NOM: Notes de cours
Prénom: ~~électrotech.~~
date: L.PELT
UC:

- efforts à l'échelle sur vue perspective p2/5.
-

Contrôle de travail

calcul du coefficient de sécurité d'un arbre

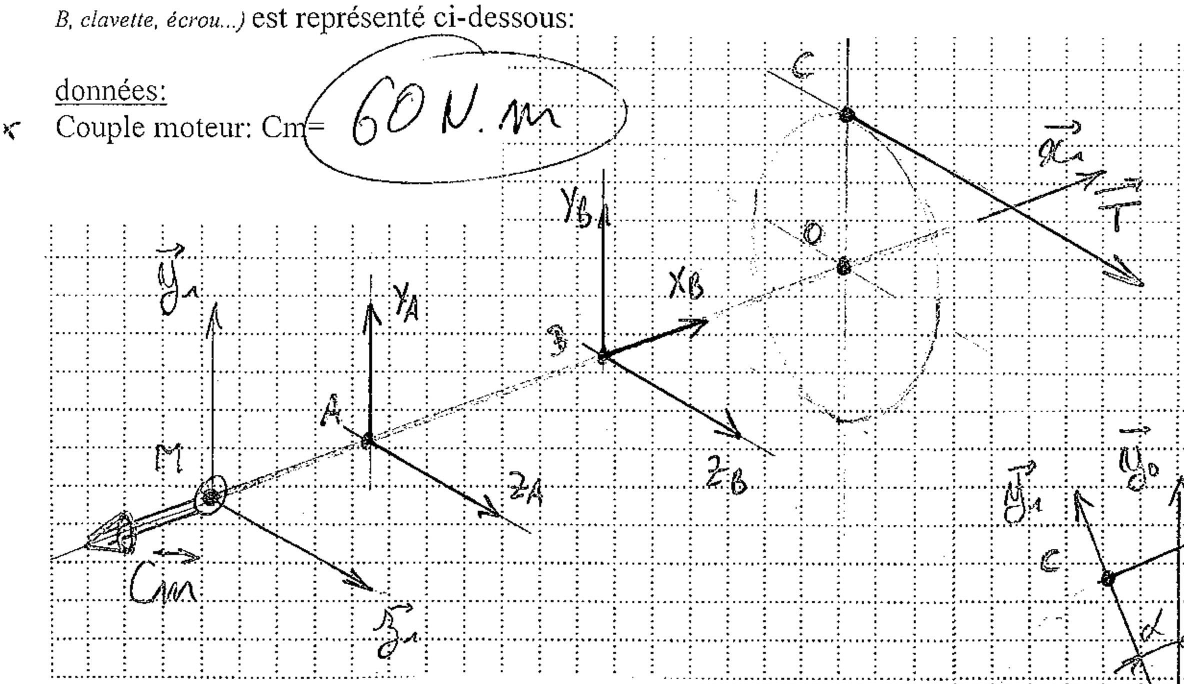
Document autorisé: 1 feuille de notes A4 manuscrite recto-Verso.

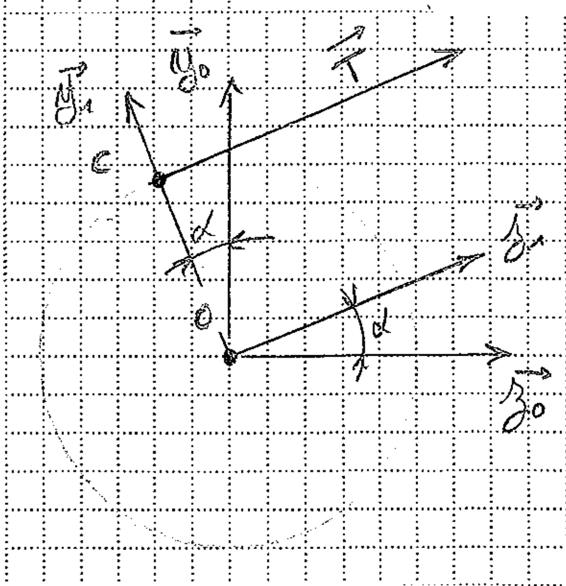
Le système étudié est donné en annexe format A3.
Les dimensions seront prises sur les dessins A4 échelle1 uniquement.
L'étude portera sur l'arbre entrainant la poulie motrice de la transmission par courroie.
La tension du brin tendu de la courroie est supposée appliquée au point C, sur le diamètre primitif de la poulie.
La tension du brin mou est négligée.
L'étude sera faite dans le repère (0,x1,y1,z1).

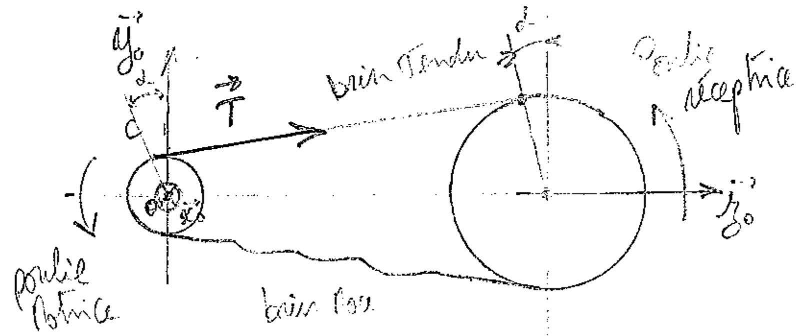
I. CALCUL DES REACTIONS AUX PALIERS A et B

La modélisation des actions mécaniques appliquées sur l'arbre moteur complet *(arbre, poulie, bagues intérieures Rlmts A et B, clavette, écrou...)* est représenté ci-dessous:

<u>données:</u>
Couple moteur: Cm= 60 N.m







<u>Une étude statique permet d'établir les relations suivantes:</u>

- équilibre des moments sur l'axe x: $-\|\vec{C_m}\| + oc.\|\vec{T}\| = 0$
- équilibre des moments en B sur l'axe y: $-ob.\|\vec{T}\| + ab.Z_A = 0$
- équilibre des forces sur l'axe z: $Z_A + Z_B + \|\vec{T}\| = 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} X_B = 0 \\ Y_A = 0 \\ Y_B = 0 \end{array} \right.$$

Calculez les réactions aux centres de poussées des roulements A et B:

$F_{RA} =$

$F_{RB} =$

II. TRACE DU DIAGRAMME DES EFFORTS INTERIEURS

L'étude porte uniquement sur l'arbre noté S.
Le dessin de définition de l'arbre S, échelle 1, est donné en annexe.

