

## Engrenages et trains d'engrenages

### I. Introduction

#### 1.1 Définition

– On appelle « engrenage » l'ensemble des deux roues dentées engrenant l'une avec l'autre et permettant de transmettre un mouvement ou une puissance avec un rapport de vitesse invariable (On parle de transmission homocinétique).

#### 1.2 Généralités

- Parmi les systèmes de transmission de mouvement et de puissance les plus utilisés, les plus résistants et les plus durables;
- Ils sont normalisés ce qui permet leur interchangeabilité et réduit leur coût de fabrication;
- La roue qui a le plus petit nombre de dents est appelée « pignon » et c'est généralement elle qui reçoit la puissance du moteur;
- Une combinaison d'engrenages est appelée « train d'engrenages ».

### II. Classification des engrenages

#### 2.1 Généralités

– Les engrenages peuvent se répartir en trois familles selon la position et l'orientation relative de leurs axes :

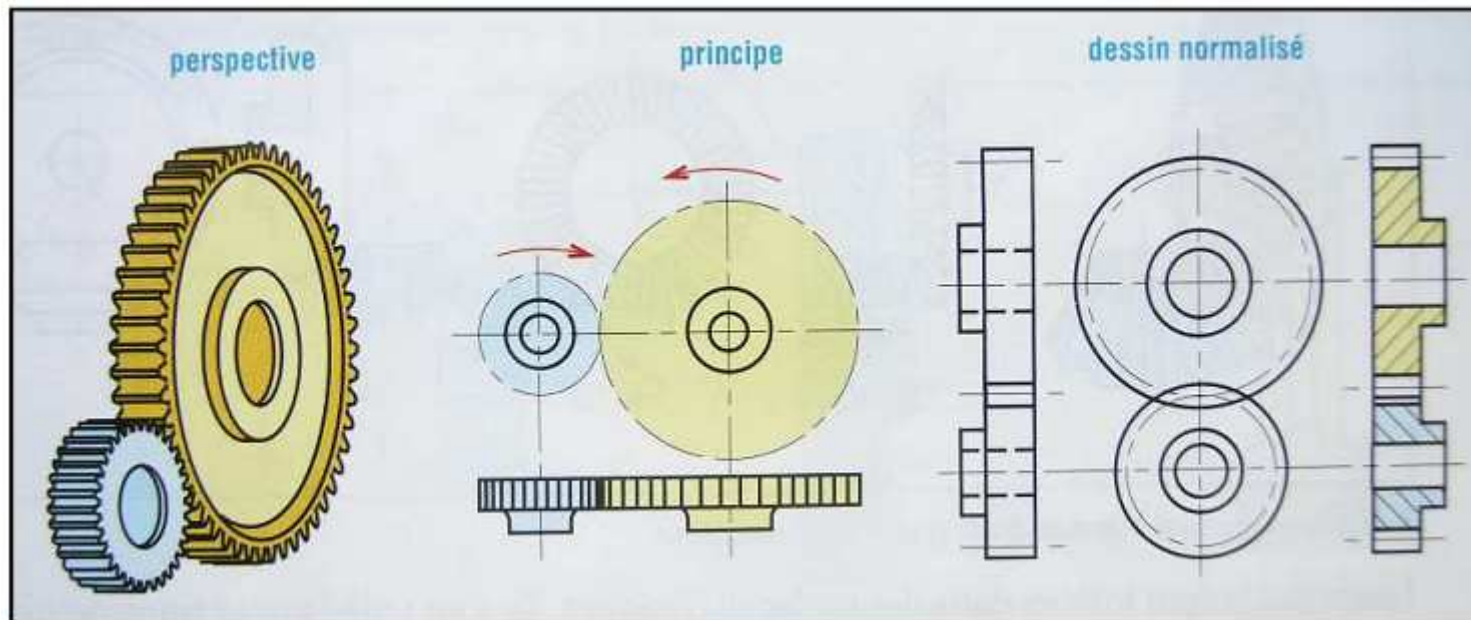


Dans chacune de ces familles on retrouve différents types d'engrenages;

Ces types sont présentés dans les diapositives qui suivent :

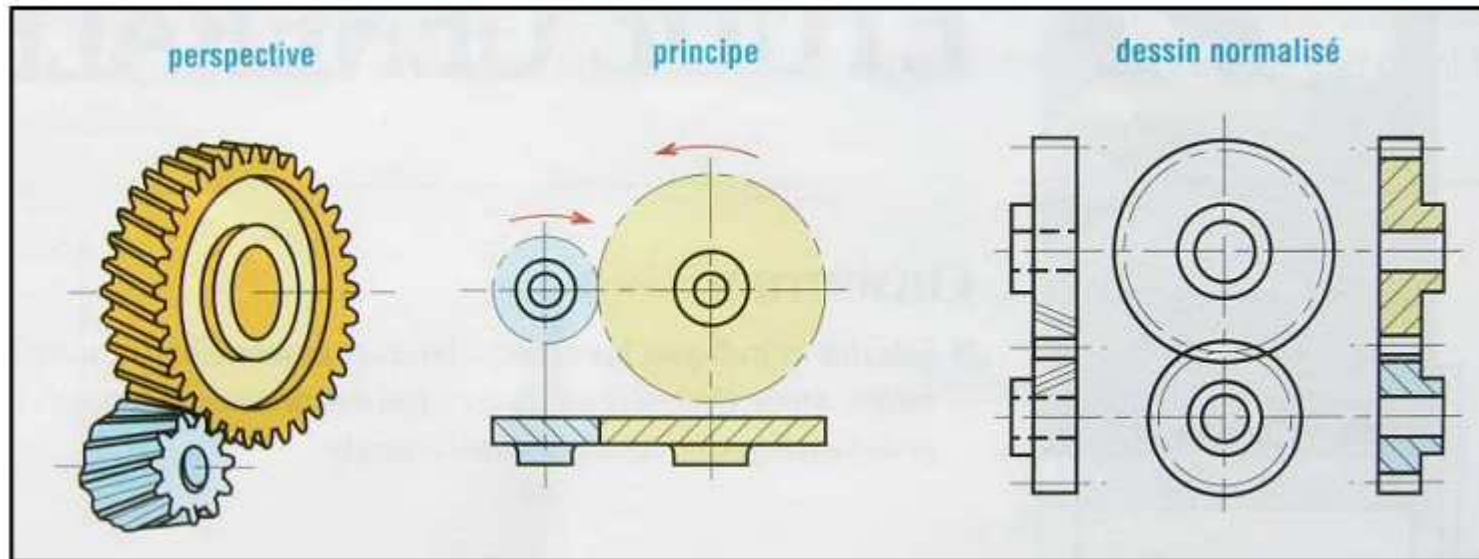
## 2.2 Engrenages droits à denture droite

- Les arbres sont parallèles et les dents des deux engrenages sont également parallèles à l'axe de rotation des arbres;
- Ce sont les plus simples et les plus économiques.



