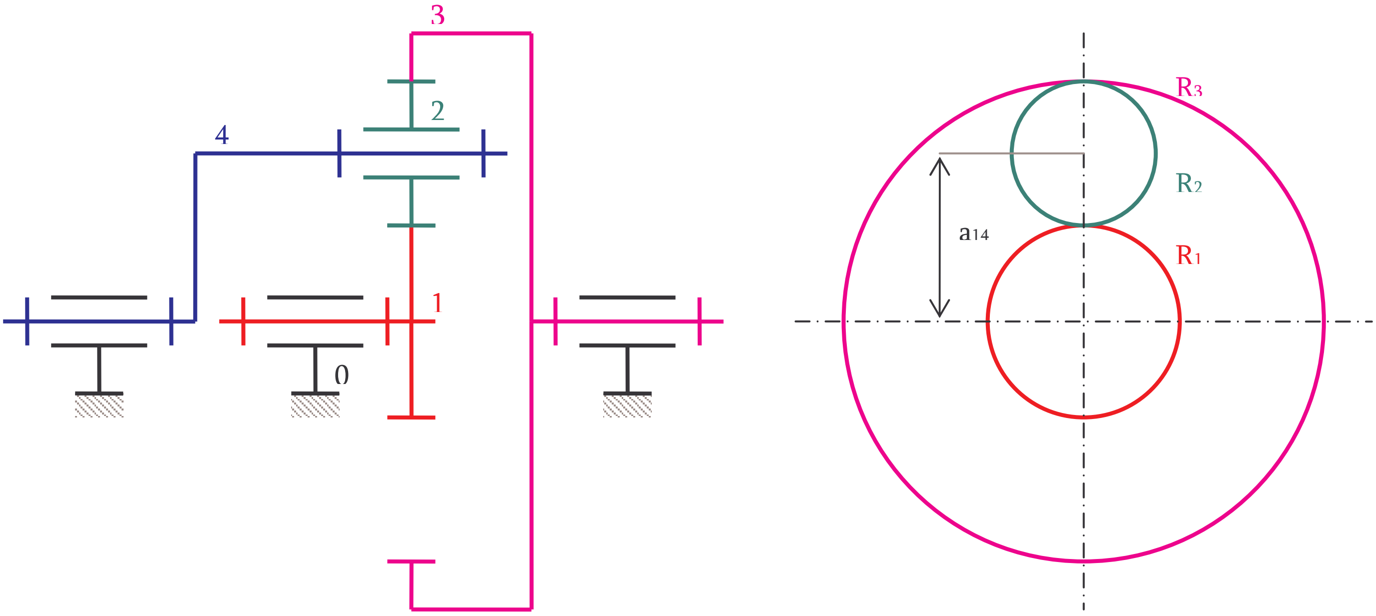
4. Condition de montage

Pour que le montage soit possible, il faut respecter certaines conditions d'assemblage :

- Condition sur les entraxes.
- Condition sur le nombre de dents.
- Condition de voisinage pour les satellites.

On regardera dans ce cours que la conditions sur les entraxes et sur le nombre de dents.

4.1. Condition sur les entraxes



Les conditions géométriques liées à l'entraxe imposent :

$$a_{14} = R_1 + R_2 = R_3 - R_2$$

$$R_1 + 2.R_2 = R_3$$

Pour des engrenages réalisés sans déport et avec des modules identiques (cf. cours engrenages), cette condition s'écrit aussi :

$$\boxed{Z_1 + 2.Z_2 = Z_3}$$

4.2. Condition sur le nombre de dents

Un engrenage planétaire à trois éléments, même s'il satisfait aux conditions d'entraxe, doit encore satisfaire à une certaine relation entre les nombres de dents, si on désire assembler n satellites sur le même porte satellite. Pour éviter un déséquilibre des masses, on prévoit généralement n satellites formant le même angle $\frac{2.\pi}{n}$ entre eux.