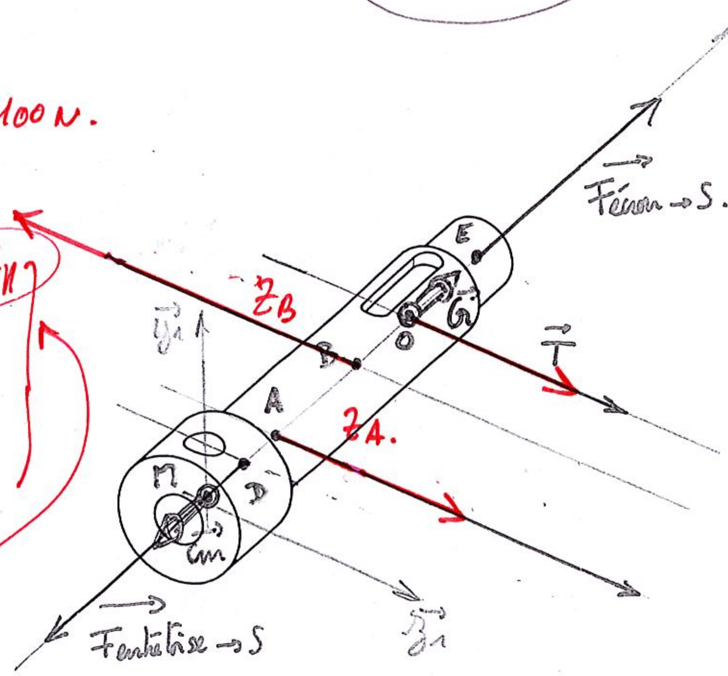
Ci-dessous une perspective de l'arbre S, les actions mécaniques précédentes y sont reportées:
- en A et B pour les réactions des paliers A et B;
- en O pour l'action du brin tendu de la courroie initialement appliqué en C, mais transporté en O. (C_r : couple résistant)
- en M: pour l'application du couple moteur
- en D et E pour l'effort de traction dû au serrage de l'écrou à encoche en bout d'arbre.

$C_r = oc.\|\vec{T}\|$.

Données:
* Effort de serrage du à l'écrou: $\|\overrightarrow{F_{écrou \to S}}\| = \|\overrightarrow{F_{entretoise \to S}}\| =$ 1000 N.

échelle des forces : 1 mm = 100 N.

actions en O: $\begin{Bmatrix} 0 & oc.\|\vec{T}\| \\ 0 & 0 \\ \|\vec{T}\| & 0 \end{Bmatrix}$



$\mathcal{M}_{\vec{T}_O} = \mathcal{M}_{\vec{T}_C} + \vec{OC} \wedge \vec{T}$

$= \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ oc \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \|\vec{T}\| \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} oc.\|\vec{T}\| \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$

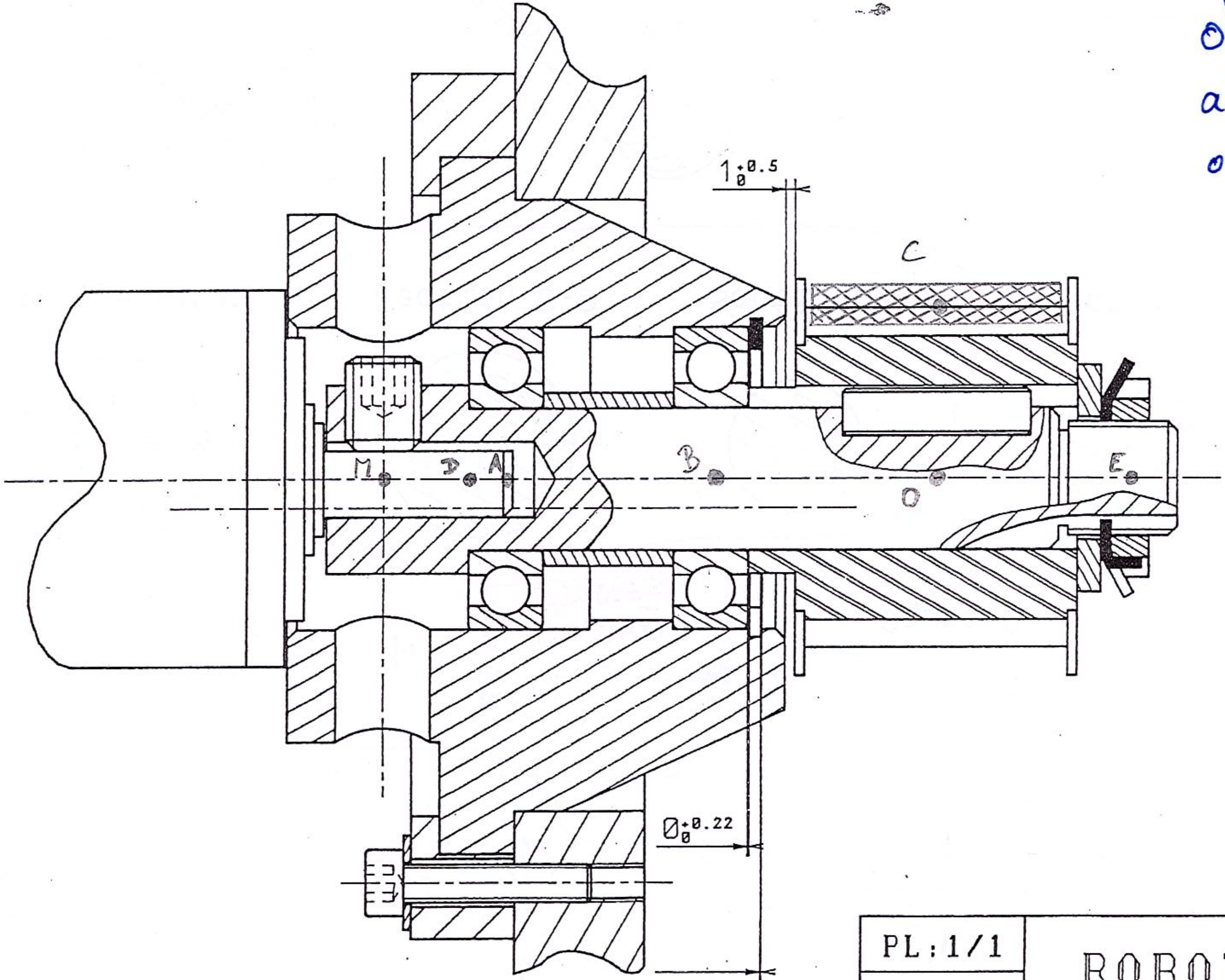
Tracez le diagramme des efforts intérieur de l'arbre S.
En déduire le coefficient de sécurité de l'arbre dans les sections D-D et B-B.
Quelle est la section la plus sollicitées de l'arbre? Justifiez.