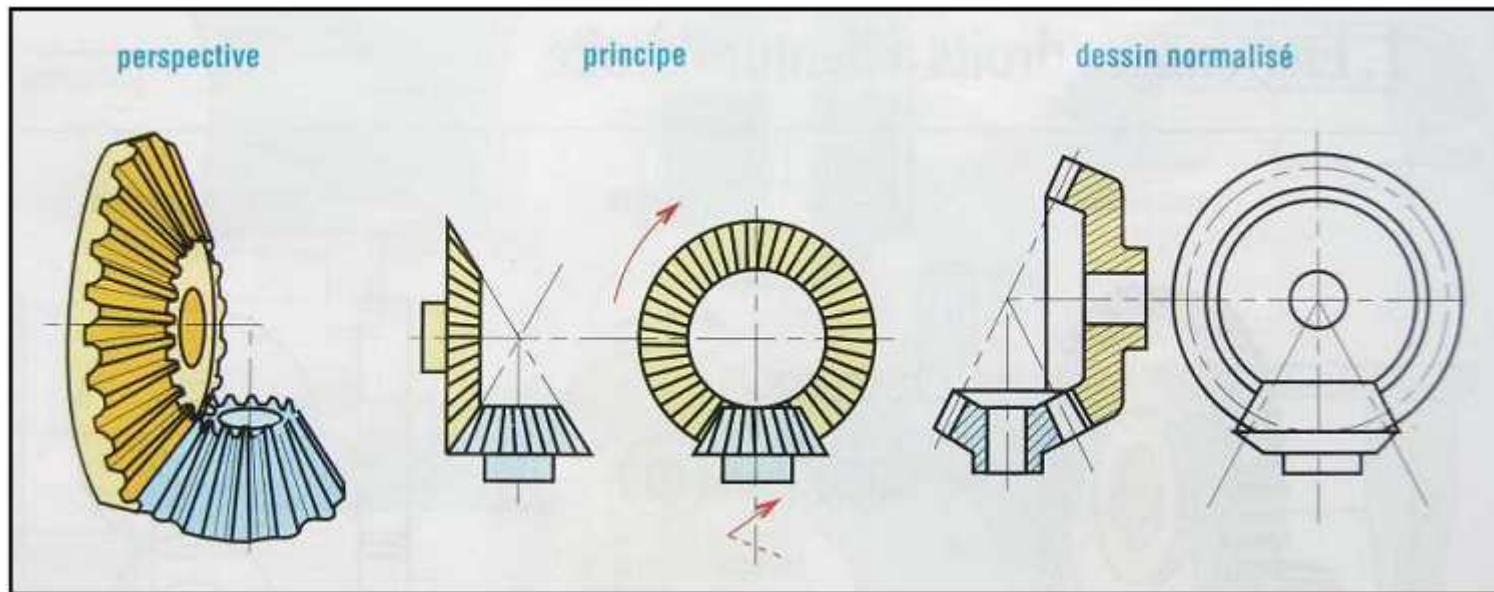
### 2.3 Engrenages droits à denture hélicoïdale

- Les dents des deux engrenages sont inclinés par rapport à l'axe de rotation des arbres;
- À taille égale, ils sont plus silencieux et plus performants que les précédents pour transmettre de la puissance et du couple;
- L'inclinaison des dents engendre des efforts axiaux.



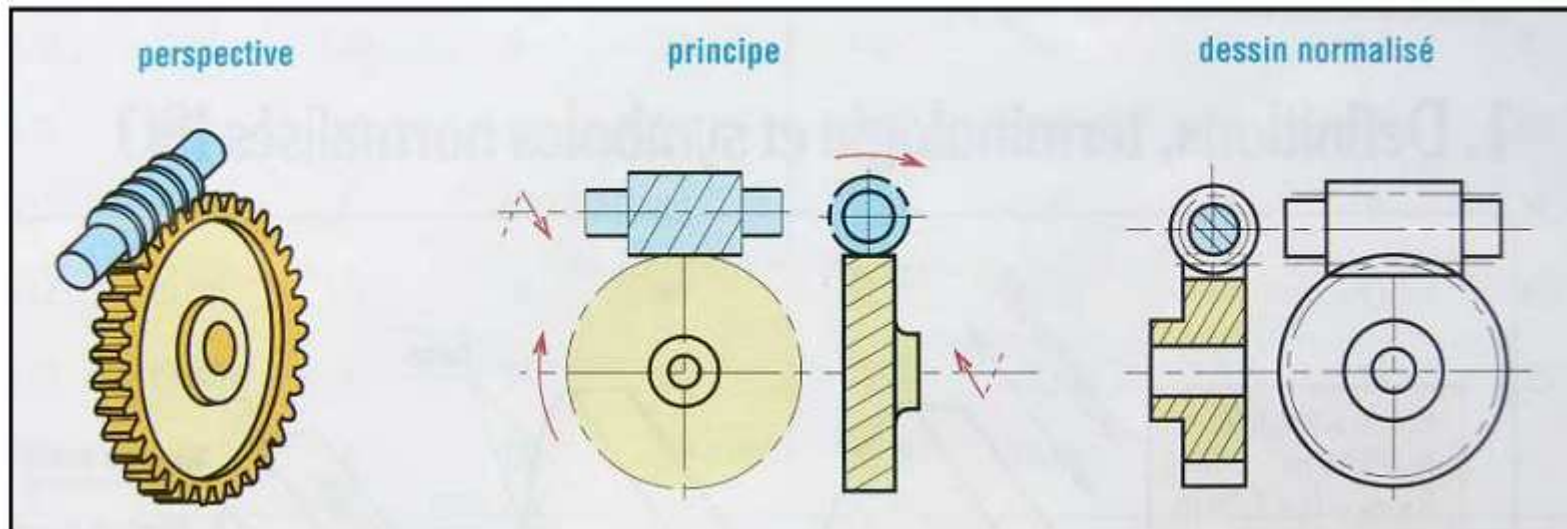
## 2.4 Engrenages coniques

- Les dents sont taillées dans des surfaces coniques;
- Ils sont utilisés pour transmettre le mouvement entre des arbres concourants, perpendiculaires ou non;
- La denture peut être droite mais aussi hélicoïdale ou spirale.



