Formulaire RDM

Loi de Hooke : $\sigma = E \cdot \varepsilon ; \quad \sigma = \frac{F}{S} ; \ \varepsilon = \frac{\Delta}{L}$

Loi de Poisson : $\frac{\Delta a}{a} = -\nu \cdot \varepsilon$

Torseur de cohésion

$$\{T_{cohésion\ 1/2}\}_K = \begin{Bmatrix} N & Mt \\ T_1 & Mf_1 \\ T_2 & Mf_2 \end{Bmatrix}$$

N effort normal ; T = $\sqrt{T_1^2 + T_2^2}$: effort tangentiel

Mt moment de torsion ; Mf = $\sqrt{Mf_1^2 + Mf_2^2}$: moment de flexion

Formule de Bresse : $y'' = \frac{\mathrm{Mfz}(x)}{I_{GZ} \times E}$; $I_{GZ} = \int_{M \in \pi} y^2 \cdot dS$; moment quadratique de la section par rapport à G $\vec{z}$

Contraintes

La **matrice des contraintes** est symétrique

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \overrightarrow{C_{(M,\vec{x})}} & \overrightarrow{C_{(M,\vec{y})}} & \overrightarrow{C_{(M,\vec{z})}} \end{array} \\ [\sigma_{(M)}] = & \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{array}{c} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{array} \end{array}$$

Vecteur contrainte $\overrightarrow{C_{(M,\vec{n})}} = [\sigma_{(M)}] \cdot \vec{n}$

Il existe un repère $R'(M, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ tel que

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \overrightarrow{C_{(M,\vec{X})}} & \overrightarrow{C_{(M,\vec{Y})}} & \overrightarrow{C_{(M,\vec{Z})}} \end{array} \\ [\sigma_{(M)}] = & \begin{bmatrix} \sigma_X & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_Y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_Z \end{bmatrix} \begin{array}{c} \vec{X} \\ \vec{Y} \\ \vec{Z} \end{array} \end{array}$$

$\sigma_X, \sigma_Y, \sigma_Z$ sont les contraintes principales (valeurs propres)

$\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}$ sont les directions principales (vecteurs propres)

Tout vecteur contrainte en M suivant une des directions principales est porté par cette direction principale : la contrainte est purement normale : $\overrightarrow{C_{(M,\vec{X})}} = \sigma_X \cdot \vec{X}$

$(M, \vec{x}, \vec{y}, \vec{Z})$ *repère global*, $(M, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ *repère principal*, $(M, \vec{n}_1, \vec{t}_1, \vec{Z})$ *et* $(M, \vec{n}_2, \vec{t}_2, \vec{Z})$ *repères locaux*

Contraintes liées aux sollicitations simples :

Contrainte de traction : $\sigma=\frac{F}{S}\ ;\left(F>0\ traction\,,\ F<0\ compression\right)$

Contrainte de cisaillement : $\tau=\frac{-F}{S}\,,\ le\ signe\ dépend\ du\ choix\ du\ repère$

Contrainte de flexion : $\sigma_{fl}=\frac{-Mfz\,.\,y}{I_{oz}}$ Contrainte de torsion $\tau_{torsion}=\frac{Mt\,.\,r}{I_o}$

Contrainte de torsion idéale : $\tau_{torsion\ idéale}=\frac{Mt_i\,.\,r}{I_o}\ ;\ Mt_i=\sqrt{Mf^2+Mt^2}$

Déformations

Matrice des déformations

$$\left[\varepsilon_{(M)}\right]=\begin{bmatrix}\varepsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz}\\ \gamma_{xy} & \varepsilon_y & \gamma_{zy}\\ \gamma_{xz} & \gamma_{zy} & \varepsilon_z\end{bmatrix};\ \varepsilon_x\ dilatation\ linéïque\ suivant\ \vec{x}\ ;\gamma_{xy}\ demi\ \text{var}iation\ angulaire$$

Les γ de la matrice des déformations sont les demi variations angulaires des angles du repère.

Lois de comportements

$$s=tr\left[\sigma_{(M)}\right]=\sigma_X+\sigma_Y+\sigma_Z=\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z$$

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{E}\left[\left(1+v\right).\sigma_{ij}-v\,.\,s\,.\,Id_{ij}\right]$$

$$e=tr\left[\varepsilon_{(M)}\right]=\varepsilon_X+\varepsilon_Y+\varepsilon_Z=\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z$$

$$\sigma_{ij}=\underbrace{\frac{E}{\left(1+v\right)}}_{2.\mu}\cdot\varepsilon_{ij}+\underbrace{\frac{v\,.\,E}{\left(1+v\right)\cdot\left(1-2\,v\right)}}_{\lambda}\cdot e\,.\,Id_{ij}$$

Critères de dimensionnement

Critère de **Tresca** (utilisation plus large que Von Mises) : $\sigma_{eq}=2.\left[\sup\left(\left|\frac{\sigma_I-\sigma_J}{2}\right|\right)\right]$ à comparer à $\sigma_{e\ traction}$ (limite élastique du matériau à la traction)

Critère de **Von Mises** (plus précis que Tresca pour la torsion pure et le cisaillement pur)

$$\sigma_{eq}=\left[\sigma_X{}^2+\sigma_Y{}^2+\sigma_Z{}^2-2.\,v\,.\left(\sigma_X\cdot\sigma_Y+\sigma_X\cdot\sigma_Z+\sigma_Z\cdot\sigma_Y\right)\right]^{1/2}$$ à comparer à $\sigma_{e\ traction}$ (limite élastique du matériau à la traction)