Dimensions en mm :

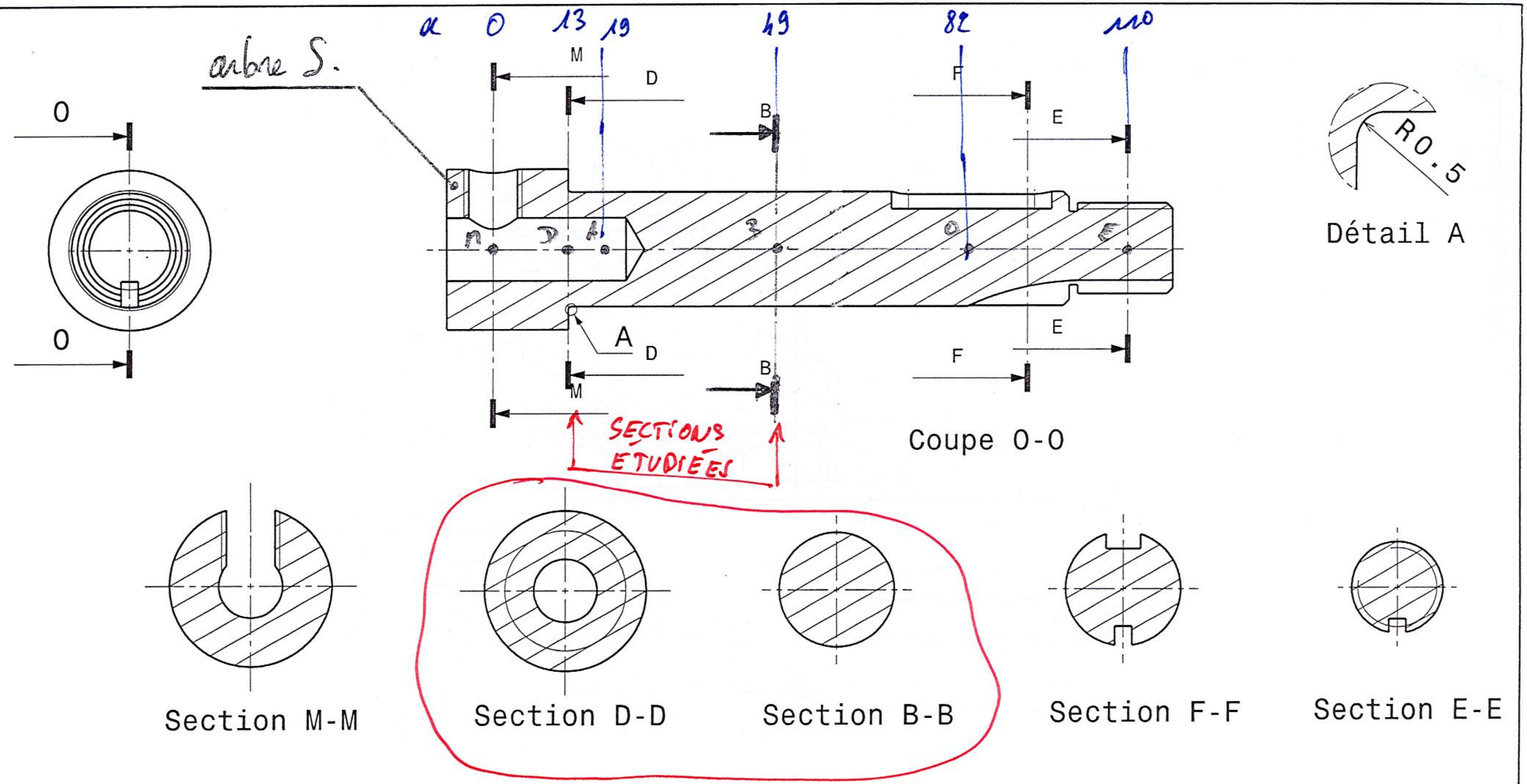
ob = 33

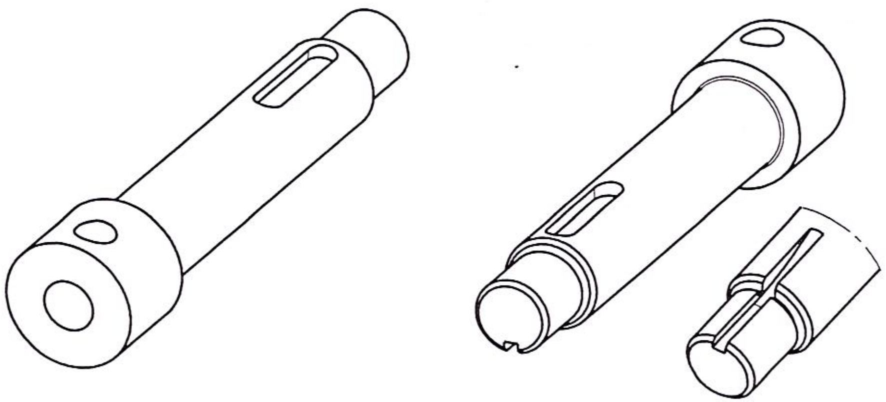
ab = 30

oc = 25



PL : 1/1	ROBOT ERICC 2
Ech : 1:1	
	ENTRAINEMENT BRAS\CHAISE
Lycée Technique d'Armentières	





arbre_ERICC_S

Matière : acier C30 (σ_e = 350 MPa).

ECHELLE 1:1

S4_EDM 2014-A

DM coef sécu arbre

I Calcul des réactions aux paliers A et B :

- bilan act EXT :

en M : $\begin{Bmatrix} 0 & -\|\vec{C_m}\| \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(R_1)}$

en C $\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \|\vec{T}\| & 0 \end{Bmatrix}_{R_1}$ en A $\begin{Bmatrix} X_A = 0 & 0 \\ Y_A = 0 & 0 \\ Z_A & 0 \end{Bmatrix}_{R_1}$

en B $\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_B & 0 \end{Bmatrix}_{R_1}$

équilibre en B :

$$\begin{cases} \vec{M} + \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = \vec{0} \longrightarrow \boxed{Z_A + Z_B + \|\vec{T}\| = 0} \\ \vec{\mathcal{M}}_{B\,M} + \vec{BA} \wedge \vec{A} + \vec{BC} \wedge \vec{C} = \vec{0} \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} -\|\vec{C_m}\| \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -ab \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ Z_A \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ob \\ oc \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \|\vec{T}\| \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} -\|\vec{C_m}\| + oc.\|\vec{T}\| = 0 \\ ab.Z_A - ob.\|\vec{T}\| = 0 \end{array}}$$

Donné dans le sujet.