## 2.5 Engrenages roue et vis sans fin

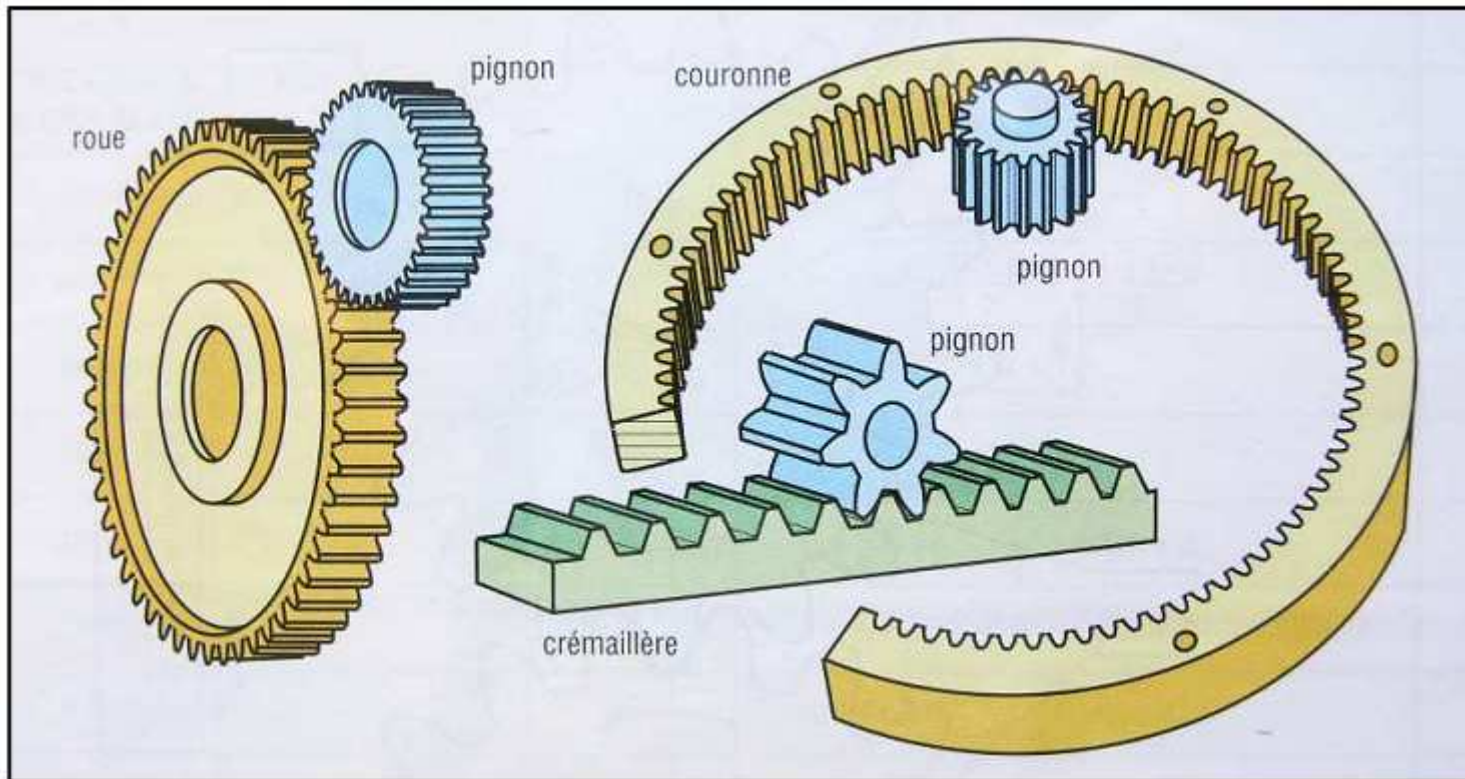
- L'une des roues ressemble à une vis et l'autre à une roue hélicoïdale;
- Le sens de rotation de la roue dépend de celui de la vis mais aussi de l'inclinaison de la denture, filet à gauche ou à droite;
- L'irréversibilité est possible.