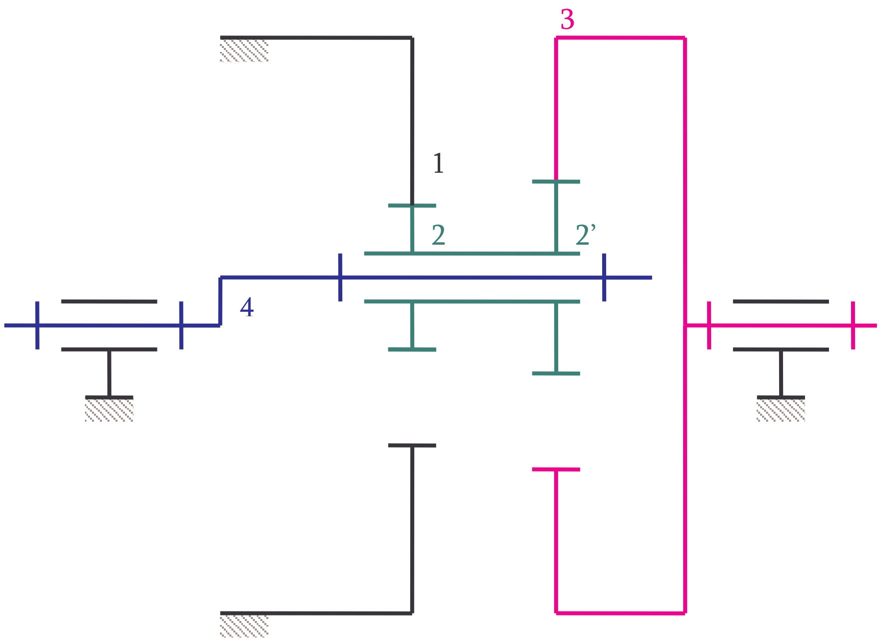
Cette condition s'écrit :

$$\boxed{\frac{Z_1 + Z_2}{n} = nombre\ entier}$$

5. Exemple : Réducteur ATV

Soit le Réducteur ATV fournit en annexe.

Données : $\left| \begin{array}{l} Z_1 = 166 \\ Z_2 = 160 \\ Z_{2'} = 164 \\ Z_3 = 170 \end{array} \right.$



On a donc $\omega_1 = 0$, ce qui entraîne, d'après la formule de Willis $\frac{\omega_4}{\omega_3} = \frac{\lambda}{\lambda - 1}$ avec $\lambda = \left.\frac{\omega_1}{\omega_3}\right|_{\omega_4=0} = \frac{Z_2.Z_3}{Z_1.Z_{2'}}$

Application numérique :

$$\lambda \approx 0.9991$$

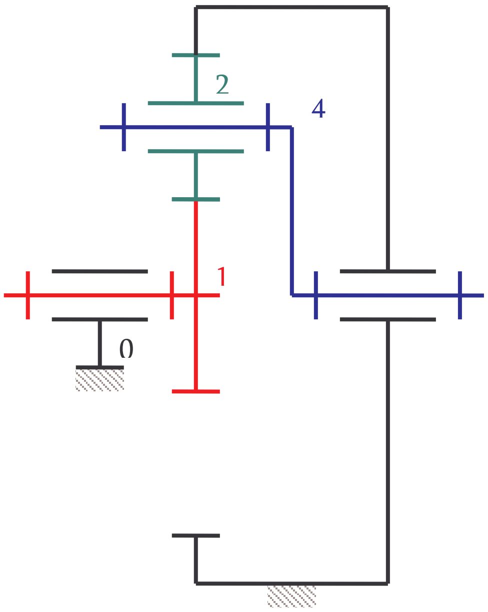
d'où

$$\frac{\omega_4}{\omega_3} = 1133$$

Le réducteur ATV permet d'avoir un fort rapport de réduction avec un encombrement réduit.

6. Exercice : Sécateur électrique Pellenc

Soit le schéma cinématique représentatif du sécateur électrique Pellenc suivant :



Données :

$$P_m = 3 \quad kW$$
$$N_1 = 1400 \quad tr/\min$$
$$N_2 = 350 \quad tr/\min$$
$$\eta = 0.9$$
$$Z_1 = 19$$

Questions :

- Calculer le couple d'entrée C_m et de sortie C_s
- Déterminer le nombre de dents des satellites Z_2 et du planétaire extérieur Z_3

Réponses :

① Couple d'entrée C_m et de sortie C_s :

$$\boxed{C_m = \frac{P_m}{\omega_m} = \frac{3000 \times 30}{1400 \times \pi} = 20{,}46 \quad N.m}$$

et

$$\boxed{C_s = \frac{P_s}{\omega_s} = \frac{\eta.P_m}{\omega_s} = \frac{0.9 \times 3000 \times 30}{350 \times \pi} = 73.67 \quad N.m}$$