A.N :

$F_{RA} = \sqrt{Y_A^2 + Z_A^2} = |Z_A| = \frac{ob}{ab}.\|\vec{T}\|$ AN : $F_{RA} = \frac{33}{30} \times 2400 = \underline{2640}$ N

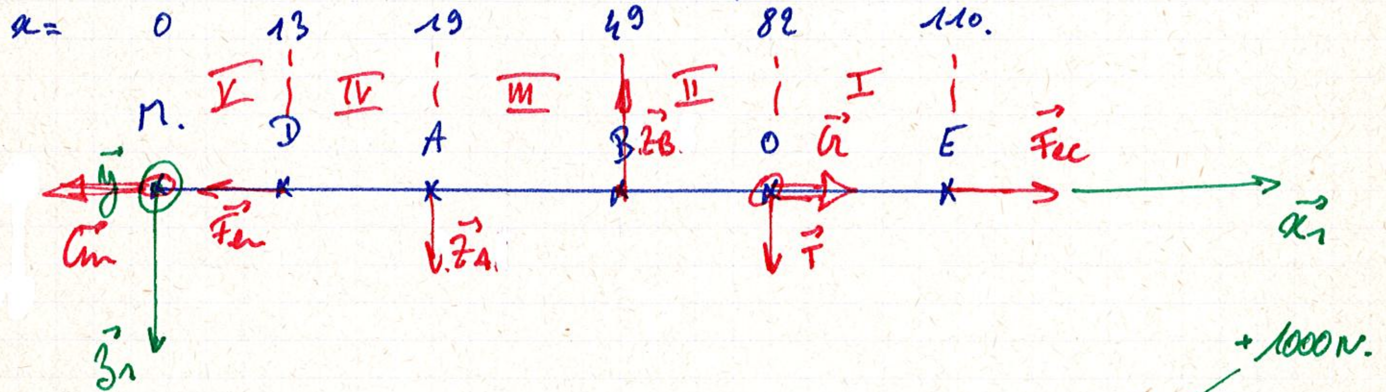
$\|\vec{T}\| = \frac{\|\vec{C_m}\|}{oc} = \frac{60.10^3}{25} = \underline{2400\ N}$

$F_{RB} = |Z_B| = |-\|\vec{T}\| - Z_A|$ AN : $F_{RB} = 2400 + 2640 = \underline{5040}$ N

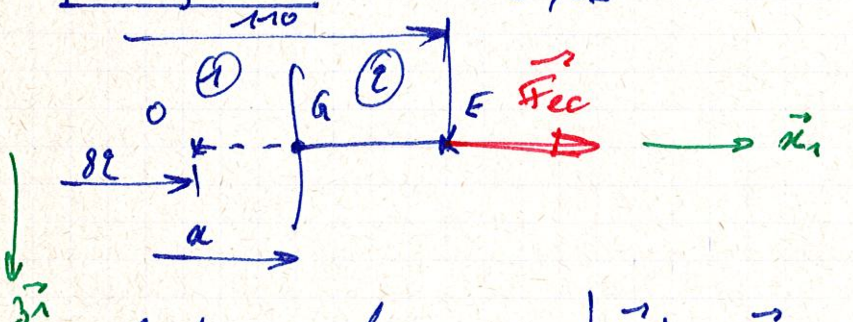
Bilan :

$Z_A = 2640$ N	ob = 33 mm
$Z_B = 5040$ N	ab = 30 mm
$\|\vec{T}\| = 2400$ N	oc = 25 mm
$\|\vec{C_m}\| = 60$ N.m	

II Tracé du diagramme des efforts intérieurs.



• Tronçon I : $G \in]O, E]$



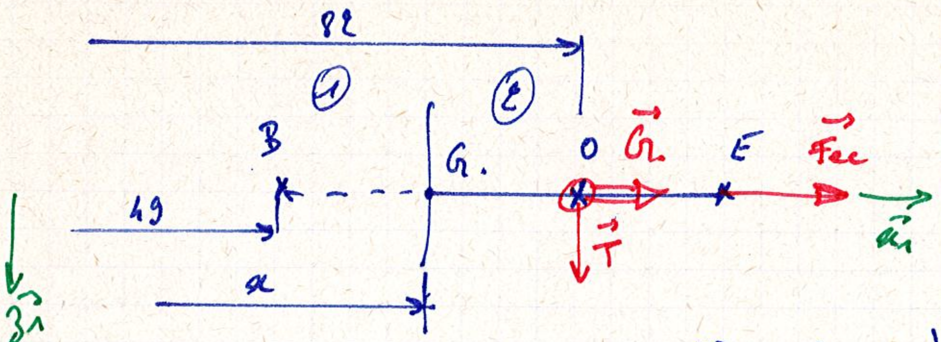
+1000 N.

$m_O < x \leq m_E$	
$N = \|\vec{F_{ec}}\|$	$M_t = 0$
$T_y = 0$	$M_{f_y} = 0$
$T_z = 0$	$M_{f_z} = 0$

$$\{\mathcal{T}_{coh}\}_G = +\{\mathcal{T}_{\bar{S}\to 2}\}_G \Rightarrow \begin{cases} \vec{R}_{coh} = \vec{F_{ec}} = \begin{vmatrix} \|\vec{F_{ec}}\| \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \\ \vec{M}_{G\,coh} = \vec{GE} \wedge \vec{F_{ec}} \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} m_E - x \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} \|\vec{F_{ec}}\| \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

- **Tronçon II :** $G \in]B, O]$



60 N.m

$mb < x \leq mo$	
$N = \|\vec{F_{ec}}\|$	$Mf_t = \|\vec{C_1}\|$
$T_y = 0$	$Mf_y = x.\|\vec{T}\| - mo.\|\vec{T}\|$
$T_z = \|\vec{T}\|$	$Mf_z = 0$