### III. Engrenages droits à denture droite

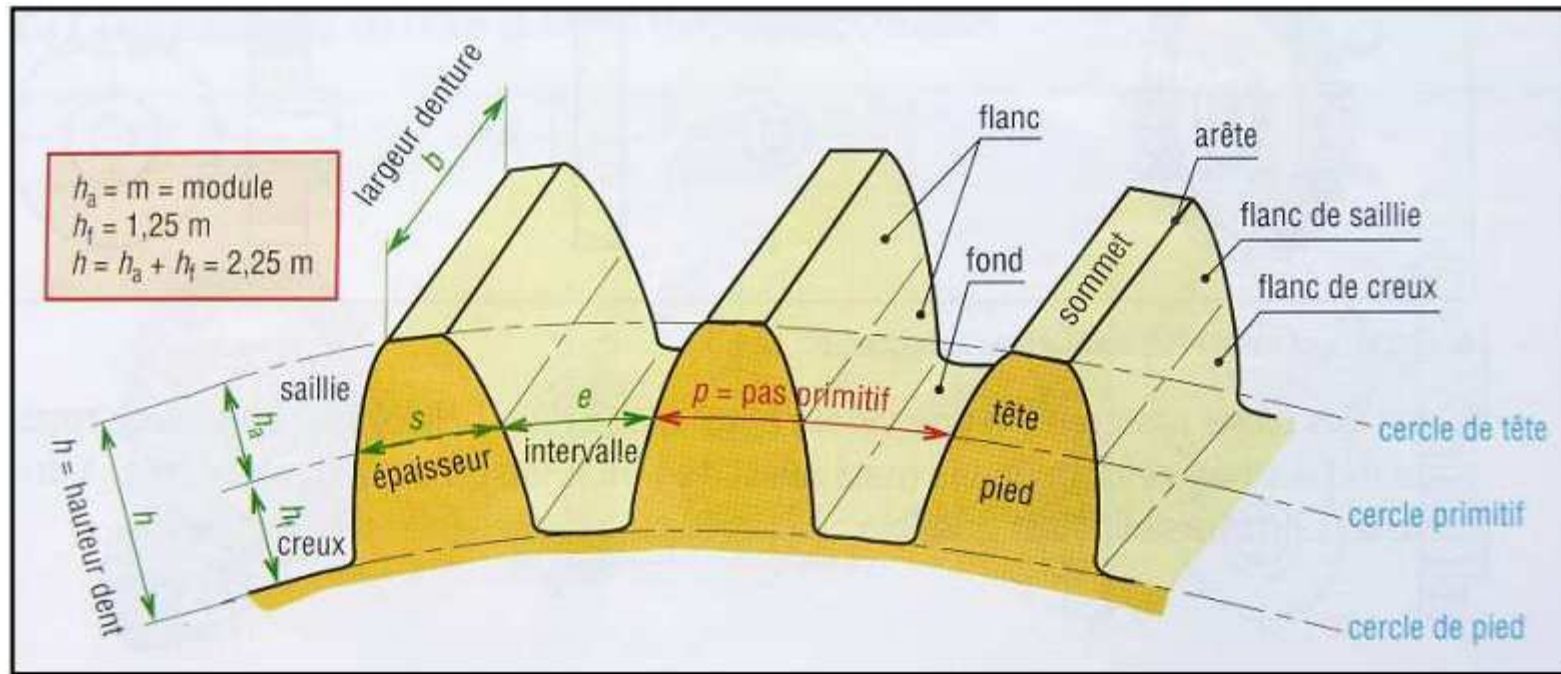
#### 3.1 Types et nomenclature

– La couronne est également appelée engrenage à denture interne.



### 3.2 Définitions

– La géométrie des engrenages est entièrement décrite par un ensemble de paramètres qui sont également utilisés pour leur normalisation.

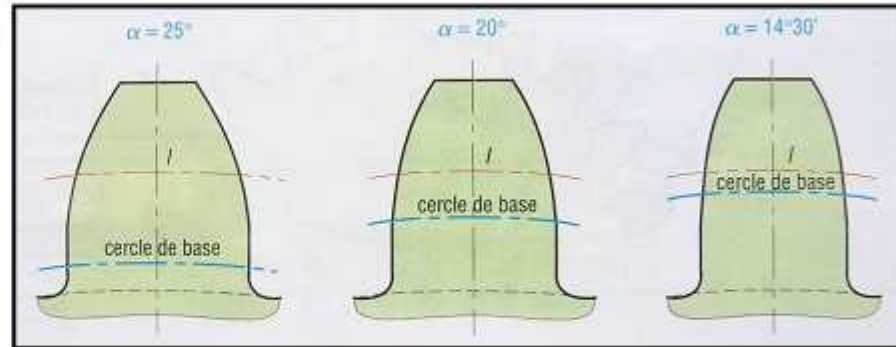
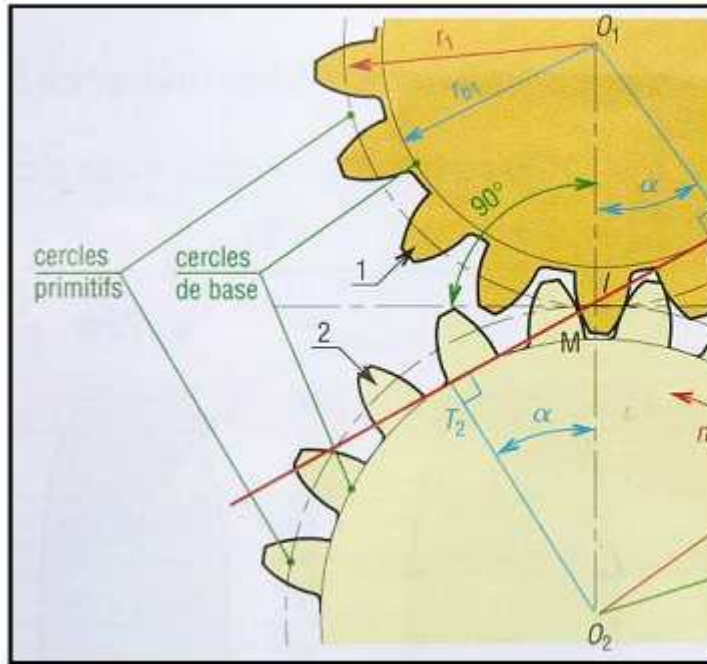


**Cercle primitif** : Cercle sur lequel se trouvent les points de contact des engrenages.

**Cercle de base** : Cercle tangent à la droite normale aux points de contact sur les dents (appelée droite de pression).

**Angle de pression  $\alpha$**  : angle de la droite de pression qui caractérise aussi la forme des dents.

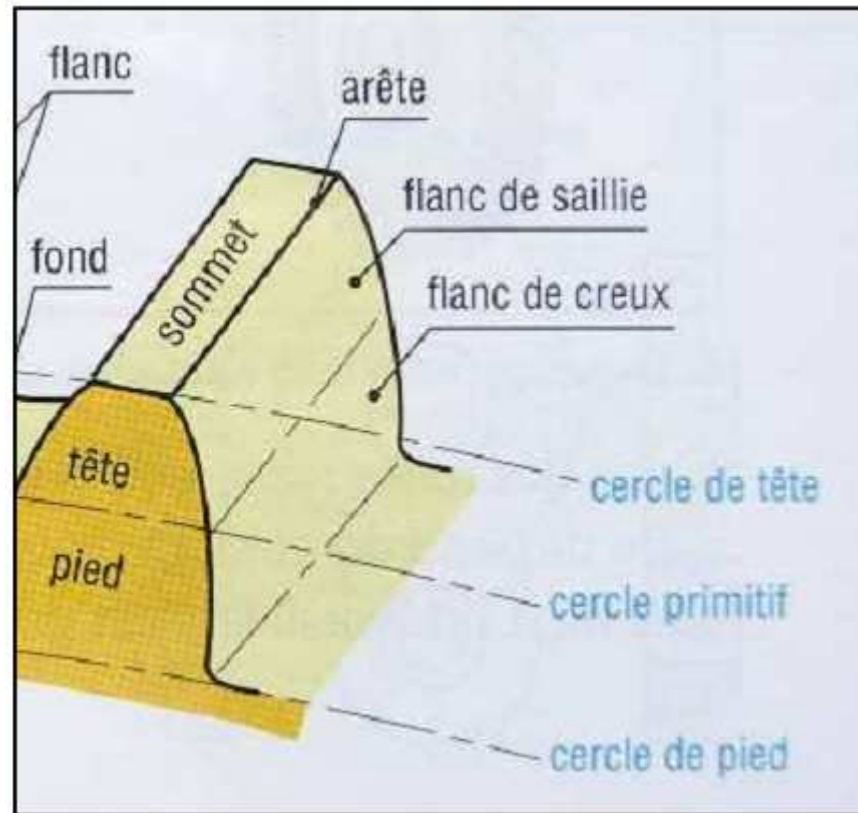




**Cercle de tête** : Cercle correspondant au diamètre maximal de l'engrenage.

**Cercle de pied** : Cercle correspondant au diamètre minimal de l'engrenage.

Ces deux derniers cercles ne sont toutefois pas utilisés dans les calculs d'engrenages.