② Nombre de dents des satellites Z_2 et du planétaire extérieur Z_3 :

- On commence par déterminer la raison du train :

$$\lambda = \left.\frac{\omega_1}{\omega_3}\right|_{\omega_4 = 0} = -\frac{Z_3}{Z_1}$$

- Ensuite on utilise la formule de Ravignaux (ou Willis) :

$$\omega_1 - \lambda.\omega_3 + (\lambda - 1).\omega_4 = 0 \text{ avec } \omega_3 = 0$$

$$\boxed{\frac{\omega_1}{\omega_4} = 1 - \lambda} \qquad (1)$$

•Puis on vérifie la condition d'entraxe :

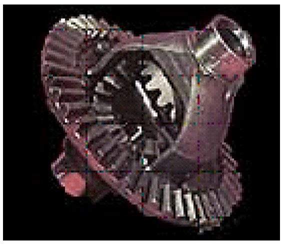
$$\boxed{Z_1 + 2.Z_2 = Z_3} \qquad (2)$$

•On alors un système de 2 équations et 2 inconnues :

$$(1) \quad \Rightarrow \quad \frac{Z_3}{Z_1} = \frac{\omega_1}{\omega_3} - 1 = \frac{1400}{350} - 1 = 3 \quad \Rightarrow \quad \boxed{Z_3 = 57}$$

$$(2) \quad \Rightarrow \quad Z_2 = \frac{Z_3 - Z_1}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{Z_2 = 19}$$

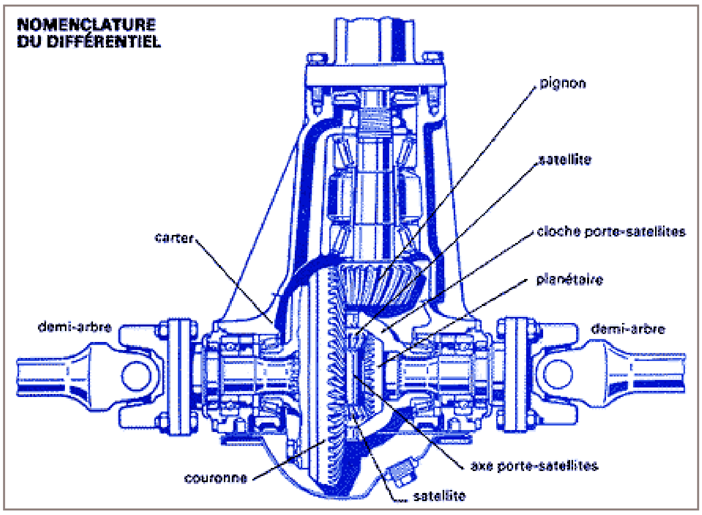
7. Cas particulier de trains épicycloïdaux : le différentiel



Sur un véhicule les roues motrices sont reliées par des demi arbres commandés par un renvoi d'angle (couple conique, ou cylindrique dans le cas d'un moteur transversal).

Sur chacune des roues il s'exerce un couple égal à la moitié de celui fourni par le renvoi d'angle. A cause de la liaison rigide constituée avec l'arbre de transmission, les deux roues motrices tournent à la même vitesse angulaire, ce qui ne présente pas d'inconvénients particuliers dans la marche en ligne droite.

En virage, la roue extérieure suit une trajectoire ayant un rayon plus grand que celle de la roue intérieure. Si les roues ne sont pas motrices, aucun problème. Sinon, il est nécessaire d'interposer un mécanisme différentiel permettant aux roues de tourner à des vitesses différentes.