2400 N

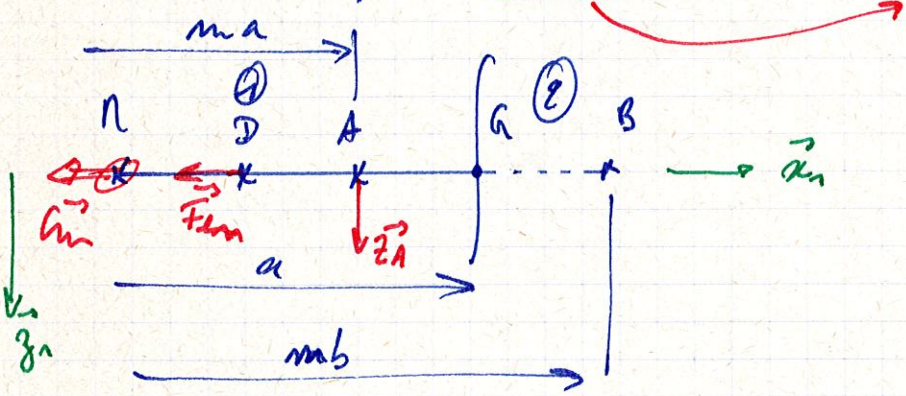
$$\tau_{coh} = + \tau_{\bar{S} \to 2} \Rightarrow \begin{cases} \vec{R_{coh}} = \vec{F_{ec}} + \vec{T} = \begin{vmatrix} \|\vec{F_{ec}}\| \\ 0 \\ \|\vec{T}\| \end{vmatrix} \\ \vec{M_{coh}} = \vec{C_1} + \vec{GO} \wedge \vec{T} \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} mo - x \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \|\vec{T}\| \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 \\ x.\|\vec{T}\| - mo.\|\vec{T}\| \\ 0 \end{vmatrix}$$

- **Tronçon III :** $G \in]A, B]$

On isole la partie gauche (1) $\Rightarrow \tau_{coh} = - \tau_{\bar{S} \to 1}$



1000 N.

$ma < x < mb$	
$N = \|\vec{F_{em}}\|$	$Mf_t = \|\vec{C_m}\|$
$T_y = 0$	$Mf_y = x.\|\vec{Z_A}\| + ma.\|\vec{Z_A}\|$
$T_z = -\|\vec{Z_A}\|$	$Mf_z = 0$

−2640 N

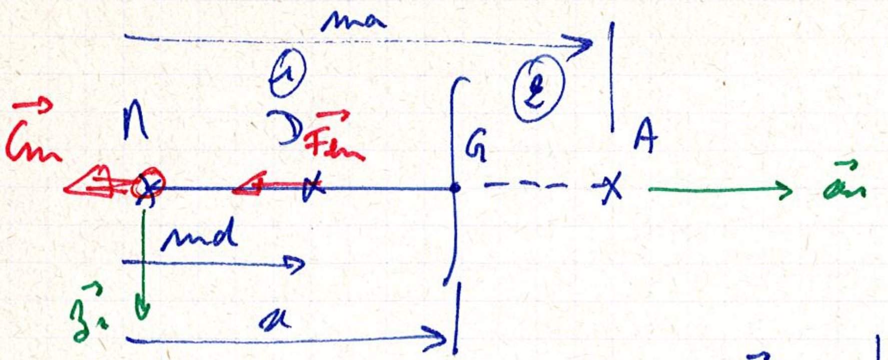
$$\begin{cases} \vec{R_{coh}} = -(\vec{A} + \vec{D} + \vec{M}) = \begin{vmatrix} \|\vec{F_{em}}\| \\ 0 \\ -\|\vec{Z_A}\| \end{vmatrix} \\ \vec{M_{coh}} = -(\vec{GA} \wedge \vec{A} + \vec{GD} \wedge \vec{D} - \|\vec{C_m}\| \vec{x_1}) \end{cases}$$

$$= -\left[\begin{vmatrix} ma - x \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \|\vec{Z_A}\| \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\|\vec{C_m}\| \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \right]$$

$$= -\left[\begin{vmatrix} 0 \\ x\|\vec{Z_A}\| - ma.\|\vec{Z_A}\| \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\|\vec{C_m}\| \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \right]$$

$$= \begin{vmatrix} \|\vec{C_m}\| \\ -x.\|\vec{Z_A}\| + ma.\|\vec{Z_A}\| \\ 0 \end{vmatrix}$$

• Tronçon IV : $G \in \,]D, A]$



$md < x \leq ma$	
$N = \Vert\vec{F_{ext}}\Vert$	$M_t = \Vert\vec{C_m}\Vert$
$T_y = 0$	$Mf_y = 0$
$T_z = 0$	$Mf_z = 0$

$$\tau_{coh} = - \, \tau_{\bar{S} \to 1} \qquad \begin{cases} \vec{R_{coh}} = - \vec{F_{ext}} = \begin{vmatrix} \Vert\vec{F_{ext}}\Vert \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \\ \vec{M_{G\,coh}} = - \vec{C_m} = \begin{vmatrix} \Vert\vec{C_m}\Vert \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \end{cases}$$