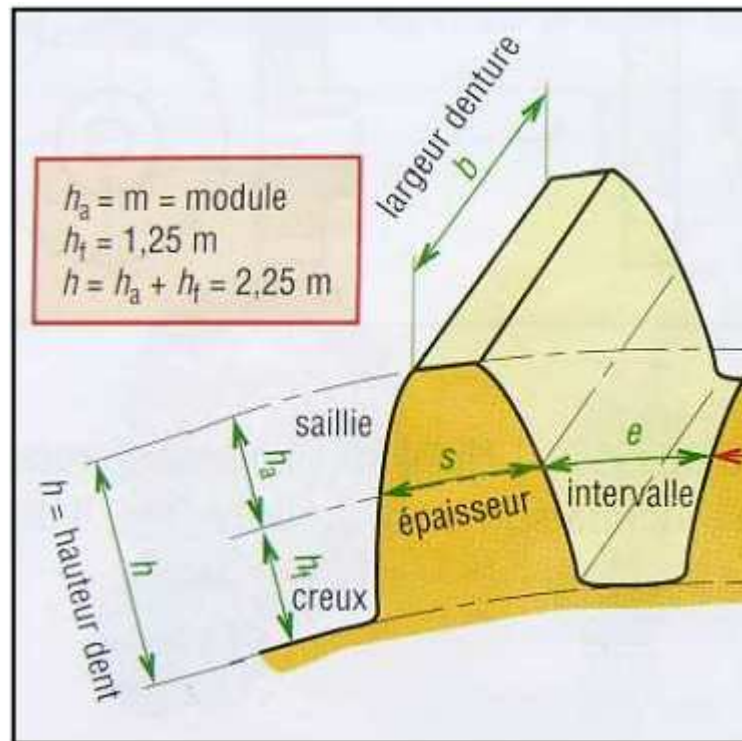
– Le cercle primitif sert de référence pour la définition des dimensions de la dent et d'autres paramètres :

**Saillie  $h_a$**  : Différence entre les rayons du cercle de tête et du cercle primitif.

**Creux  $h_f$**  : Différence entre les rayons du cercle primitif et du cercle de pied.

**Hauteur  $h$**  : Différence entre les rayons du cercle de tête et de pied.

C'est aussi la somme de la saillie  $h_a$  et du creux  $h_f$ .

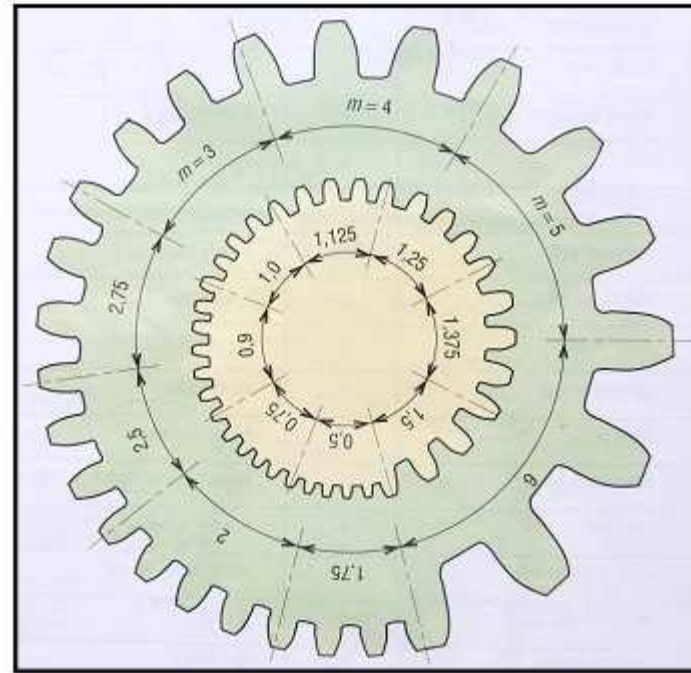
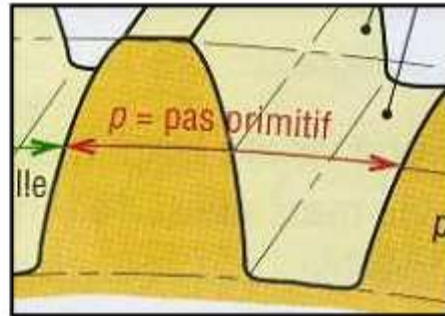


– Les paramètres suivants sont fréquemment utilisés dans diverse formules décrivant la géométrie des engrenages:

**Pas primitif  $p$**  : Longueur d'arc entre deux dents successives mesurée sur le cercle primitif.

**Module  $m$** : Quotient du pas exprimé en mm par le nombre  $\pi$ . L'épaisseur de la dent et sa résistance dépendent du module.

$$m = \frac{p}{\pi} \text{ (mm)}$$



– En plus des paramètres présentés précédemment, il faut aussi définir les variables suivantes :

Vitesse angulaire :  $\omega$ .

Nb. de tours/minute :  $n$ .

Nb. de tours/minute :  $n$ .

Nombre de dents :  $Z$ .

Rayon primitif :  $r$ .

Diamètre primitif :  $d$ .

Entraxe :  $a$ .

Note : À chaque variable peut être associé un indice permettant de distinguer les deux engrenages.

Pignon (menant) : 1.

Roue (menée) : 2.

### 3.3 Formules de base

– Formules relatives à un engrenage seul :

$$m = \frac{p}{\pi} = h_a \text{ (mm)}$$

$$d = m \cdot Z \text{ (mm)}$$

$$p = \frac{\pi \cdot d}{Z} = \frac{\pi \cdot (m \cdot Z)}{Z} = \pi \cdot m \text{ (mm)}$$

Où

- m : module (mm)
- p : pas primitif (mm)
- $h_a$  : saillie (mm)
- d : diamètre primitif (mm)
- $\pi \cdot d$  : circonférence primitive (mm)
- Z : nombre de dents

– Formules relatives au fonctionnement d'une paire d'engrenages :

$$a = \frac{d_1 + d_2}{2} = \frac{m \cdot (Z_1 + Z_2)}{2} \quad (mm)$$

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{T_1}{T_2}$$

Correspondance des indices :

- ◊ Pignon (menant) : 1.
- ◊ Roue (menée) : 2.