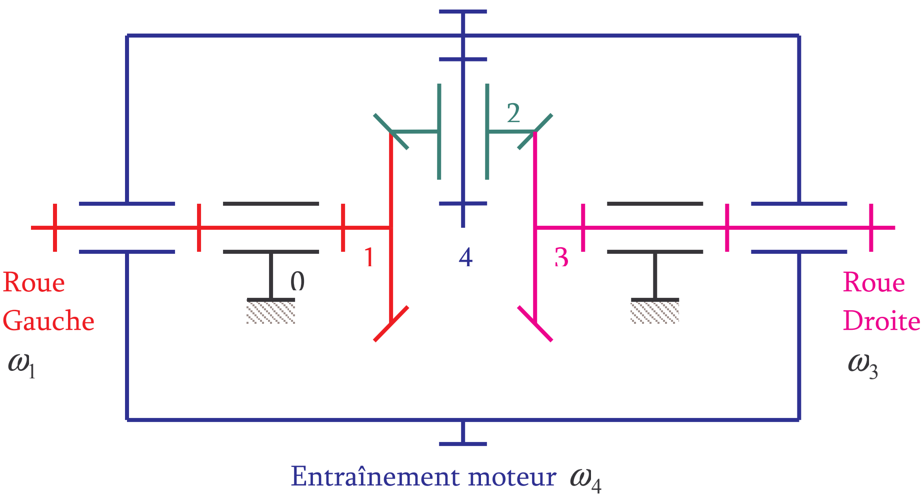


En virage, par contre, le parcours de la roue intérieure est réduit par rapport à celui de la roue extérieure ; ces deux distances devant être effectuées dans le même intervalle de temps il faut que la vitesse angulaire des deux roues soit différente.

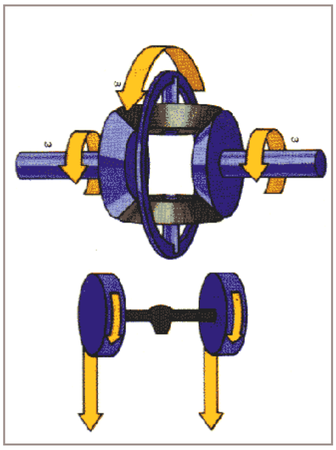
Dans le cas considéré. une des roues glisse sur le sol (ce qui est un grave inconvénient pour la durée des pneumatiques et pour la tenue de route ; à la limite, on en arrive au tête-à-queue); par ailleurs, les demi arbres subissent un effort de torsion qui peut, tôt ou tard entraîner leur rupture. Un différentiel, permettant aux deux roues de tourner éventuellement à des vitesses angulaires différentes, élimine ces inconvénients.

7.1. Schéma cinématique

Le schéma cinématique est le suivant :



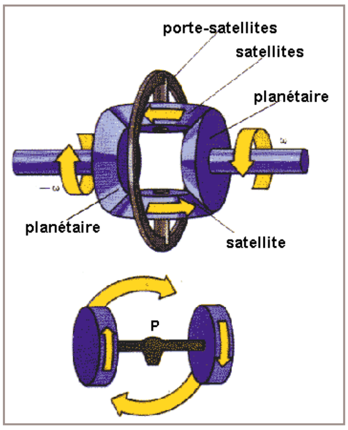
7.2. Marche en ligne droite



Les trajectoires parcourues par les roues sont identiques, donc les vitesses de rotation sont égales. Les satellites ne tournent pas sur eux-mêmes. Le porte satellites tourne sous l'effet du couple en transmettant le mouvement aux planétaires qui reçoivent un couple équivalent égal à la moitié du couple principal.

$$\omega_1 = \omega_3 = \omega_4$$

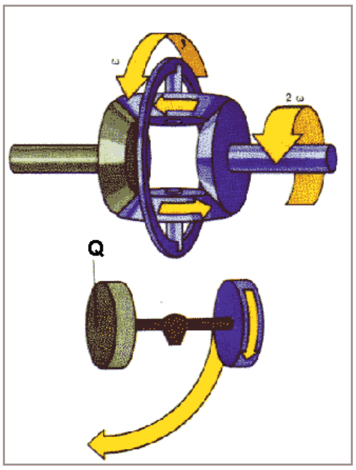
7.3. Rotation atour du point P



Si l'on soulève les roues motrices et que l'on fait tourner une roue dans un sens, l'autre tournera dans le sens opposé en conséquence de l'inversion du mouvement provoquée par les satellites. Ceci correspondrait à une rotation du train autour d'un point P situé en son milieu.

$$\begin{cases} \omega_1 = -\omega_3 \\ \omega_4 = 0 \end{cases}$$

7.4. Rotation autour du point Q



Si l'on bloque une roue, le porte satellites et les satellites tournent en transmettant tout le couple du moteur à l'autre demi essieu qui tourne ainsi à une vitesse double. La roue concernée tournera à une vitesse deux fois supérieure à ce qu'elle serait en ligne droite.

$$\begin{cases} \omega_1 = 0 \\ \omega_3 = 2.\omega_4 \end{cases}$$