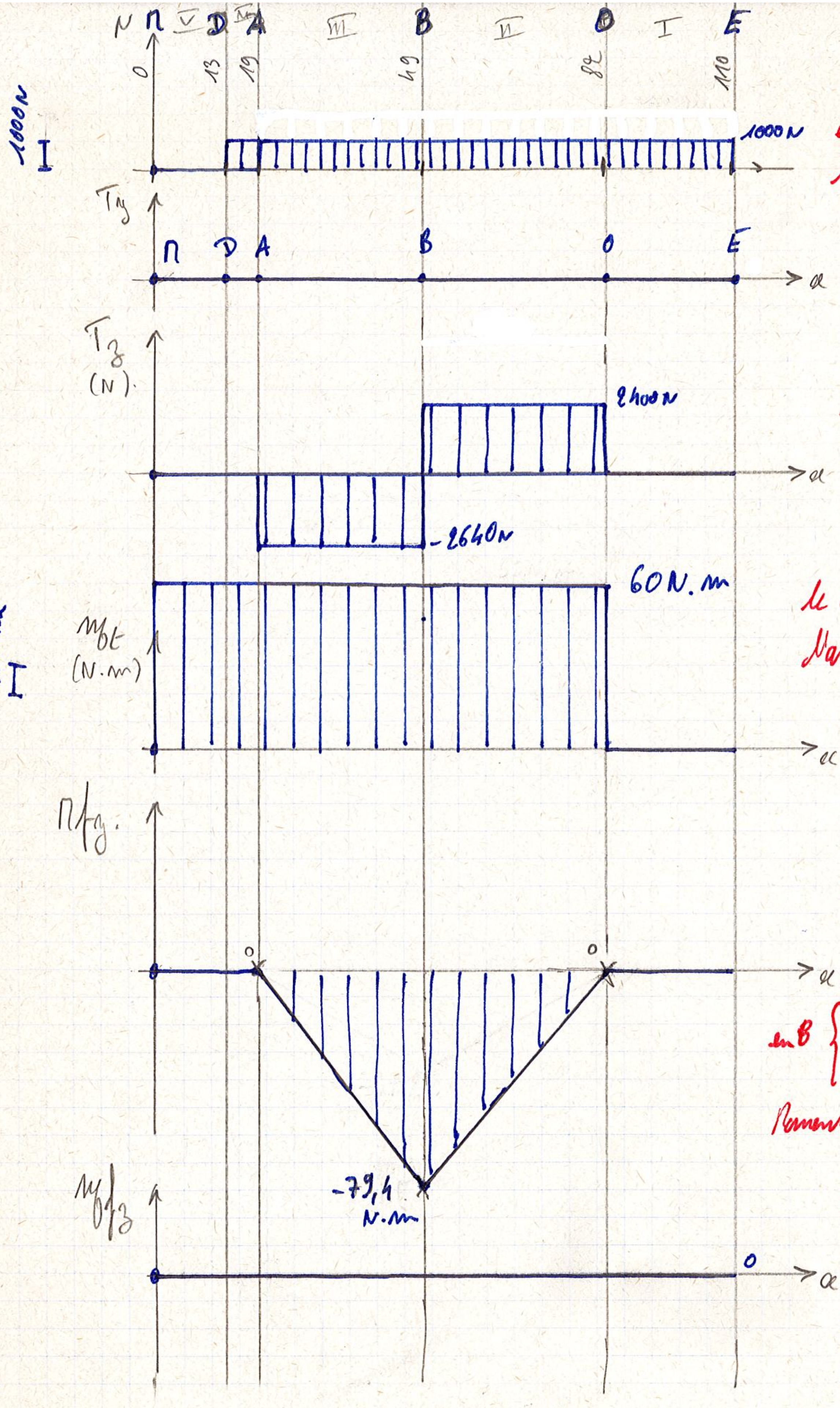
• Tronçon V : $G \in \,]M, D]$

$$\vec{R_{coh}} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{M_{G\,coh}} = \begin{vmatrix} \Vert\vec{C_m}\Vert \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$0 < x \leq md$	
$N = 0$	$M_t = \Vert\vec{C_m}\Vert$
$T_y = 0$	$Mf_y = 0$
$T_z = 0$	$Mf_z = 0$

Remarque : le tracé du diagramme peut être fait "sans calculs" ou presque (voir remarques à côté du diagramme).

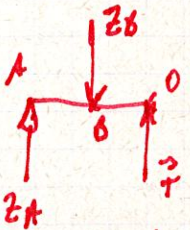


effort de serrage de l'écrou entre A et E.

Pas d'efforts suivant l'axe $\vec{y}$

$\|\vec{T}\|$ entre B et O
$-\|\vec{Z_A}\|$ entre A et B.

Le couple transmis par l'arbre entre M et O.



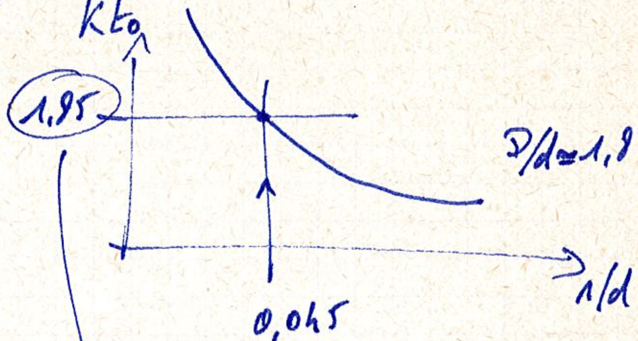
en B $\begin{cases} Z_A \cdot ab \text{ entre A et B} \\ T \cdot ob \text{ entre B et O.} \end{cases}$

Moment nul en A et O.

Pas d'efforts sur l'axe $\vec{y}$, donc pas de moments sur l'axe $\vec{z}$.

Etude de la section D-D :

$\alpha = 13$



$D = 20$
$d = 11$
$r = 0{,}5$

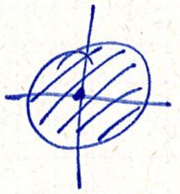
$D/d = 1{,}82$

$\frac{r}{d} = \frac{0{,}5}{11} = 0{,}045$

$Kt_o = 1{,}85$

| d'après la feuille de calcul :
| $S_{D-D} = 2{,}25$ (Torsion pure).

Etude de la section B-B :



→ Pas de perturbation de la section ⇒ $Kt = 1$

$D = 20$

$\alpha = 49.$

| d'après la feuille de calcul : $S_{B-B} = 2{,}5$ |

Conclusion :

| Pour connaître la section la plus sollicitée, il faudrait faire le calcul du coefficient de sécurité dans chaque section de l'arbre. ($Kt \neq$, section $\neq$, efforts int $\neq$ ...).

Cependant :
Les contraintes de torsion et flexion ont l'air prédominante dans les calculs, la section B-B doit être la plus sollicité.

COEFFICIENTS DE CONCENTRATION DE CONTRAINTES DANS UN ARBRE.

Si la pièce présente des discontinuités de forme (entailles, épaulements, rainures, trous, mauvais état de surfaces, défauts métallurgiques, ...), autour de ces zones les contraintes réelles sont beaucoup plus importantes que les contraintes nominales obtenues à partir des calculs de la RdM. Ce phénomène local est appelé phénomène de concentration des contraintes.

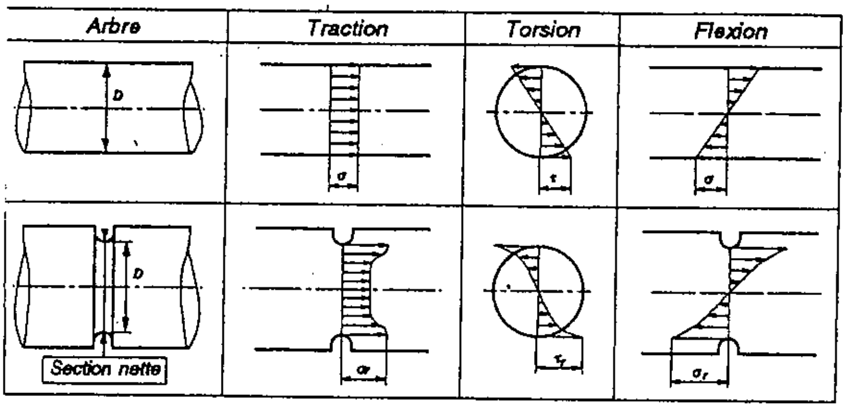
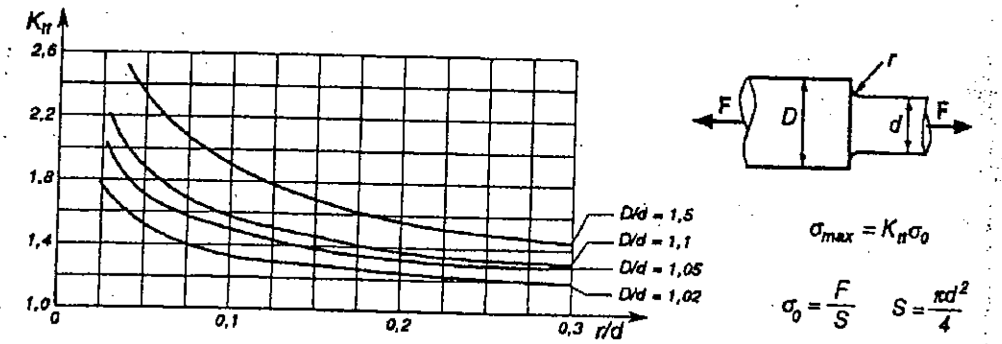