Où a : entraxe (mm)

m : module (mm)

d : diamètre primitif (mm)

Z : nombre de dents

$\omega$  : vitesse angulaire (rad/s.)

n : vitesse en tours/minutes

r : rayon primitif

T : couple transmis

– Commentaire relatif aux rapports de vitesse ou de couple :

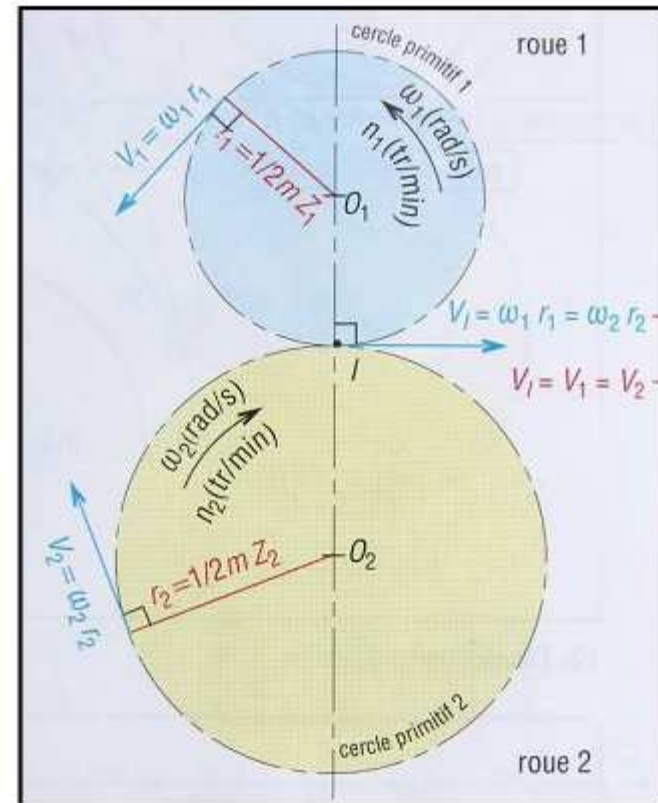
$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{T_1}{T_2}$$

Où

- Z : nombre de dents
- $\omega$  : vitesse angulaire (rad/s.)
- n : vitesse en tours/minutes
- r : rayon primitif
- T : couple transmis

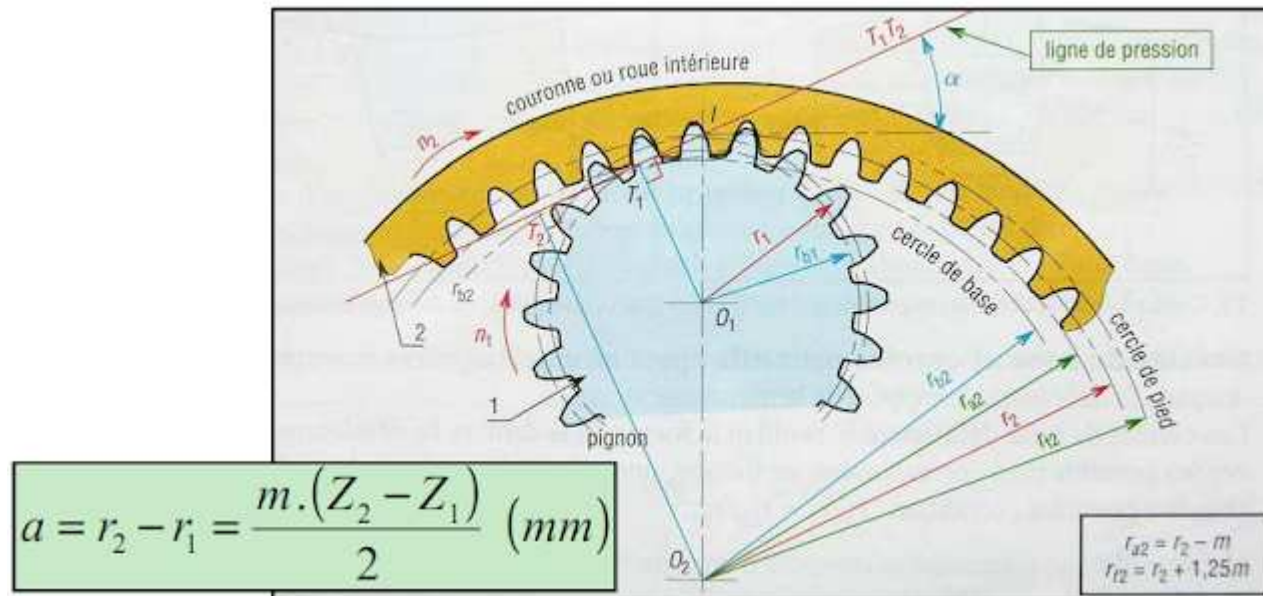
Fondement de la formule :

- ❖ Vitesses tangentielles égales
- ❖ Puissances  $P = T \cdot \omega$  égales



### 3.4 Cas des roues intérieures

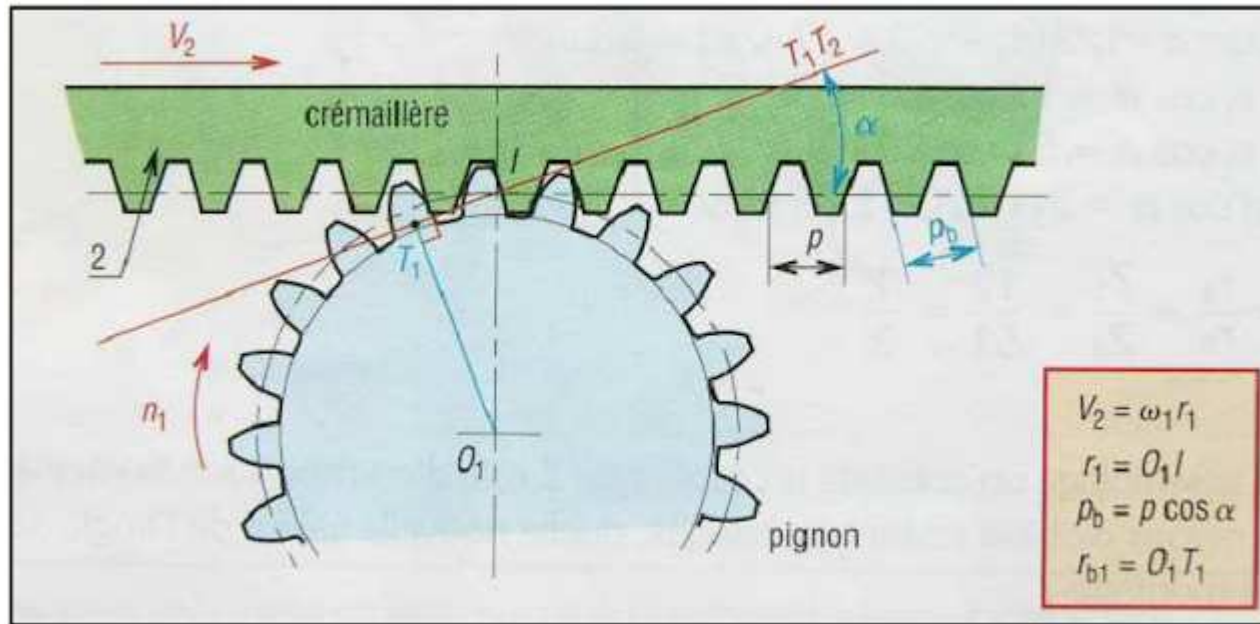
– Les formules précédentes s'appliquent à l'exception de l'entraxe a.