Figure 12.8 – *Arbre entaillé par une gorge. Représentation des contraintes réelles*

TRACTION



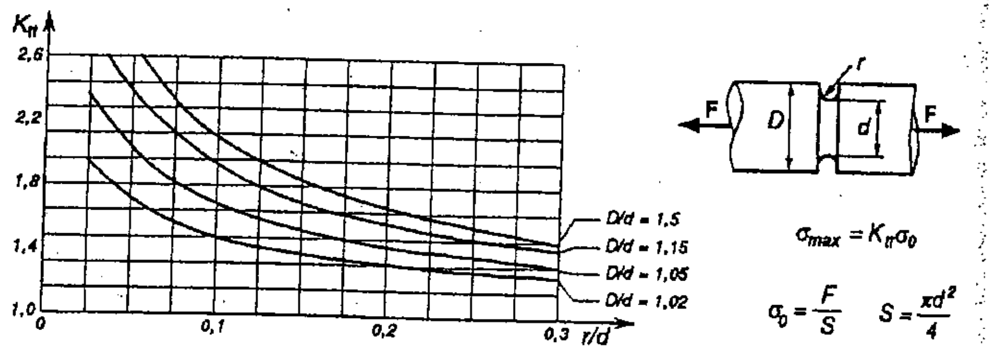


Figure 12.11 – *Valeur de K_{tt} en traction pure pour différents types d'entailles*

FLEXION

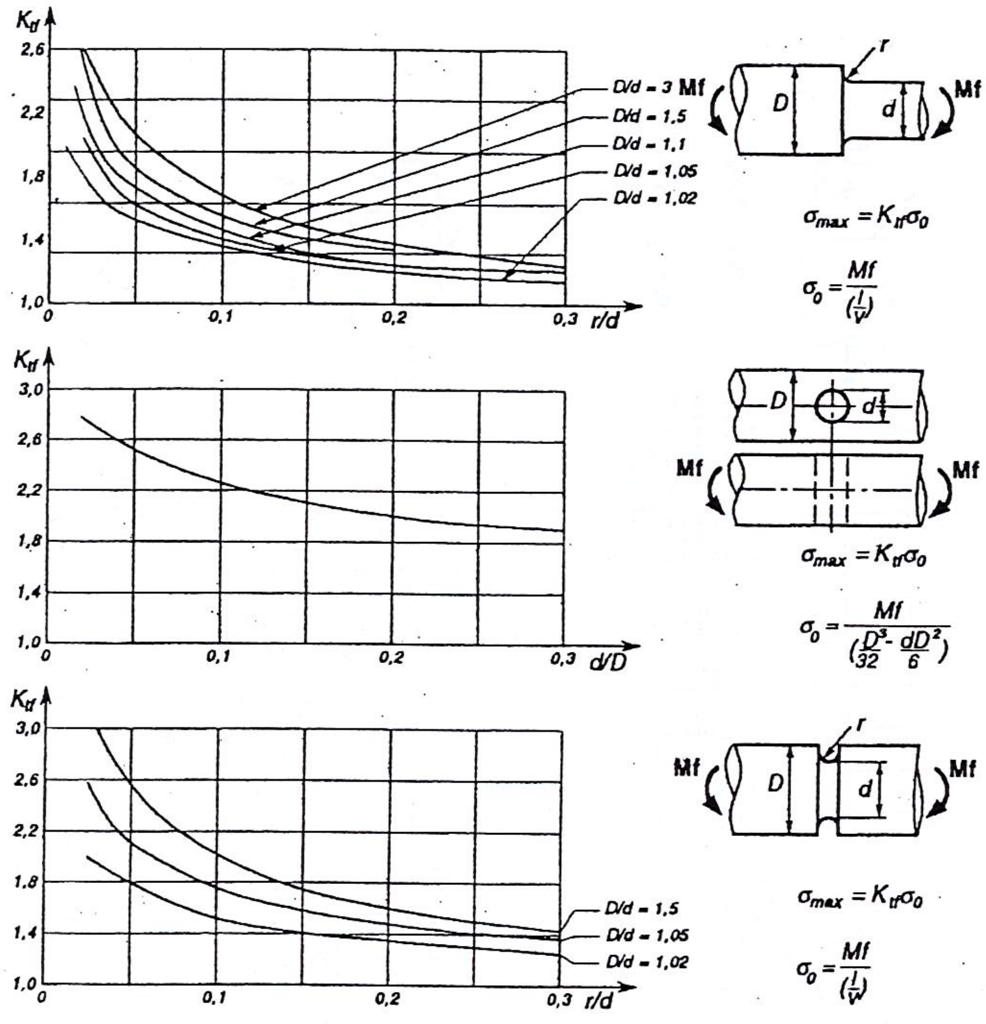


Figure 12.10 – *Valeur de K_{tt} en flexion pure pour différents types d'entailles*

TORSION

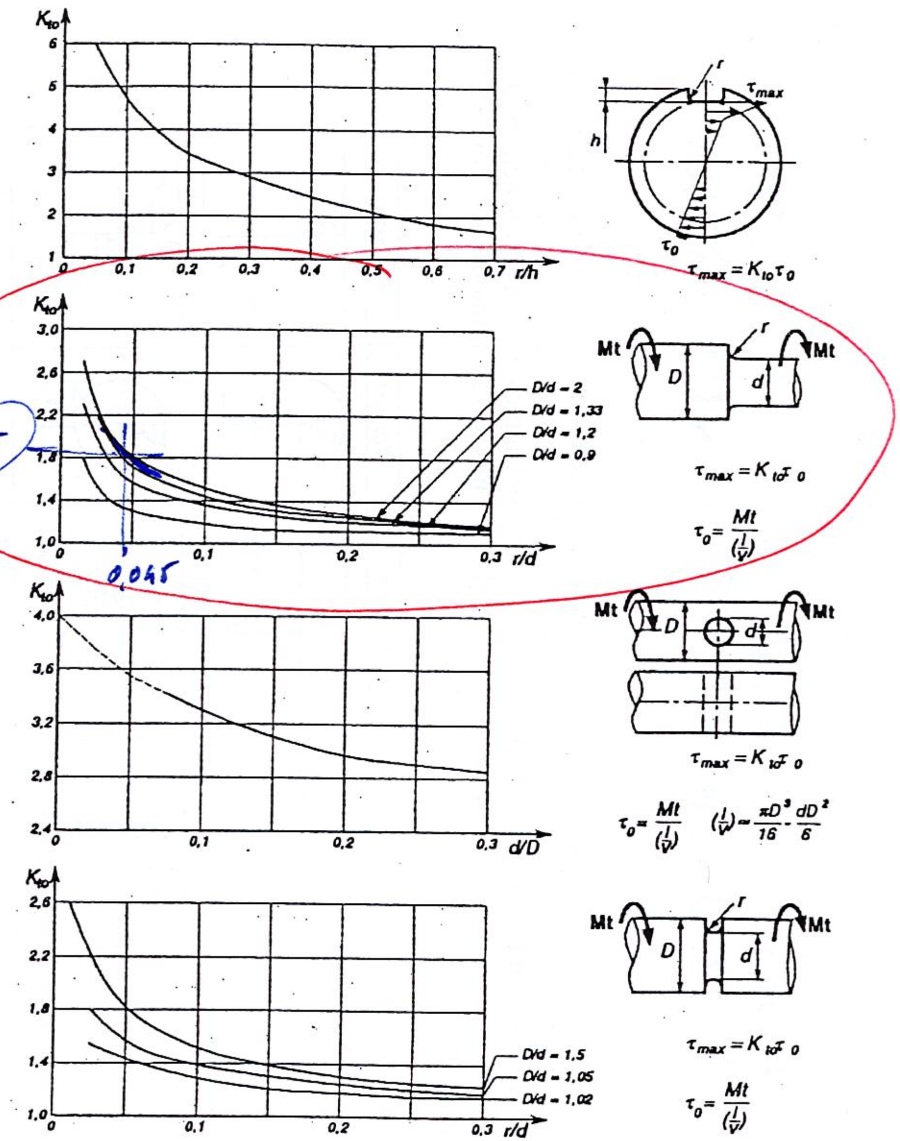
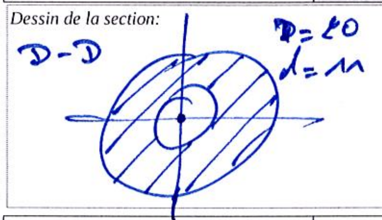


Figure 12.9 – *Valeur de K_{t0} en torsion pure pour différents types d'entailles*

FICHE DE CALCUL DU COEFFICIENT DE SECURITE D'UNE SECTION DROITE D'UN ARBRE

abscisse de la section _mm	
x	13

Dessin de la section:



	géométrie de la section ronde		
diamètre EXT en mm	D	20	
diamètre INT en mm	d	11	
aire de la section en mm²	S	219	= PI/4*(D²-d²)
Moment quadratique polaire _mm^4	Io	14271	= PI/32*(D^4-d^4)
Moment d'inertie /axe z _mm^4	Igz	7135	= Io/2

limite d'élasticité du matériau _en Mpa	σ_e	350

TORSION PURE

Effort normal en N	N	0	Moment de torsion en N.m	Mt	60
effort tranchant sur y en N	Ty	0	Moment fléchissant sur y en N.m	Mfy	0
effort tranchant sur z en N	Tz	0	Moment fléchissant sur z en N.m	Mfz	0

			$\sigma_{nominale}$	K_t Coef de Concentration De contrainte	$\sigma_{réelle}$ =Kt * $\sigma_{nominale}$
contrainte normale de traction	$\sigma_{traction}$	= N / S	0.00	1	0.00
contrainte normale de flexion	$\sigma_{flexion}$	= (Mfy²+Mfz²)^(1/2) / (Igz/(d/2))	0.00	1	0.00
contrainte tangentielle de cisaillement	$\tau_{cisaillement}$	= (Ty²+Tz²)^(1/2) / S	0.00	1	0.00
contrainte tangentielle de torsion	$\tau_{torsion}$	= Mt / (Io/(d/2))	42.04	1.85	77.78

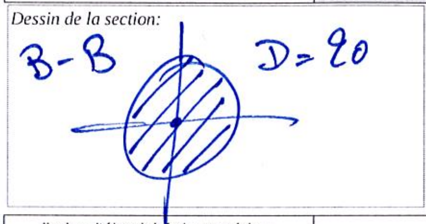
Contrainte équivalente de TRESCA	σ_{eq}^T	$= (\sigma^2_{tract°+flex°} + 4\tau^2_{cisailt+tors°})^{(1/2)}$	/	/	155.56
coefficient de sécurité de la section	$S_{sécu}$	$= \sigma_e / \sigma_{eq}^T$	/	/	**2.25**

7

FICHE DE CALCUL DU COEFFICIENT DE SECURITE D'UNE SECTION DROITE D'UN ARBRE

abscisse de la section _mm	
x	49

Dessin de la section:



	géométrie de la section ronde		
diamètre EXT en mm	D	20	
diamètre INT en mm	d	0	
aire de la section en mm²	S	314	$= PI/4*(D^2-d^2)$
Moment quadratique polaire _mm^4	Io	15708	$= PI/32*(D^4-d^4)$
Moment d'inertie /axe z _mm^4	Igz	7854	= Io/2

limite d'élasticité du matériau _en Mpa	σ_e	350

Effort normal en N	N	1000	Moment de torsion en N.m	Mt	60
effort tranchant sur y en N	Ty	0	Moment fléchissant sur y en N.m	Mfy	79.4
effort tranchant sur z en N	Tz	2640	Moment fléchissant sur z en N.m	Mfz	0

			$\sigma_{nominale}$	K_t Coef de Concentration De contrainte	$\sigma_{réelle}$ $= K_t * \sigma_{nominale}$
contrainte normale de traction	$\sigma_{traction}$	= N / S	3.18	1	3.18
contrainte normale de flexion	$\sigma_{flexion}$	= (Mfy²+Mfz²)^(1/2) / (Igz/(d/2))	101.10	1	101.10
contrainte tangentielle de cisaillement	$\tau_{cisaillement}$	= (Ty²+Tz²)^(1/2) / S	8.40	1	8.40
contrainte tangentielle de torsion	$\tau_{torsion}$	= Mt / (Io/(d/2))	38.20	1	38.20

Contrainte équivalente de TRESCA	σ_{eq}^{T}	$= (\sigma^2_{tract°+flex°} + 4\tau^2_{cisailt+tors°})^{(1/2)}$	/	/	139.86
coefficient de sécurité de la section	$S_{sécu}$	$= \sigma_e / \sigma_{eq}^{T}$	/	/	**2.50**

8