### 3.4 Cas d'une crémaillère

– Les formules relatives aux paires d'engrenages ne peuvent plus s'appliquer ici.





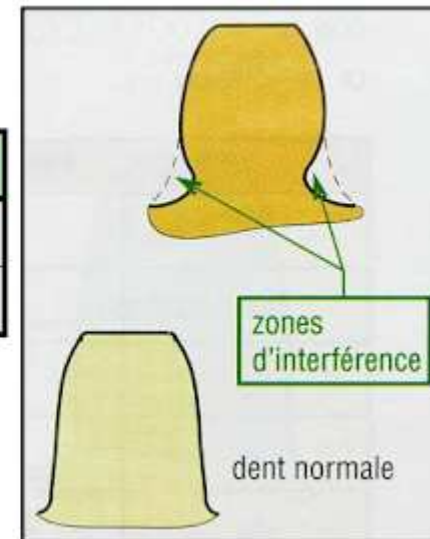
### 3.5 Phénomène d'interférence

– Selon le nombre de dents des engrenages, il peut y avoir des problèmes d'interférence au niveau du pied des dents.

Pour éviter ce type de problèmes, il faut respecter le tableau suivant :

**Module m:** Quotient du pas exprimé en mm par le nombre  $\pi$ . L'épaisseur de la dent et sa résistance dépendent du module.

Nombre de dents évitant l'interférence ( $\alpha = 20^\circ$ )					
$Z_1$	13	14	15	16	17
$Z_{2\max}$	16	26	45	101	1309



### 3.6 Modèle et Torseur transmis à l'engrènement

Deux modèles de liaisons peuvent être utilisés pour représenter les engrenages.

- Une linéaire rectiligne (cylindre-plan)
- Une ponctuelle

La linéaire rectiligne, plus proche de la réalité, nous amène le plus souvent à un problème hyperstatique. Le choix le plus courant est donc une ponctuelle situé au point de tangence des deux cercles primitifs. La normale de cette ponctuelle est inclinée par rapport à la tangente commune aux deux cercles primitifs de  $\alpha$  (habituellement  $\alpha = 20^\circ$ ). I est le point de tangence des deux cercles primitifs sur la ligne d'entraxe.

$$\{\mathbf{1} \rightarrow \mathbf{2}\} = \begin{Bmatrix} F_t & \mathbf{0} \\ F_r & \mathbf{0} \\ 0 & \mathbf{0} \end{Bmatrix}_{I, \vec{t}, \vec{r}, \vec{z}} \quad \text{avec } \vec{t} \text{ axe tangentiel, } \vec{r} \text{ axe radial, } \vec{z} \text{ axe des roues dentées. Dans le cas d'engrenages à dentures droites, on a } F_r = F_t \cdot \tan(\alpha)$$

### 3.7 Résistance des engrenages

En première approximation, nous pouvons utiliser une formule issue d'une étude de RdM, la Formule de Lewis :

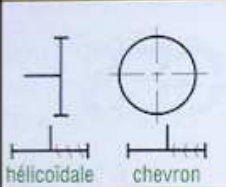
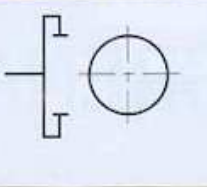
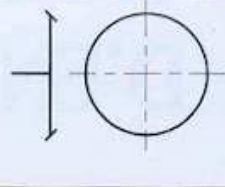
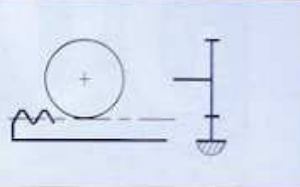
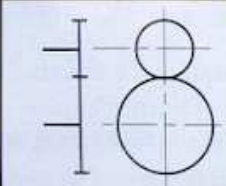
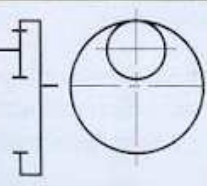
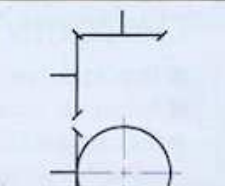
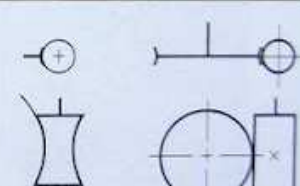
$$m_0 \geq 2.34 \sqrt{\frac{F_t}{k \cdot R_{pe}}}$$

avec k coefficient de largeur (b largeur de l'engrenage,  $b=k \cdot m_0$ ) et  $R_{pe}$  résistance pratique élastique du matériau choisi.

### IV. Trains d'engrenages

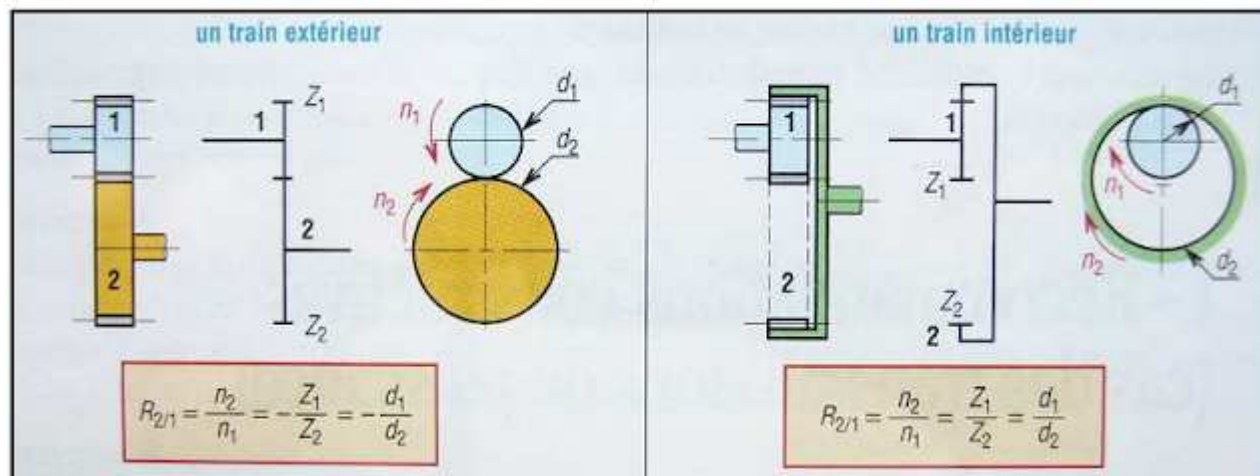
#### 8.1 Schématisations

– Représentation normalisée des engrenages usuels.

Schémas cinématiques (normalisation)			
			
roue extérieure	roue intérieure	roue conique	roue et crémaillère
			
denture extérieure	denture intérieure	spirale	à vis globique roue creuse vis tangente
engrenages droits		engrenages coniques	roue et vis sans fin

## 8.2 Trains à un engrenage

- Les formules de réduction vues précédemment s'appliquent.
- Un signe négatif indique un changement de sens de rotation entre l'entrée et la sortie.
- L'indice 1 correspond à l'engrenage d'entrée (pignon)

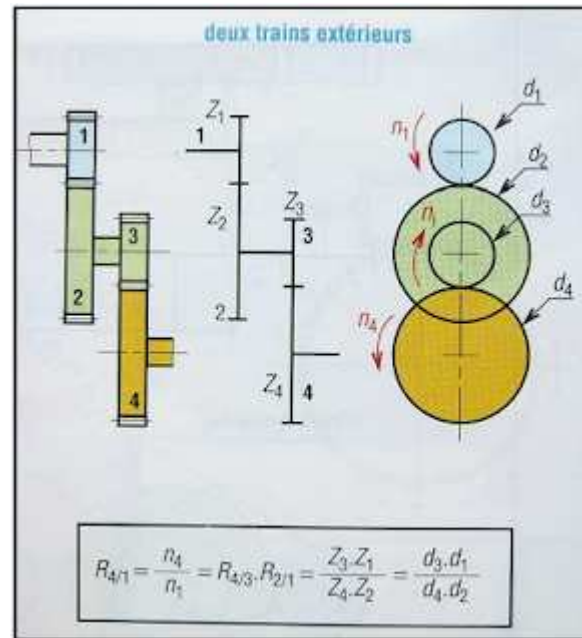


## 8.3 Trains à deux engrenages

- Il y a alors deux couples de roues en série.

Le rapport de transmission (réduction) est égal au produit des rapports de transmission de chacun des deux couples de roues.

L'indice 1 correspond toujours à l'engrenage d'entrée (pignon) tandis que les autres indiquent « le chemin » vers la sortie.



#### 8.4 Trains à deux engrenages plus roue d'inversion

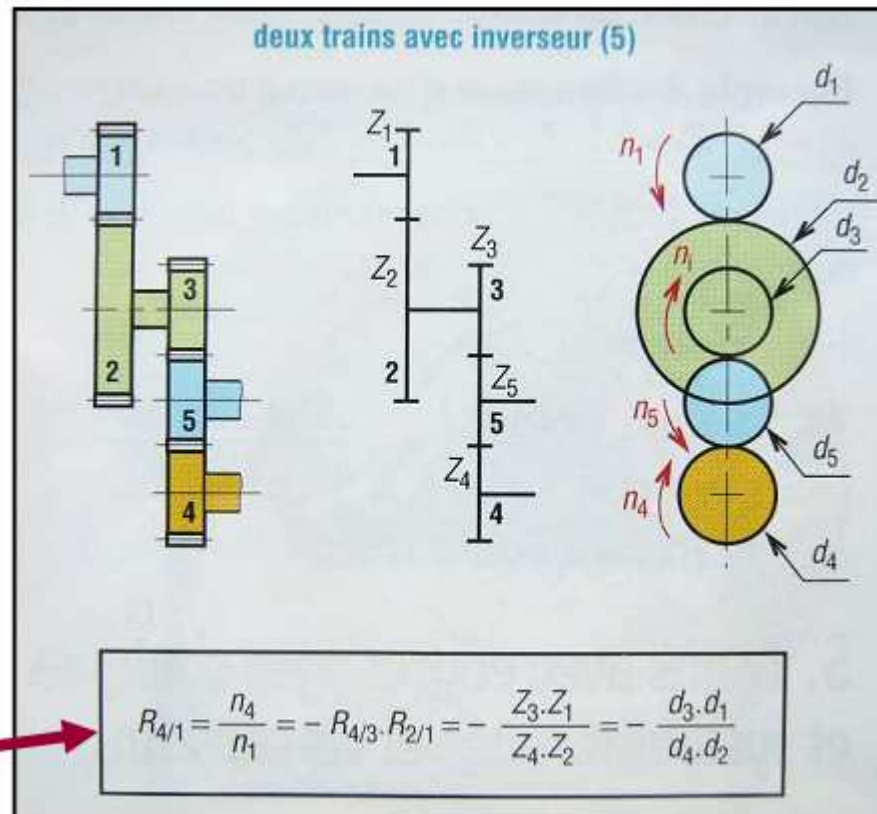
– On intercale une cinquième roue dans une des deux paires.

La roue modifie le sens de rotation final sans modifier le rapport de la transmission.

Le nombre de dents de la roue Le nombre de dents de la roue d'inversion n'a aucune importance.

La roue d'inversion aurait pu être intercalée entre les roues 1 et 2 avec le même résultat final.

La roue 5 n'apparaît pas dans les équations du rapport de transmission.



### 8.5 Cas général : trains à N engrenages

– On généralise les équations précédentes.

$$R_{S/E} = \frac{n_S}{n_E} = (-1)^y \frac{\text{produit } Z_{\text{roues menantes}}}{\text{produit } Z_{\text{roues menées}}}$$

$$R_{S/E} = \frac{n_S}{n_E} = (-1)^y \frac{Z_1 \cdot Z_3 \dots Z_{N-1}}{Z_2 \cdot Z_4 \dots Z_N}$$

$$R_{S/E} = \frac{n_S}{n_E} = (-1)^y R_{2/1} \cdot R_{4/3} \dots R_{N/N-1}$$

Note : Le terme  $(-1)^y$  tient compte de la présence d'inverseurs avec  $y =$  nombre de contacts entre engrenages

